

**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I
BRODOGRADNJE**

**POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ
STROJARSTVA**

KVALIFIKACIJSKI ISPIT

**PREGLED RAZVOJA I PRIMJENE
ANIZOTROPNIH ELASTO-PLASTIČNIH
MODELA ZA LIMOVE**

Maja Džoja, mag. ing.

Split, rujan 2018.

Sadržaj

1. UVOD	1
2. OSNOVE ANIZOTROPNIH ELASTO-PLASTIČNIH MODELA METALA.....	3
2.1. Osnovni pojmovi i opis plastične anizotropije.....	3
2.2. Teorija plastičnog potencijala.....	8
2.3. Druckerov postulat stabilnosti	10
2.3.1. Teorem o pridruženom pravilu tečenja	13
2.3.2. Teorem o konveksnosti plohe tečenja.....	14
2.3.3. Teorem o maksimumu rada plastičnog deformiranja	15
3. NEPRIDRUŽENO PRAVILO TEČENJA.....	16
3.1. Pregled radova koji razmatraju nepridruženo pravilo tečenja	18
3.2. Uvjeti stabilnosti plastičnog toka uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja	23
4. FUNKCIJE TEČENJA.....	27
4.1. Izotropne funkcije tečenja.....	29
4.1.1. Tresca (1864).....	29
4.1.2. von Mises (1913).....	30
4.1.3. Hershey (1954) i Hosford(1972).....	32
4.1.4. Bassani (1977).....	32
4.1.5. Yld86.....	33
4.1.6. Karafillis-Boyce (1993)	33
4.2. Anizotropne funkcije tečenja	34
4.2.1. Hill (1948).....	34
4.2.2. Hill (1979).....	37
4.2.3. Hosford (1979)	38
4.2.4. Yld89.....	38
4.2.5. Hill (1990).....	39
4.2.6. Yld91.....	40
4.2.7. Hill (1993).....	41
4.2.8. Karafillis-Boyce (1993)	42
4.2.9. Yld94.....	44

4.2.10. Yld96.....	45
4.2.11. Yld2000-2d	46
4.2.12. Yld2004-18p i Yld2004-13p	48
5. MODELI PROMJENE PLASTIČNE ANIZOTROPIJE.....	51
6. NAPREDNI KONSTITUTIVNI MODELI U PREDVIĐANJU POSTUPKA CILINDRIČNOG DUBOKOG VUČENJA	58
7. ZAKLJUČAK	68
Literatura	70
Sažetak	77
Popis oznaka i kratica.....	78

1. UVOD

Limovi se proizvode postupcima valjanja što za posljedicu ima izraženu teksturu. Pri tom se javlja orijentacijska ovisnost mehaničkih svojstava materijala odnosno anizotropija. Važnost opisa plastične anizotropije kod predviđanja postupaka oblikovanja limova prepoznata je kroz dugi niz godina.

Općenito, plastično deformiranje materijala može se opisati s dva različita pristupa: polikristalnim na mikroskopskoj razini ili fenomenološkim na makroskopskoj razini. Zbog svoje jednostavnije matematičke forme, prikladnije numeričke implementacije te jednostavne prilagodbe različitim materijalima, fenomenološki pristup se češće primjenjuje u praksi. Osnovne postavke fenomenološkog pristupa su: uvjet tečenja kojim je određena granica elastičnog i plastičnog područja u prostoru naprezanja, zakon očvršćivanja koji opisuje promjenu uvjeta tečenja s napredovanjem procesa deformacije te plastični potencijal čiji gradijent određuje pravac promjene plastične deformacije. Pouzdani fenomenološki anizotropni elasto-plastični modeli za limove zahtijevaju točan opis početnog oblika anizotropne plohe tečenja kao i točan opis promjene njenog položaja, veličine i oblika tijekom procesa deformiranja. Dosada su u literaturi predloženi brojni fenomenološki elasto-plastični anizotropni modeli kojima je moguće opisati orijentacijsku ovisnost plastičnih karakteristika limova.

Nakon najjednostavnijih izotropnih funkcija tečenja koje su predložili Tresca (1864), von Mises (1913), **Barlat i Richmond (1987)** i drugi, razvijene su različite anizotropne funkcije tečenja od jednostavne kvadratične Hill (1948) (**Hill (1948)**) funkcije tečenja do složenih nekvadratičnih funkcija s velikim brojem parametara anizotropije, (**Karafillis-Boyce (1993)**, **Barlat i sur. (1991)**, **Barlat i sur. (2003)**, **Barlat i sur. (2005)**, **Lee i sur. (2017)**, **Cazacu (2018)**). Veza između naprezanja i deformacija u plastičnom području određena je pretpostavljenim pravilom tečenja. Ako se koristi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja, funkcija tečenja ista je kao plastični potencijal odnosno funkcija koja opisuje plastični tok, dok su prema pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja to dvije različite funkcije. Uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja moguće je dobiti prihvatljiva predviđanja anizotropnog ponašanja limova ako se koriste i jednostavnije funkcije naprezanja. Parametri anizotropije funkcije tečenja/plastičnog potencijala koji se koriste za opis anizotropnog plastičnog

ponašanja limova određuju se na temelju vrijednosti naprezanja tečenja i/ili Lankfordova parametra koji se dobiju u pokusima jednoosnog rastezanja uzoraka lima različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja. Lankfordov parametar predstavlja mjeru plastičnog toka a definira se kao omjer prirasta stvarne plastične deformacije na pravcu širine i na pravcu debljine uzorka u pokusu rastezanja. U modelima koji se temelje na nepridruženom pravilu tečenja, parametri anizotropije funkcije tečenja mogu se kalibrirati na temelju vrijednosti naprezanja tečenja dok se parametri anizotropije plastičnog potencijala kalibriraju na temelju vrijednosti Lankfordova parametra. Donedavno su se omjer naprezanja tečenja i Lankfordov parametar razmatrali kao konstantne veličine koje se ne mijenjaju s napredovanjem plastične deformacije (**Cvitanić i sur. (2008)**, **Wang i sur. (2009)**, **Safaei i sur. (2013-b)**) dok se u najnovijim istraživanjima razmatraju kao promjenjive veličine (**Safaei i sur. (2014)**, **Cai i sur. (2016)**, **Lian i sur. (2017)**, **Cvitanić i Kovačić (2017)**, **Min i sur. (2017)**). Za povećanje pouzdanosti rezultata simulacija u predviđanju postupaka oblikovanja kao što je npr. cilindrično duboko vučenje, u konstitutivnim modelima metala sve češće se usvaja pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja. Konstitutivne jednadžbe fenomenološkog elasto-plastičnog modela očvršćujućeg materijala moraju zadovoljavati uvjete poznate kao uvjeti stabilnosti plastičnog toka. Autori **Stoughton (2002)**, **Stoughton i Yoon (2004,2006)** te **Cvitanić i sur. (2008)** su pokazali da je za konstitutivne modele anizotropnih materijala opis stabilnog ponašanja moguće osigurati ako se nad konstitutivnim jednadžbama uvedu manje zahtjevna ograničenja od pridruženog pravila tečenja.

U 2. poglavlju ovog rada razmatrane su osnovne značajke anizotropnog ponašanja limova te su prikazane osnove klasične teorije plastičnosti metala koja se temelji na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja. Radovi u kojima se razmatraju uvjeti stabilnosti plastičnog toka uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja prikazani su u poglavlju 3. Kroz 4. poglavlje kronološki su opisane različite izotropne odnosno anizotropne funkcije tečenja. Konstitutivni modeli koji koriste konstantne ili promjenjive parametre anizotropije te pretpostavku o pridruženom ili nepridruženom pravilu tečenja analizirani su u 5. poglavlju. U zadnjem poglavlju razmatraju se rezultati simulacija cilindričnog dubokog vučenja dobiveni korištenjem konstitutivnih modela koji su analizirani u prethodnim poglavljima. Na samome kraju rada izneseni su zaključci i smjernice za budući rad.

2. OSNOVE ANIZOTROPNIH ELASTO-PLASTIČNIH MODELA METALA

U ovom poglavlju predstavljene su osnove konstitutivnih jednadžbi klasične fenomenološke teorije plastičnosti metala. U prvom dijelu poglavlja objašnjeni su osnovni pojmovi kao i osnovne značajke ponašanja limova. U nastavku poglavlja objašnjen je pojam plastičnog potencijala te su predstavljeni teoremi proizašli iz Druckerovog postulata stabilnosti koji se koristi kao jedan od argumenata za korištenje temeljne pretpostavke klasične teorije plastičnosti metala, pretpostavke o pridruženom pravilu tečenja.

2.1. Osnovni pojmovi i opis plastične anizotropije

Pod djelovanjem vanjskih sila u materijalu nastaju naprezanja koja uzrokuju deformacije odnosno promjenu njegova oblika i dimenzija. U ovisnosti o veličini tih sila mogu nastati elastične i/ili plastične deformacije u tijelu prilikom čega je važno naglasiti da obje deformacije mogu biti ostvarene bez razaranja materijala. Ako po prestanku djelovanja sile materijal poprimi svoj početni oblik, smatra se da je u tijelu nastala samo *elastična deformacija*. Linearno elastičnim tijelom nazivamo ono tijelo kojem je trenutno stanje u potpunosti određeno vidljivim varijablama stanja odnosno postoji jednoznačna linearna ovisnost tenzora naprezanja σ i tenzora elastične deformacije ϵ^e koja se može zapisati u obliku poopćenog Hookeova zakona

$$\sigma = C^e : \epsilon^e \quad (2.1)$$

gdje C^e predstavlja tenzor elastičnosti četvrtoga reda. Ukoliko nakon djelovanja sila materijal ostane trajno deformiran, kaže se da je nastupila *plastična deformacija*. U ovom slučaju nije dovoljno za određivanje stanja naprezanja poznavati samo stanje deformacije već je potreban skup unutarnjih varijabli kojima se opisuje povijest opterećivanja. Ukupna deformacija ϵ kod ovakvog procesa može se razložiti na povratnu elastičnu i nepovratnu plastičnu komponentu te vrijedi izraz

$$\epsilon = \epsilon^p + \epsilon^e \quad (2.2)$$

gdje je ϵ^p tenzor plastične a ϵ^e tenzor elastične deformacije. Konstitutivne jednadžbe predstavljaju zakone kojima se opisuje ponašanje materijala uslijed opterećenja. Osnovna

konstitutivna jednadžba ovisnosti naprezanja i deformacije za slučaj elasto-plastičnog ponašanja materijala može se zapisati u inkrementalnom obliku

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e: d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e: (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.3)$$

gdje se pretpostavlja neosjetljivost odgovora materijala na brzinu opterećivanja. U konstitutivnim modelima koji se razmatraju u nastavku rada, pretpostavlja se da se skup unutarnjih varijabli sastoji od tenzora plastične deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ i varijable očvršćivanja φ koja je skalarna veličina. Za uključivanje dodatnih varijabli stanja u osnovnoj konstitutivnoj jednadžbi naprezanje – deformacija, nužno je postavljanje dodatnih konstitutivnih jednadžbi. S obzirom na nepovrativost procesa plastične deformacije, potrebno je formulirati *uvjet tečenja, pravilo tečenja, zakon očvršćivanja* kao i *uvjete opterećivanja-rasterećivanja*.

Kada je ispunjen uvjet tečenja, pretpostavlja se da je nastupila plastična deformacija materijala. Uvjet plastičnog tečenja zapisuje se korištenjem skalarne funkcije prema kojoj se stanje naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ uspoređuje s granicom naprezanja tečenja σ_y određenom u jednoosnom pokusu rastezanja

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = f_y(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y = 0 \quad (2.4)$$

gdje je $F(\boldsymbol{\sigma})$ *uvjet tečenja* a $f_y(\boldsymbol{\sigma})$ *funkcija tečenja*. U prostoru naprezanja uvjet tečenja predstavljen je zatvorenom hiperplohom koja se naziva *ploha tečenja*. Stanje naprezanja za koje je ispunjen uvjet $F(\boldsymbol{\sigma}) < 0$ vrijedi za područje elastičnih deformacija dok za područje plastičnih deformacija vrijedi $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

S napredovanjem plastične deformacije ploha tečenja podvrgnuta je promjenama. Bilo kakva promjena uvjeta tečenja s napredovanjem plastične deformacije opisuje se zakonom očvršćivanja. Kod idealno plastičnog materijala pretpostavka je da se ploha tečenja ne mijenja u prostoru naprezanja s napredovanjem plastične deformacije. Ukoliko se ploha tečenja mijenja jednako u svim smjerovima, takvu pojavu nazivamo *izotropno očvršćivanje*. S druge strane, mijenjanje položaja plohe tečenja bez promjene veličine i oblika zove se *kinematsko očvršćivanje*. Takvo očvršćivanje opisuje tzv. *Bauschingerov efekt* odnosno pojavu smanjenja granice tečenja pri promjeni smjera opterećivanja. Varijabla očvršćivanja može se definirati prema *principu ekvivalentnosti rada plastičnog deformiranja* i u tom je slučaju predstavljena ekvivalentnom plastičnom deformacijom $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$. Prema principu ekvivalentnosti rada plastičnog

deformiranja, za trajnu promjenu oblika promatranog volumena neovisno o iznosu i vrsti opterećivanja, rad plastičnog deformiranja jednak je

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sigma_y d\bar{\varepsilon}^P \quad (2.5)$$

Postavljanje *uvjeta opterećivanja-rasterećivanja* nužno je da bi se odredilo da li se za stanje naprezanja na plohi tečenja radi o procesu plastičnog opterećivanja ili elastičnog rasterećivanja. Za očvršćujući materijal uvjeti opterećivanja-rasterećivanja mogu se zapisati prema slijedećim izrazima

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) < 0 & \quad \text{-elastičan proces} \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = 0 \quad df_y = (\partial f_y / \partial \boldsymbol{\sigma}) : d\boldsymbol{\sigma} > 0 & \quad \text{- plastično opterećivanje} \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = 0 \quad df_y = (\partial f_y / \partial \boldsymbol{\sigma}) : d\boldsymbol{\sigma} = 0 & \quad \text{- neutralno opterećivanje} \\ F(\boldsymbol{\sigma}, \varphi) = 0 \quad df_y = (\partial f_y / \partial \boldsymbol{\sigma}) : d\boldsymbol{\sigma} < 0 & \quad \text{- elastično rasterećivanje} \end{aligned} \quad (2.6)$$

pri čemu φ predstavlja skup unutarnjih varijabli. Za elastičan proces vrijedi $d\varphi_i = 0$ odnosno za plastičan proces vrijedi $d\varphi_i \geq 0$. U prostoru naprezanja vektor $\partial f_y / \partial \boldsymbol{\sigma}$ ima pravac i smjer normale na tangencijalnu ravninu plohe tečenja. Iz toga slijedi da će za uvjet plastičnog opterećivanja $df_y > 0$, inkrement naprezanja $d\boldsymbol{\sigma}$ biti usmjeren od plohe tečenja. Za uvjet elastičnog rasterećivanja $df_y < 0$, inkrement naprezanja će biti usmjeren od plohe tečenja prema unutra, dok uvjet $df_y = 0$ vrijedi kada inkrement naprezanja leži u ravnini koja tangira plohu tečenja. S obzirom da za promjenu unutarnjih varijabli elastičnog procesa vrijedi $d\varphi_i = 0$, slijedi da se konstitutivne jednadžbe za tenzor plastične deformacije i varijable očvršćivanja mogu postaviti prema izrazima

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = d\lambda \mathbf{g} \quad (2.7)$$

$$d\varphi = d\lambda g \quad (2.8)$$

gdje su \mathbf{g} i g kao tenzorska odnosno skalarna funkcija naprezanja a faktor proporcionalnosti $d\lambda$ skalarna veličina koja se naziva *plastični množitelj* ili *parametar konzistentnosti*. Za parametar konzistentnosti vrijede uvjeti

$$d\lambda > 0 \quad \text{za } F = 0 \text{ i } df_y > 0 \quad (2.9)$$

$$d\lambda = 0 \quad \text{za } F = 0 \text{ i } df_y \leq 0 \quad (2.10)$$

$$d\lambda = 0 \quad \text{za } F < 0 \quad (2.11)$$

Iz prethodna tri izraza slijede tzv. *Kuhn-Tuckerovi uvjeti komplementarnosti*

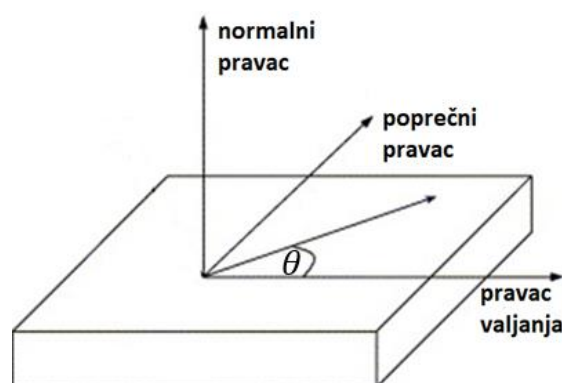
$$d\lambda \geq 0, \quad F \leq 0, \quad d\lambda F = 0 \quad (2.12)$$

Navedenim uvjetima iz izraza (2.12) postavlja se zahtjev da trenutno stanje naprezanja zadovoljava uvjet tečenja te da je proces plastične deformacije moguć samo za stanja na plohi tečenja. Slijedi da za stanje na plohi tečenja, za koje je ispunjen uvjet plastičnog opterećivanja, mora vrijediti $dF = 0$ iz čega proizlazi *uvjet konzistentnosti*

$$d\lambda dF = 0 \quad (2.13)$$

Prema uvjetu (2.13) opterećivanje iz plastično deformiranog stanja za posljedicu će imati novo plastično deformirano stanje za koje stanje naprezanja leži na novoj plohi tečenja.

Oblikovanje odnosno plastično deformiranje polikristalnih materijala u hladnom stanju rezultira usmjerenim izduživanjem zrna u pravcu intenzivnog tečenja što uzrokuje pojavu orijentirane (usmjerene) strukture koja se naziva *tekstura (Duplančić (2007))*. Tekstura se u materijalu razvija za vrijeme procesa obrade a najizraženija je u postupku hladnog valjanja limova te kod istiskivanja i provlačenja. Ovisna je o kemijskom sastavu kao i o mehaničkim te toplinskim postupcima a osim postupkom deformacije, tekstura može nastati i kao posljedica rekristalizacije nastale tijekom ili nakon procesa valjanja. Kod limova s naglašenom teksturom, kao posljedica javlja se orijentacijska ovisnost mehaničkih svojstava materijala koja se naziva *anizotropija*. Kod limova anizotropija je ortotropna s osima simetrije postupka valjanja kako je prikazano na slici 2.1.



Slika 2.1. Osi ortotropije lima

Anizotropija plastičnih svojstava, kao što su naprezanje tečenja σ_y te mjera plastičnog toka, je izražena kod limova. S druge strane anizotropija elastičnih svojstava može se zanemariti

tako da se elastično ponašanje limova može smatrati izotropnim. Plastična svojstva materijala u pokusu jednoosnog rastezanja materijala ovisna su o kutu θ koji os uzorka lima zatvara s referentnim pravcem (najčešće pravac valjanja). Mjera anizotropije plastičnog toka predstavljena je *Lankfordovim parametrom* r_θ , poznatim još i kao *parametar plastične anizotropije*. Lankfordovim parametrom opisuje se otpor materijala stanjivanju ili lokalizaciji deformacije koja prethodi lomu kod rastezanja uzoraka lima. Definira se kao omjer logaritamske mjere stvarne plastične deformacije na pravcu širine ε_{22}^p i debljine uzorka ε_{33}^p u jednoosnom testu rastezanja prema izrazu

$$r_\theta = \frac{\varepsilon_{22}^p}{\varepsilon_{33}^p} \Big|_\theta = \frac{\ln\left(\frac{b}{b_0}\right)}{\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \Big|_\theta \quad (2.14)$$

gdje su b i b_0 odnosno t i t_0 konačna i početna širina odnosno debljina uzorka. Zbog poteškoća pri mjerenju debljine uzorka i na temelju uvjeta plastične nestlačivosti $\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0$, izraz (2.14) se prevodi u

$$r_\theta = \frac{\varepsilon_{22}^p}{-(\varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{11}^p)} \Big|_\theta = \frac{\ln\left(\frac{b}{b_0}\right)}{-\left(\ln\left(\frac{b}{b_0}\right) + \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)\right)} \Big|_\theta \quad (2.15)$$

gdje su l i l_0 konačna i početna mjerna duljina uzorka a ε_{11}^p logaritamska mjera stvarne plastične deformacije na pravcu duljine uzorka. Uobičajeno je da se ispitivanje anizotropije lima provodi rastezanjem uzoraka gdje se pri produljenju od 15% mjeri postignuta duljina i širina uzorka. Kako se anizotropna plastična svojstva razlikuju za različite smjerove, može se dobiti orijentacijska ovisnost naprezanja tečenja i Lankfordova parametra u odnosu na pravac valjanja. Nadalje, ako su vrijednosti Lankfordova parametra za uzorke svih orijentacija približno jednake ali ipak različite od jedan, stanje se naziva tzv. *stanje normalne anizotropije*. Pritom se *parametar normalne anizotropije* \bar{r} računa pomoću izraza

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (2.16)$$

gdje r_0, r_{45} i r_{90} predstavljaju vrijednosti Lankfordova parametra za uzorke lima rezane pod kutovima $0^\circ, 45^\circ$ i 90° u odnosu na pravac valjanja. Ukoliko se promjena vrijednosti Lankfordova parametra ne može zanemariti, radi se o stanju tzv. *ravninske anizotropije* pri

čemu se promjena Lankfordova parametra često opisuje *parametrom ravninske anizotropije* Δr definiranom prema izrazu

$$\Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2} \quad (2.17)$$

Za anizotropne materijale vrijedi $\bar{r} \neq 1$ i $\Delta r \neq 0$. Limovi kod kojih je $\bar{r} > 1$ i $\Delta r = 0$, pogodni su za obradu dubokim vučenjem, (**Duplančić (2007)**). Ukoliko se radi o izotropnom materijalu, vrijednosti deformacije na pravcu širine i pravcu debljine su jednake, stoga za sve vrijednosti kuta θ prema izrazu (2.14) vrijedi $r_\theta=1$, te iz izraza (2.16) i (2.17) slijedi da je $\bar{r} = 1$ i $\Delta r = 0$.

Prema **ISO10113:2006** standardu, Lankfordov parametar se računa kao konstanta ili kao inkrementalna veličina. Prijedlog je da se za određeni inkrement uzdužne plastične deformacije vrši linearna regresija na uskom području između dvije granice pri čemu se iz nagiba pravca računa inkrementalna vrijednost Lankfordova parametra. Ovakav pristup uzima u obzir promjenu Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije. Ako se linearna regresija vrši na cijelom području deformacije, iz nagiba pravca dobije se konstantna vrijednost Lankfordova parametra za cijelo područje.

2.2. Teorija plastičnog potencijala

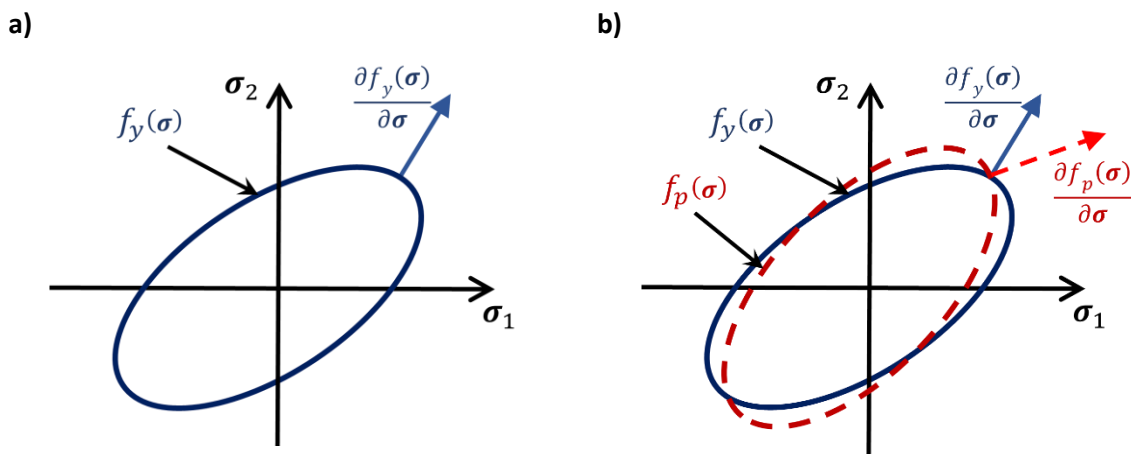
Na tragu teorije elastičnosti i postojanju elastične potencijalne funkcije, von Mises 1928. godine predstavlja tzv. *teoriju plastičnog potencijala*. Von Mises, a naknadno i **Hill (1950)**, zasnivaju teoriju na postojanju plastičnog potencijala te predlažu jednadžbu promjene tenzora plastične deformacije u obliku

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f_p(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.18)$$

gdje $f_p(\boldsymbol{\sigma})$ predstavlja plastičnu potencijalnu funkciju dok je faktor proporcionalnosti $d\lambda$, poznat kao *plastični množitelj* ili *parametar konzistentnosti*, skalarna pozitivna veličina koja poprima vrijednosti različite od nule kada je ispunjen uvjet tečenja i kada postoji plastična deformacija kako je pokazano u poglavlju 2.1. Funkcija plastičnog potencijala u prostoru glavnih naprezanja predstavlja zatvorenu hiperplohu koja se naziva *ploha plastičnog potencijala*. Promjena plastične deformacije $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ u prostoru naprezanja predstavljena je s vektorom okomitim na ravninu koja tangira plohu plastičnog potencijala. **Drucker (1951)** je pokazao kako za stabilan očvršćujući materijal inkrement plastične deformacije $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ima

pravac i smjer normale na ravninu koja tangira plohu tečenja što je detaljno opisano u poglavlju 2.3. Iz navedenog slijedi uobičajena pretpostavka klasične teorije plastičnosti metala prema kojoj je funkcija tečenja f_y jednaka funkciji plastičnog potencijala f_p pa vrijedi $f_p(\boldsymbol{\sigma}) = f_y(\boldsymbol{\sigma})$, slika 2.2.a. Takva pretpostavka naziva se *pridruženo pravilo tečenja* (eng. *associated flow rule*, AFR) pa izraz (2.18) prelazi u

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f_y(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.19)$$



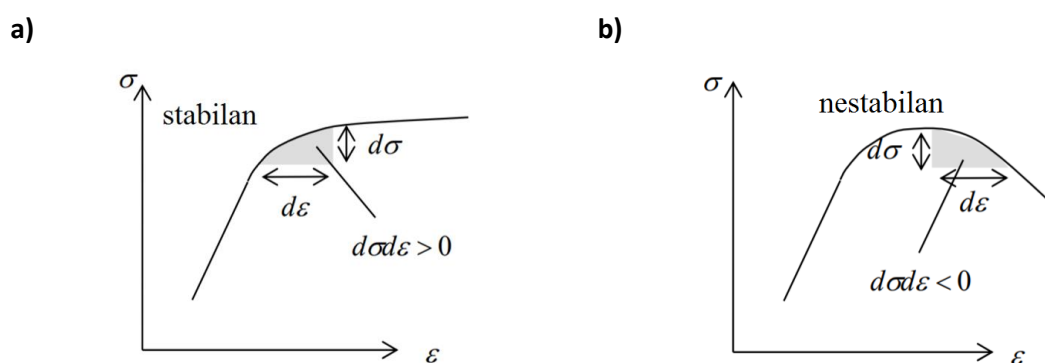
Slika 2.2. Geometrijska interpretacija za ravninsko stanje naprežanja: **a)** pridruženog pravila tečenja, **b)** nepridruženog pravila tečenja

Nasuprot tome, *nepridruženo pravilo tečenja* (eng. *non-associated flow rule*, NAFR), prikazano na slici 2.2.b, uklanja ograničenje jednakosti funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala usvojene kod pridruženog pravila tečenja, odnosno vrijedi $f_p(\boldsymbol{\sigma}) \neq f_y(\boldsymbol{\sigma})$. U skladu s tim, funkcija tečenja definira granicu elastičnog i plastičnog područja dok gradijent funkcije plastičnog potencijala definira pravac plastičnog toka. S obzirom na mnogobrojne prednosti koje nudi ovakav pristup, u novije vrijeme se sve više pozornosti posvećuje razvoju i primjeni modela temeljenih na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja. U 3. poglavlju razmatrani su argumenti koji opravdavaju upotrebu pristupa koji razlikuje funkciju tečenja i funkciju plastičnog potencijala te su istaknute prednosti korištenja ovakvog pristupa u konstitutivnim modelima anizotropnih materijala.

2.3. Druckerov postulat stabilnosti

Primjena pridruženog pravila tečenja pretpostavlja najjednostavniji odnos funkcije tečenja i plastičnog potencijala. Jedan od argumenata za korištenje pretpostavke o pridruženom pravilu tečenja je tzv. *Druckerov postulat stabilnosti (Drucker (1950), Drucker (1951))*, koji se uzima kao polazna točka kod izvođenja veze naprezanje – deformacija a koji je objašnjen u nastavku.

U pokusu jednoosnog rastezanja plastično očvršćujućeg materijala vrijedi da pri monotonom porastu plastične deformacije monotono raste i naprezanje tečenja. Kod stabilnog ponašanja materijala, za prirast naprezanja $d\sigma > 0$ vrijedi $d\varepsilon > 0$ odnosno $d\sigma d\varepsilon > 0$, kako je prikazano na slici 2.3.a. S druge strane, na slici 2.3.b prikazano je nestabilno ponašanje materijala kod kojeg je prirast deformacije $d\varepsilon > 0$ moguć samo uz negativan prirast naprezanja $d\sigma < 0$, pa vrijedi $d\sigma d\varepsilon < 0$.



Slika 2.3. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji: **a)** stabilnog, **b)** nestabilnog materijala

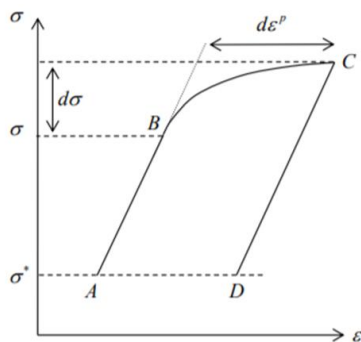
Temeljem razmatranja jednoosnog pokusa rastezanja, iz međusobne ovisnosti naprezanja o plastičnoj deformaciji, može se zaključiti da vrijedi slijedeće

$$\begin{aligned}
 d\sigma d\varepsilon^p &\geq 0 - \text{plastično očvršćujući materijal,} \\
 d\sigma d\varepsilon^p &= 0 - \text{idealno plastičan materijal,} \\
 d\sigma d\varepsilon^p &\leq 0 - \text{plastično omekšavajući materijal.}
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

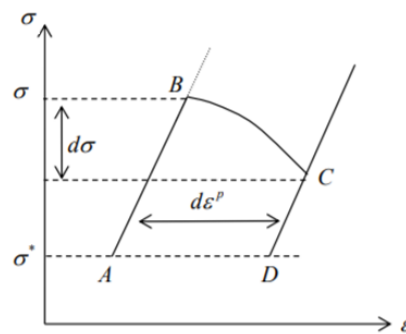
Na slici 2.4.a. prikazan je dijagram jednoosnog pokusa rastezanja plastično-očvršćujućeg materijala. Nakon prethodne elastične i/ili plastične deformacije u materijalu je prisutno naprezanje σ^* prikazano točkom A. Materijal se dodatno opterećuje, čime naprezanje u

materijalu doseže vrijednost σ u točki B. Daljnjim opterećivanjem materijala naprezanje doseže vrijednost $\sigma + d\sigma$ u točki C a inkrement naprezanja $d\sigma$ uzrokuje dodatnu deformaciju u materijalu $d\varepsilon$. Rasterećivanjem materijala, vrijednost naprezanja ponovno iznosi σ^* (točka D). Materijal je prošao kroz ciklus primjene i uklanjanja dodatnog opterećenja tzv. *ciklus opterećenje-rasterećenje* odnosno *ciklus naprezanja*. Na slici 2.4.b prikazan je ciklus opterećenje-rasterećenje omekšavajućeg materijala. Povećanjem opterećenja, naprezanje u materijalu prvo doseže vrijednost σ u točki B. Da bi postigao vrijednost naprezanja u točki C materijal se mora rasteretiti no smanjenjem opterećenja materijal će doživjeti elastični povrat te će se vratiti u točku A. Očito je da je potrebno kontrolom pomaka (deformacije) postići naprezanje $\sigma + d\sigma$ u točki C gdje inkrement naprezanja ima negativan predznak $d\sigma < 0$. Daljnjim smanjenjem opterećenja, naprezanje iz točke C postići će vrijednost naprezanja u točki D čime se završava ciklus opterećenje-rasterećenje.

a)



b)



Slika 2.4. Ciklus opterećenje-rasterećenje: a) očvršćujućeg, b) omekšavajućeg materijala

Umnožak $d\sigma d\varepsilon = d\sigma(d\varepsilon^e + d\varepsilon^p)$ ima dimenziju rada po jedinici volumena koji se izvrši za vrijeme primjene dodatnog opterećenja u razmatranom ciklusu uz pretpostavku da opterećenje kreće od stanja naprezanja na plohi tečenja. Kako je umnožak $d\sigma d\varepsilon^e$ uvijek pozitivan ili jednak nuli, dovoljno je razmatrati samo dio rada uzrokovan plastičnom deformacijom. Može se uočiti da za materijale koji očvršćuju plastičnom deformacijom vrijedi

$$d\sigma d\varepsilon > 0 \quad d\sigma d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.21)$$

odnosno, za idealno plastične materijale

$$d\sigma d\varepsilon \geq 0 \quad d\sigma d\varepsilon^p = 0 \quad (2.22)$$

Iz navedenog, može se zaključiti da za plastično očvršćujući te idealno plastičan materijal vrijedi tzv. Druckerova nejednakost

$$d\sigma d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.23)$$

Druckerov postulat stabilnosti izveden je poopćenjem razmatranja dijagrama rastezanja očvršćujućeg materijala na troosno stanje naprezanja. Navedeni postulat vrijedi samo za očvršćujuće materijale pa se naziva i *Druckerov postulat očvršćivanja*. Prema Druckerovom postulatu, uvjeti koji definiraju materijale koji očvršćuju plastičnom deformacijom, odnosno stabilne materijale, su sljedeći:

- *Primjenom dodatnog naprezanja $d\sigma$, rad dodatnog opterećenja uvijek je pozitivan*

$$d\sigma : d\varepsilon > 0 \quad (2.24)$$

- *Rad dodatnog opterećenja u ciklusu opterećenje-rasterećenje je nenegativan odnosno vrijedi da je pozitivan ili jednak nuli*

$$W = \oint (\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon \geq 0 \quad (2.25)$$

U gornjem izrazu, ciklus opterećenja kreće od proizvoljnog stanja naprezanja σ^* a integracija se vrši po zatvorenoj putanji u prostoru naprezanja. U ciklusu opterećenja vrijedi $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$, odnosno ukupna deformacija $d\varepsilon$ jednaka je zbroju elastične i plastične deformacije. Ako je ciklus elastičan proces, rad iz izraza (2.25) jednak je nuli dok će pozitivan rad biti ostvaren u ciklusu koji uključuje plastičnu deformaciju.

Rad dodatnog opterećivanja prema izrazu (2.25) u ciklusu opterećivanje–rasterećivanje koji uključuje plastičan proces, svodi se na rad u intervalu vremena $t_1 - t_2$ u kojem se odvija plastičan proces

$$W = \oint (\sigma - \sigma^*) : \dot{\varepsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sigma - \sigma^*) : \dot{\varepsilon}^p dt > 0 \quad (2.26)$$

Kako je prikazano u literaturi (**Khan i Huang (1995)**, **Cvitanić (2006)**), zadovoljavanje nejednakosti (2.26) ima za posljedicu uvjet

$$(\sigma - \sigma^*) : d\varepsilon^p > 0 \quad (2.27)$$

kada je početno naprezanje σ^* dovoljno daleko od stanja σ , odnosno kada vrijedi $\sigma - \sigma^* \neq 0$. Odabirom početnog stanja naprezanja na plohi tečenja takvog da vrijedi $\sigma^* = \sigma$, izraz (2.25) se prevodi u uvjet

$$d\sigma : d\varepsilon^p > 0 \quad (2.28)$$

čime je zadovoljen i uvjet $d\sigma : d\epsilon > 0$. Kao posljedica zadovoljavanja uvjeta stabilnog ponašanja materijala prema Druckerovu postulatu odnosno zadovoljavanja uvjeta (2.27) i (2.28), mogu se dokazati tri teorema:

- *teorem o pridruženom pravilu tečenja,*
- *teorem o konveksnosti plohe tečenja,*
- *teorem o maksimumu rada plastičnog deformiranja.*

2.3.1. Teorem o pridruženom pravilu tečenja

U prostoru naprezanja vektor inkrementa plastične deformacije $d\epsilon^p$ mora imati pravac i smjer gradijenta funkcije tečenja $\partial f_y / \partial \sigma$ u točki koja predstavlja trenutno stanje naprezanja σ .

Ako se za stanje na plohi tečenja, koja razdvaja elastična stanja od plastičnih, pretpostavi djelovanje inkrementa naprezanja $d\sigma$, plastična deformacija će nastati samo ako je inkrement naprezanja usmjeren od plohe tečenja prema van. Inkrement naprezanja $d\sigma$ može se razložiti na dvije komponente

$$d\sigma = d\sigma^n + d\sigma^t \quad (2.29)$$

gdje je $d\sigma^n$ normalna komponenta a $d\sigma^t$ tangencijalna komponenta kao što je prikazano na slici 2.5. Prema uvjetu kontinuiteta, plastična deformacija $d\epsilon^p$ mora biti jednaka nuli kada naprezanje $d\sigma$ leži u tangencijalnoj ravnini razmatrane točke na plohi tečenja. Drugim riječima, plastična deformacija je posljedica isključivo normalne komponente naprezanja $d\sigma^n$ dok inkrement naprezanja $d\sigma^t$ uzrokuje samo elastičnu deformaciju $d\epsilon^e$ stoga vrijedi

$$d\sigma : d\epsilon^p = (d\sigma^n + d\sigma^t) : d\epsilon^p = d\sigma^n : d\epsilon^p > 0 \quad (2.30)$$

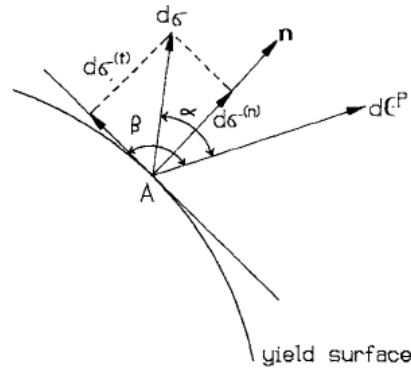
$$d\sigma^t : d\epsilon^p = 0 \quad (2.31)$$

Jedini slučaj kada $d\sigma : d\epsilon^p$ ne može poprimiti negativnu vrijednost za bilo koji inkrement naprezanja $d\sigma$ jest kada vektor $d\epsilon^p$ ima pravac gradijenta na plohu tečenja, odnosno izraz (2.31) će biti ispunjen za $d\sigma^t$ na proizvoljnom pravcu u tangencijalnoj ravnini samo ako vektor $d\epsilon^p$ leži na normali \mathbf{n} okomitoj na tangencijalnu ravninu plohe tečenja

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \sigma} \quad (2.32)$$

pri čemu je plastični množitelj $d\lambda$ skalarna pozitivna veličina. Može se zaključiti da je pravac

vektora plastične deformacije $d\epsilon^p$ jedinstveno određen trenutnim stanjem naprezanja. Na temelju navedenog, posljedica zadovoljavanja Druckerova postulata je tzv. *pridruženo pravilo tečenja ili zakon okomitosti (normalnosti)*.

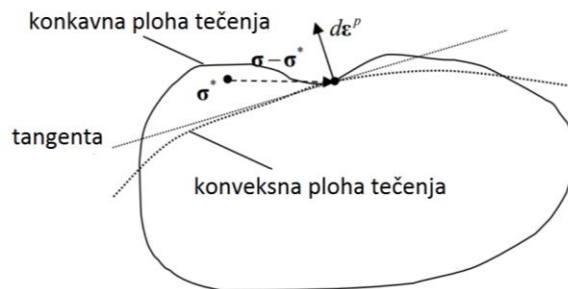


Slika 2.5. Razlaganje inkrementa naprezanja (Khan i Huang (1995))

2.3.2. Teorem o konveksnosti plohe tečenja

Ploha tečenja ne smije na niti jednom mjestu biti konkavna. Na svim dijelovima ploha tečenja mora biti konveksna.

Teorem se može izvesti za slučaj kada vrijedi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja prema kojoj vektor inkrementa plastične deformacije $d\epsilon^p$ ima pravac i smjer gradijenta na plohu tečenja. Ukoliko u prostoru naprezanja postoji stanje naprezanja σ^* koje leži s vanjske strane tangente, kao što je prikazano na slici 2.6., nejednakost $(\sigma - \sigma^*) : d\epsilon^p > 0$ nije zadovoljena. Drugim riječima, može se zaključiti da vektor $(\sigma - \sigma^*)$ ne smije dvaput sjeći plohu tečenja, stoga ploha tečenja mora biti konveksna.



Slika 2.6. Konveksnost plohe tečenja

2.3.3. Teorem o maksimumu rada plastičnog deformiranja

Rad plastičnog deformiranja stvarnih naprezanja σ pri proizvoljnom prirastu plastične deformacije $d\varepsilon^p$ veći je od rada bilo kojeg drugog naprezanja σ^ koje zadovoljava uvjet tečenja.*

Izraz (2.27) može se zapisati kao

$$\sigma: d\varepsilon^p > \sigma^*: d\varepsilon^p \quad (2.33)$$

i predstavlja *princip maksimuma plastične disipacije*. Po ovom principu, od svih mogućih stanja naprezanja σ^* koja zadovoljavaju uvjet tečenja, stvarno stanje naprezanja je ono koje zahtjeva maksimalni plastični rad (**Hill (1948-a), Hill (1950)**). Zadovoljavanje nejednakosti (2.27) nužan je no ne i dovoljan uvjet za ispunjavanje Druckerova postulata te vrijedi da ovu nejednakost mogu ispuniti i materijali koji ne očvršćuju plastičnom deformacijom, odnosno omekšavajući materijali što je pokazano i u **Cvitanić (2006)** razmatranjem mogućih ovisnosti naprezanja o deformaciji u jednoosnom pokusu rastezanja. **Lubarda i sur. (1996)** su na nekoliko primjera opterećivanja i rasterećivanja materijala u očvršćujućem odnosno omekšavajućem stanju, pokazali da nejednakosti Druckerovog postulata mogu ispuniti i neki drugi ciklusi i uvjeti opterećivanja.

3. NEPRIDRUŽENO PRAVILO TEČENJA

Veza između naprezanja i deformacija u plastičnom području određena je pretpostavljenim pravilom tečenja. Za povećanje pouzdanosti rezultata simulacija, u konstitutivnim modelima metala sve češće se usvaja pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja. Primjena nepridruženog pravila tečenja zahtjeva preispitivanje osnovnih postulata klasične teorije plastičnosti na temelju kojih je izvedena pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja.

Druckerov postulat stabilnosti, prethodno opisan u poglavlju 2.3., na temelju kojeg se može izvesti pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja jedan je od osnovnih argumenata za korištenje ovog pravila. Pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja temelji se i na općeprihvaćenim opažanjima u eksperimentima prema kojima je kod metala granica tečenja neosjetljiva na hidrostatički pritisak pri čemu je trajna plastična promjena volumena zanemariva. Navedene zaključke na temelju pokusa opterećenja metala pod velikim pritiskom izveo je **Bridgman (1947)**. Prema radu **Bishop i Hill (1951-b)**, smatra se da je za Taylorov odnosno Bishop-Hill polikristalni model pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja ispravna. Napuštanjem pretpostavke o pridruženom pravilu tečenja, funkcija tečenja i plastični potencijal opisuju se s dvije zasebne funkcije. Iako je primjenu nepridruženog pravila tečenja razmatrao još **Melan (1938)**, ovakav pristup je donedavno ostao ograničen samo na neke materijale kao što su beton i geološki materijali, kod kojih je nastanak plastične deformacije dijelom uvjetovan makroskopskim procesima koji ovise o hidrostatičkom naprezanju. **Spitzig i Richmond (1984)** su na temelju razmatranja jednoosnih pokusa rastezanja i sabijanja uz narinuti pritisak, pokazali da se ponašanje nekih metala ne može opisati modelima koji koriste pretpostavku o pridruženom pravilu tečenja. **Lee (1988)** je opravdao prethodno spomenute zaključke Spitziga i Richmonda modelom koji uzima u obzir pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja. **Mroz (1963)** je pokazao da je pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja dovoljan uvjet za opis stabilnog ponašanja materijala, no ne i nužan. Razmatrao je uvjete jedinstvenosti rješenja kada se koristi pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja, što je razmatrano i u radovima **Hill (1958)** te **Runesson i Mroz (1989)**. U novije vrijeme, **Stoughton (2002)** objedinjuje teorijska razmatranja prema kojima je osiguran opis stabilnog ponašanja materijala kada se nad konstitutivnim zakonima uvedu neka druga

ograničenja umjesto ograničenja jednakosti funkcije tečenja i plastičnog potencijala. Autor razvija konstitutivni model za ortotropne materijale neosjetljiv na hidrostatičko naprezanje koji se temelji na kvadratičnoj ortotropnoj Hill (1948) funkciji naprezanja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja. Pri tome su funkcija tečenja i funkcija plastičnog potencijala dvije neovisne funkcije naprezanja kojima su parametri određeni iz različitih skupova podataka. Parametri Hill (1948) funkcije tečenja određeni su na temelju naprezanja tečenja, a parametri Hill (1948) plastičnog potencijala određeni su na temelju podataka o plastičnom toku odnosno vrijednosti Lankfordova parametra. Svojim modelom pokazao je zadovoljavajuća predviđanja orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja odnosno Lankfordova parametra za dvije aluminijske legure, Al 2008-T4 i Al 2024-T3. Daljnja poboljšanja ostvarili su **Stoughton i Yoon (2004)**. Nadogradnjom modela iz rada **Stoughton (2002)**, razvili su modele koji se temelje na asimetričnoj anizotropnoj funkciji tečenja s komponentom kojom se iskazuje utjecaj hidrostatičkog naprezanja na naprezanje tečenja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja. Pokazali su kako razvijeni modeli daju bolje rezultate u predviđanju orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja u vlaku i tlaku te Lankfordova parametra nego modeli koji se temelje na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja. Modele su testirali na temelju eksperimentalnih podataka dviju aluminijskih legura koje pokazuju razliku naprezanja tečenja u vlaku i tlaku. Razmatrali su uvjete stabilnosti i u radu **Stoughton i Yoon (2006)**. Potvrdili su prethodno spomenute argumente kako je pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja dovoljan ali ne i nužan uvjet za stabilnost plastičnog toka. Uvjete stabilnosti plastičnog toka razmatrali su za poopćeni model materijala temeljen na nepridruženom pravilu tečenja neovisan o brzini deformiranja i temperaturi uz pretpostavku o izotropnom očvršćivanju prilikom čega su objedinili sve zaključke donesene u prethodnim radovima **Stoughton (2002)** te **Stoughton i Yoon (2004)**. Ograničenja koja su razmatrali u svom radu izvedena su za najopćenitiju funkciju tečenja i plastični potencijali tako da bilo koji model temeljen na nepridruženom pravilu tečenja a koji zadovoljava razmatrana ograničenja bude bezuvjetno stabilan. U radovima **Cvitanić (2006)** te **Cvitanić i sur., (2008)** razvijeni su modeli koji se temelje na kvadratičnoj Hill (1948) te složenijoj nekvadratičnoj Karafillis-Boyce (1993) funkciji naprezanja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja. Za dvije aluminijske legure koje su prethodno analizirane u radu **Stoughton i Yoon (2004)**, autori su pokazali da modeli temeljeni na nepridruženom pravilu tečenja koji koriste jednostavnije anizotropne funkcije naprezanja daju jednako dobra predviđanja orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja i

Lankfordova parametra kao i modeli koji se temelje na pridruženom pravilu tečenja a koji koriste složenije anizotropne funkcije naprežanja.

Nakon opsežnog rada **Stoughton (2002), Stoughton i Yoon (2004,2006), Cvitanić i sur., (2008)**, primjena nepridruženog pravila tečenja u konstitutivnim modelima ortotropnih materijala kao što su limovi, postala je sve učestalija. Najvažniji zaključci iz istraživanja o stabilnosti plastičnog toka kada se usvoji pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja navedeni su u poglavlju 3.1. kroz pregled ključnih radova.

3.1. Pregled radova koji razmatraju nepridruženo pravilo tečenja

• **Bishop i Hill (1951-b)** su pokazali da je proces plastične deformacije upravljani Schmidovim zakonom na mikrorazini konzistentan s postavkom o pridruženom pravilu tečenja na makrorazini. Prema Schmidovu zakonu, proces plastične deformacije upravljani je mehanizmom klizanja pri čemu je aktivni sustav klizanja onaj za kojeg je postignuta kritična vrijednost posmičnog naprežanja. Njihov zaključak navodi na to da je ploha tečenja na razini kristala uvijek konveksna a vektor inkrementa plastične deformacije ima smjer normale na tangencijalnu ravninu plohe tečenja. S druge strane, njihova razmatranja ne mogu potvrditi ispravnost postavke o pridruženom pravilu tečenja. Unatoč činjenici da je utjecaj Schmidova mehanizma klizanja dominantan u procesu plastične deformacije većine metala na sobnoj temperaturi, **Richmond (1980)** je zaključio da postoje i drugi utjecajni faktori koji mogu narušiti pretpostavku o pridruženom pravilu tečenja.

• **Spitzig i Richmond (1984)** su proveli jednoosne pokuse rastežanja i sabijanja uzoraka čelika i aluminijske legure uz narinuto hidrostatičko naprežanje. Na temelju rezultata pokusa, pokazali su da hidrostatičko naprežanje ima utjecaj na nastanak plastične deformacije te je naprežanje tečenja linearno ovisno o hidrostatičkom tlaku p prema izrazu

$$\sigma = \sigma_0(1 + 3\alpha'p) \quad (3.1)$$

gdje σ_0 predstavlja vrijednost naprežanja tečenja ovisnu o deformaciji kada je $p = 0.1$ MPa dok α' predstavlja parametar tlaka koji ne ovisi o deformaciji. Pokazali su da pristup temeljen na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja precjenjuje predviđanje zanemarive trajne plastične dilatacije ostvarene u eksperimentima. Temeljem rezultata njihovih pokusa slijedi

da je plastična promjena volumena zanemariva i stoga se materijali osjetljivi na hidrostatičko naprezanje ne mogu opisati modelima temeljenim na pridruženom pravilu tečenja već je potreban koncept temeljen na nepridruženom pravilu tečenja. Prema njihovim rezultatima, funkcija plastičnog potencijala je neovisna o hidrostatičkom naprezanju dok je funkcija tečenja ovisna o punom tenzoru naprezanja iz čega slijedi da su ove dvije funkcije različite. Slične zaključke iznio je **Lade (1987)** koji je pokazao da se pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja nije primjenjiva kod poroznih materijala kao što su geološki i granularni materijali.

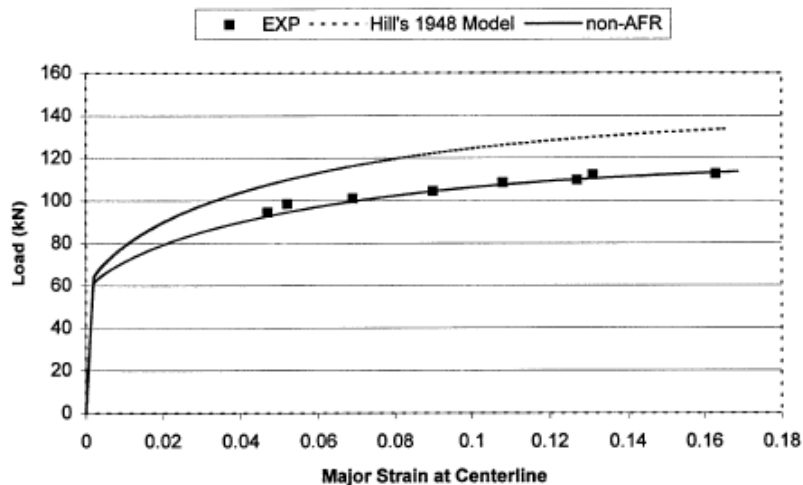
- Prema zaključcima **Li i Richmond (1997)**, naprezanja koja nisu proizašla iz Schmidtova mehanizama klizanja tzv. ne-Schmidtova naprezanja, mogu utjecati na uvjet tečenja i dovesti do rušenja ispravnosti pretpostavke o pridruženom pravilu tečenja. Također, naglasili su da pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja dovodi u pitanje jedinstvenost stanja naprezanja i opis stabilnosti plastičnog toka.

- **Brünig i Obrecht (1998)** su modifikacijom Schmidtova zakona, predložili polikristalni model temeljen na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja koji uključuje odgovarajuće komponente naprezanja u uvjet tečenja na mikrorazini. Numerički rezultati ukazuju na to da varijacije u uvjetu tečenja na mikrorazini imaju značajan utjecaj na odnos naprezanje – deformacija kao i na početak plastičnog tečenja na makrorazini u pokusu razvlačenja i sabijanja. Nadalje, uočili su da se primjenom pridruženog pravila tečenja precjenjuje plastično povećanje volumena daleko iznad eksperimentalno dobivenog. Zaključili su da se plastični potencijal treba opisati neovisno od uvjeta tečenja na mikrorazini, odnosno opravdali su primjenu pretpostavke o nepridruženom pravilu tečenja.

- **Lademo i sur. (1999)** su na temelju rezultata pokusa jednoosnog rastezanja uzoraka limova različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja odredili plastične karakteristike limova dviju aluminijskih legura, Al 7108 i Al 6063. Na temelju eksperimentalnih podataka, analizirali su tri ortotropna modela materijala u predviđanju ravninske plastične anizotropije. Analizirani modeli temeljeni su na anizotropnoj Hill (1948) (**Hill (1948-b)**), Yld89 (**Barlat i Lian (1989)**) te Karafillis-Boyce (1993) (**Karafillis i Boyce (1993)**) funkciji tečenja te pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja. Zaključili su da pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja u analiziranim modelima koji koriste navedene funkcije tečenja ne daje

zadovoljavajući opis jednoosnih plastičnih svojstava materijala. Zaključno predlažu korištenje postavke o nepridruženom pravilu tečenja.

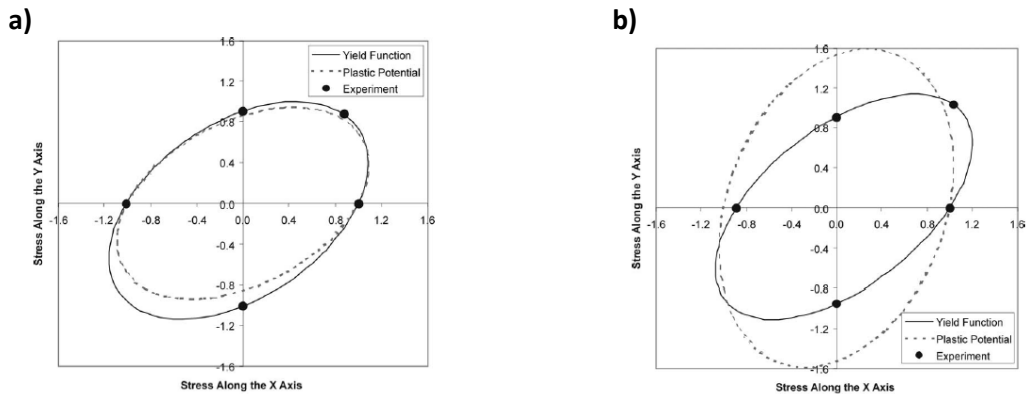
• **Stoughton (2002)** je ostvario značajan doprinos u opravdanju korištenja pretpostavke o nepridruženom pravilu tečenja za ortotropne materijale. Argumenti koji opravdavaju upotrebu pretpostavke o pridruženom pravilu tečenja temelje se na dokazima koji upućuju da vrijede osnovni uvjeti koji osiguravaju opis očvršćujućeg materijala. Autor je pokazao da isti temeljni uvjeti vrijede i za predloženi model koji koristi pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja ako se postavke nešto drugačija ograničenja nad konstitutivnim zakonima, odnosno da pretpostavka o pridruženom pravilu nije nužna da bi temeljni uvjeti bili ispunjeni. Temeljem istraživanja u navedenom radu, a poslije i u radovima **Stoughton i Yoon (2004,2006)** te **Cvitić i sur. (2008)**, opis stabilnog ponašanja materijala pretpostavljen je kroz ispunjavanje četiri uvjeta: *uvjet konzistentnosti*, *uvjet kontinuiteta*, *uvjet jedinstvenosti stanja naprezanja* te *uvjet nepovrativosti procesa plastične deformacije*. Zbog preglednosti, uvjeti su prikazani u poglavlju 3.2. Također, u radu **Stoughton (2002)** razvijen je anizotropni konstitutivni model materijala temeljen na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja i kvadratičnoj Hill (1948) funkciji naprezanja. Na strukturnom nivou razmatrana je mogućnost razvijenih modela u predviđanju rezultata pokusa rastezanja pravokutnog lima (tzv. Graf-Hosfordov eksperiment) te su rezultati pokusa prikazani na slici 3.1. Autor je pokazao kako model temeljen na nepridruženom pravilu tečenja dobro aproksimira eksperimentalne vrijednosti sile, dok su te iste vrijednosti precijenjene kada se koristi model u kojem je funkcija tečenja identična funkciji plastičnog potencijala. Slične zaključke autor je donio na temelju predviđanja orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra dviju aluminijskih legura, Al 2008-T4 i Al 2024-T3.



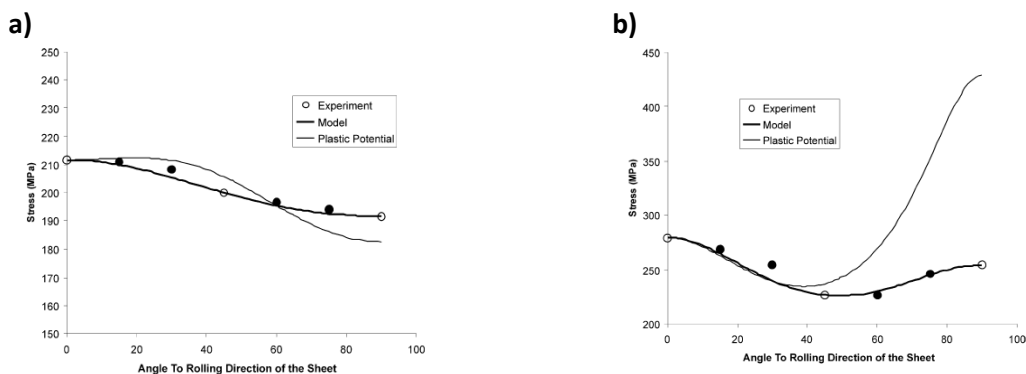
Slika 3.1. Predviđanja rezultata pokusa rastezanja pravokutnog lima ostvarena s dva različita modela (Stoughton (2002))

• **Stoughton i Yoon (2004)** su potvrdili da uvjeti stabilnosti mogu biti zadovoljeni ako se ne koristi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja. Predložili su model u kojem su funkcija tečenja i plastični potencijal dvije različite funkcije a koji zadovoljava određene uvjete stabilnog ponašanja materijala. Nadogradili su prethodni Stoughtonov model **Stoughton (2002)** na tragu rada **Spitzig i Richmond (1983)**. U modelima koji se temelje na kvadratičnoj Hill (1948) funkciji te uzimaju u obzir pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja i izotropno očvršćivanje, uzeli su u obzir osjetljivost naprezanja tečenja na hidrostatičko naprezanje s ciljem točnijeg opisa stvarnog ponašanja materijala koji imaju izraženu razliku naprezanja tečenja u vlaku i tlaku. Svoje zaključke izveli su na temelju razmatranja rezultata predviđanja anizotropnog i asimetričnog ponašanja za dvije aluminijske legure, Al 2008-T4 i Al 2090-T3. U usporedbi s prethodnim Stoughtonovim modelom, autori su ostvarili dodatna poboljšanja te su rezultate predviđanja njihovog modela usporedili s predviđanjima modela u kojima je usvojena pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja. Na slici 3.2. prikazane su konture predložene asimetrične funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala za analizirane aluminijske legure. Može se uočiti da se konture značajno razlikuju. Također, razmatrali su predviđanja orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja u vlaku i tlaku s modelima koji uzimaju u obzir pretpostavku o pridruženom odnosno o nepridruženom pravilu tečenja. Na temelju rezultata prikazanih na slici 3.3., zaključili su da jednakost funkcije tečenja s funkcijom plastičnog potencijala daje značajna odstupanja od eksperimentalnih naprezanja tečenja u vlaku, pogotovo za aluminijsku leguru Al 2090-T3. Isti zaključci vrijede i

za predviđanje eksperimentalnih naprezanja tečenja u tlaku. Pokazali su da je izrazito teško opisati anizotropno ponašanje analiziranih materijala korištenjem modela temeljenog na jednostavnoj kvadratičnoj Hill (1948) funkciji u kojem su funkcija tečenja i plastični potencijal predstavljeni istom funkcijom te zaključno predlažu korištenje složenijih nekvadratičnih funkcija tečenja ili pretpostavke o nepridruženom pravilu tečenja.



Slika 3.2. Usporedba kontura predložene asimetrične funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala za aluminijsku leguru: **a)** Al 2008-T4, **b)** Al 2090-T3. [Stoughton i Yoon (2004)]



Slika 3.3. Predviđanje orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja u vlaknu s modelom koji se temelji na predloženoj asimetričnoj funkciji tečenja uz pretpostavku o pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja za aluminijsku leguru: **a)** Al 2008-T4, **b)** Al 2090-T3. [Stoughton i Yoon (2004)]

- **Cvitanić (2006)** te **Cvitanić i sur., (2008)** razvijaju konstitutivni model s pretpostavkom o nepridruženom pravilu tečenja koji se temelji na ortotropnoj kvadratičnoj Hill (1948) odnosno ortotropnoj nekvadratičnoj Karafillis-Boyce (1993) funkciji tečenja u kombinaciji s izotropnim Swift zakonom očvršćivanja za dvije aluminijske legure, Al2008-T4 i Al2090-T3. Razmatrane su mogućnosti analiziranih funkcija u predviđanju orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra gdje su ostvareni bolji rezultati u odnosu na rezultate dobivene s usvojenom pretpostavkom o pridruženom pravilu tečenja. Autori u modelu uvode definiciju za varijablu očvršćivanja sukladnu principu ekvivalentnosti rada

plastičnog deformiranja prema kojoj se varijabla očvršćivanja i plastični množitelj razlikuju. U radovima **Stoughton (2002)**, **Stoughton i Yoon (2004,2006)** primjenjuje se pojednostavljeni pristup i pretpostavlja jednakost varijable očvršćivanja i plastičnog množitelja. Autori su pokazali da uvjeti koji trebaju biti zadovoljeni za opis ponašanja očvršćujućeg materijala mogu biti ispunjeni uz ista ograničenja koja vrijede za modele iz radova **Stoughton (2002)**, **Stoughton (2004,2006)**. Također, **Cvitanić (2006)** razmatra utjecaj postavki anizotropnog materijalnog modela i parametara modela na numeričke rezultate nekoliko homogenih oblika deformiranja. U modelu koji se temelji na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja s asimetričnom funkcijom tečenja izvedene modifikacijom izotropnog Drucker-Prager (1950) uvjeta, zaključeno je da broj uključenih anizotropnih parametara ima veći utjecaj na konačan rezultat od matematičkog oblika funkcije.

Pregled uvjeta koji osiguravaju stabilno ponašanje materijala, izvedeni na temelju istraživanja u prethodno navedenim radovima a koje je interpretiralo više autora, prikazani su u poglavlju 3.2.

3.2. Uvjeti stabilnosti plastičnog toka uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja

Dokaze o jedinstvenosti rješenja te stabilnosti plastičnog toka kada se usvoji pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja razmatrao je **Mroz (1963)**, a njega su do danas interpretirali i dokazima potkrijepili mnogi autori. Značajan doprinos u razvoju ortotropnih konstitutivnih modela za limove te razmatranju zadovoljavanja uvjeta stabilnosti plastičnog toka tih istih modela u svojim radovima ostvarili su **Stoughton (2002)**, **Stoughton i Yoon (2004,2006)** te **Cvitanić (2006)**, **Cvitanić i sur. (2008)**. Autori su razvili modele u kojima se funkcija tečenja i funkcija plastičnog potencijala opisuju s dvije različite funkcije. Kratak prikaz zadovoljavanja uvjeta stabilnosti plastičnog toka uz postavku o nepridruženom pravilu tečenja slijedi u nastavku.

- **Uvjet konzistentnosti**

Prema uvjetu konzistentnosti $d\lambda dF = 0$, opterećivanje iz plastično deformiranog stanja ima za posljedicu novo plastično deformirano stanje za koje će stanje naprezanja ležati na novoj plohi tečenja pri čemu su osigurane pozitivne vrijednosti parametra konzistentnosti $d\lambda$.

Stoughton (2002) te **Stoughton i Yoon (2004,2006)** su pokazali da je parametar konzistentnosti $d\lambda$ uvijek pozitivan ako su ispunjeni uvjeti plastičnog opterećivanja ako vrijedi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja, no može biti pozitivan ako vrijede i neka druga ograničenja nad konstitutivnim izrazima. Za razliku od Stoughtonovih radova u kojima se pretpostavlja da je prirast varijable očvršćivanja $d\bar{\varepsilon}^p$ jednak parametru konzistentnosti $d\lambda$ u konstitutivnoj jednadžbi za brzinu promjene tenzora plastične deformacije, prema **Cvitić (2006)** te **Cvitić i sur. (2008)** jednadžba promjene parametra očvršćivanja izvedena je prema principu ekvivalentnosti rada plastičnog deformiranja. Pri tome, za homogenu plastičnu potencijalnu funkciju slijedi odnos promjene varijable očvršćivanja i plastičnog množitelja za nepridruženo pravilo tečenja prema izrazu

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^p = f_y d\bar{\varepsilon}^p \quad \rightarrow \quad d\bar{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\boldsymbol{\sigma} : \partial f_p / \partial \boldsymbol{\sigma}}{f_y} = d\lambda \frac{f_p}{f_y} \quad (3.2)$$

pri čemu vrijedi Eulerova formula odnosno

$$f_p = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f_p(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.3)$$

Konstitutivne jednadžbe za varijablu očvršćivanja i parametar konzistentnosti izvedene u radu **Cvitić i sur. (2008)** definirane su prema izrazima

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}}{\frac{d\kappa}{d\bar{\varepsilon}^p} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) / \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} : \partial f_p / \partial \boldsymbol{\sigma}}{f_y} \right)} \quad (3.4)$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : d\boldsymbol{\varepsilon}}{\frac{d\kappa}{d\bar{\varepsilon}^p} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \partial f_p / \partial \boldsymbol{\sigma}}{f_y} + \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.5)$$

gdje je \mathbf{C}^e tenzor elastičnosti a κ predstavlja zakon očvršćivanja. Razmatranjem prethodnih izraza (3.4) i (3.5), **Cvitić i sur. (2008)** zaključuju da su ove vrijednosti pozitivne kada su ispunjeni uvjeti plastičnog opterećivanja, odnosno ako su funkcije $f_p(\boldsymbol{\sigma})$ i $f_y(\boldsymbol{\sigma})$ pozitivne i ako vrijedi

$$\frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} > 0 \quad (3.6)$$

- **Uvjet nepovrativosti procesa plastične deformacije**

Kako je prikazano u poglavlju 2.3., ako se pretpostavi pridruženo pravilo tečenja, inkrement plastične deformacije usmjeren je na takav način da osigurava pozitivan prirast plastičnog rada što osigurava u konačnici i stabilan plastični tok odnosno osiguran je opis nepovrativosti procesa plastične deformacije. Prema uvjetu nepovrativosti procesa plastične deformacije slijedi da je rad plastičnog deformiranja za sve procese plastičnog opterećivanja pozitivan $\sigma: d\boldsymbol{\varepsilon}^p > 0$. Ako je plastični potencijal homogena funkcija za koju vrijedi Eulerova formula, može se pokazati da za rad plastičnog deformiranja vrijedi

$$\sigma: d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \sigma: \left(\frac{\partial f_p(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = d\lambda f_p > 0 \quad (3.7)$$

S obzirom da se zbog navedenih ograničenja pretpostavljen pozitivan plastični potencijal te da je parametar konzistentnosti pozitivan, slijedi da je rad plastičnog deformiranja uvijek pozitivan kada su ispunjeni uvjeti plastičnog opterećivanja.

- **Uvjet kontinuiteta**

Prema uvjetu kontinuiteta neutralno opterećivanje ne uzrokuje plastičnu deformaciju. S obzirom na navedeno, slijedi da za inkrement deformacije $d\boldsymbol{\sigma}$ u tangencijalnoj ravnini plohe tečenja vrijedi $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0$, odnosno promjene unutarnjih varijabli jednake su nuli. Za slučaj opterećivanja, inkrement naprezanja $d\boldsymbol{\sigma}$ usmjeren je od plohe tečenja pri čemu za inkrement plastične deformacije vrijedi da je različit od nule, odnosno vrijedi $d\boldsymbol{\varepsilon}^p \neq 0$. Za slučaj rasterećivanja, inkrement naprezanja $d\boldsymbol{\sigma}$ usmjeren je unutar plohe tečenja pa vrijedi da je $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0$. Uvjet kontinuiteta osigurava očuvanje kontinuiteta plastične deformacije kada se mijenja stanje opterećivanja. Pri tom za neutralno opterećivanje te elastično rasterećivanje vrijedi

$$df_y = \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^e : d\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \quad (3.8)$$

Pod ovim ograničenjem, slijedi da su promjene unutarnjih varijabli iz izraza (3.4) i (3.5) jednake nuli. Prema tome, za proizvoljnu zatvorenu putanju opterećivanja koje ne uzrokuje promjenu funkcije tečenja, stanje materijala ostaje nepromijenjeno.

- **Jedinstvenost stanja naprezanja**

Iako je jedinstvenost stanja naprezanja zagwarantirana kod pretpostavke o pridruženom pravilu tečenja (**Melan (1938), Hill(1950)**), što je korišteno kao glavno opravdanje kod usvajanja ove pretpostavke, jednakost funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala nije nužna za ostvarivanje jedinstvenosti stanja naprezanja. U radovima **Stoughton (2002), Stoughton i Yoon (2004,2006)** te **Cvitanić (2008)**, zaključeno je da je uvjet jedinstvenosti rješenja zadovoljen korištenjem pretpostavke o pridruženom pravilu bez obzira na izbor funkcije tečenja. Korištenjem pretpostavke o nepridruženom pravilu tečenja kod ortotropnih materijala, ovaj uvjet može biti zadovoljen za određeni odabir funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala. Razmatrana je jedinstvenost stanja naprezanja za procese upravljane promjenom stanja deformacije. Definiranje brzine promjene tenzora naprezanja u ovisnosti o brzini promjene tenzora deformacije nužno je u konstitutivnom zakonu gdje se postavlja zahtjev da je obnovljeno rješenje uzrokovano promjenom deformacije jedinstveno. Za mali dio volumena poznatog stanja naprezanja σ , podvrgnut proizvoljnoj kombinaciji elastičnih i plastičnih deformacija, slijedi da će bilo kakva infinitezimalna promjena ukupne deformacije $d\varepsilon$ rezultirati konačnom promjenom stanja naprezanja $d\sigma$, kako bi se ostvarilo jedinstveno novo stanje naprezanja $\sigma + d\sigma$. S obzirom da svaka promjena ukupne deformacije uzrokuje promjenu naprezanja i promjenu unutarnjih varijabli, jedinstvenost je zagwarantirana samo u slučaju kada je brzina promjene nepoznatih varijabli jedinstvena funkcija poznatih varijabli kao što su trenutno naprezanje te unutarnje varijable koje opisuju povijest deformacije. Za zadani inkrement deformacije, moguća su dva procesa - jedno kao posljedica samo elastične deformacije i drugo kao rezultat kombinacije elasto-plastičnih deformacija.

Dodatnim razmatranjem uvjeta tečenja, kod elastičnog procesa kada se trenutno stanje naprezanja nalazi ispod naprezanja tečenja, brzina promjene naprezanja određena je elastičnim konstitutivnim zakonom dok su brzine promjena unutarnjih varijabli jednake nuli. Kod ovakvog procesa jedinstvenost rješenja je neupitna. Kod plastičnog procesa brzina promjene tenzora naprezanja jedinstveno je određena trenutnim stanjem i brzinom promjene deformacije. Slijedi da se u analiziranim konstitutivnim modelima mogu jedinstveno odrediti promjene svih varijabli stanja pri čemu se numeričkom integracijom u vremenu, za poznato stanje u vremenu t može odrediti novo stanje u vremenu $t + dt$.

4. FUNKCIJE TEČENJA

Način na koji će se opisati anizotropno plastično ponašanje materijala značajno utječe na rezultate simulacija koje predviđaju neki od procesa oblikovanja limova. Polikristalni pristup opisa ponašanja metala razmatra proces deformacije na nivou kristala. Pri opisu anizotropnog ponašanja polikristalni modeli koriste kvantitativni opis kristalne strukture. Za razliku od polikristalnog pristupa, fenomenološki pristup opisuje ponašanje materijala općim matematičkim formulacijama koje su izvedene na temelju teoretskih razmatranja te makroskopskih eksperimentalnih opažanja. U usporedbi s polikristalnim modelima, ovakav pristup ima jednostavniju matematičku formu, omogućuje prikladniju numeričku implementaciju te se može jednostavno prilagoditi različitim materijalima (**Barlat i sur., (1991)**). Korišteni fenomenološki anizotropni elasto-plastični modeli zahtijevaju točan opis početnog oblika anizotropne plohe tečenja kao i promjenu njenog položaja i oblika tijekom procesa deformiranja.

Svaki izotropni uvjet tečenja može se definirati kao funkcija invarijanti tenzora naprezanja. Prve izotropne funkcije tečenja predložili su Tresca (1864) i von Mises (1913). U literaturi se može pronaći veći broj izotropnih funkcija tečenja poput **Bishop i Hill (1951-b)**, **Drucker i Prager (1952)**, **Hershey (1954)**, **Hosford (1972)**, **Bassani (1977)**, **Budianski (1984)**, **Barlat i Richmond (1989)**, **Karafillis i Boyce (1993)** i drugi. Tako na primjer, Drucker-Prager (1950) funkcija tečenja (**Drucker i Prager (1952)**) može opisati tečenje izotropnih materijala koji pokazuju asimetriju naprezanja tečenja, tzv. *strength differential effect*. S druge strane, u radu **Budianski (1984)** predložena je općenita izotropna funkcija tečenja u polarnim koordinatama.

Opći zahtjev kod izvoda anizotropne funkcije tečenja jest da se za izotropno stanje materijala prevodi u izotropnu funkciju tečenja. Poopćavanjem izotropnih uvjeta tečenja, razvile su se anizotropne funkcije tečenja koje se koriste pri opisu ponašanja limova. Za razliku od izotropnog, anizotropan uvjet tečenja ovisan je o izboru referentnog pravca te za cilj ima što točnije opisati orijentacijsku ovisnost naprezanja tečenja i Lankfordova parametra u odnosu na pravac valjanja. U modelima klasične teorije plastičnosti koji se temelje na pridruženom pravilu tečenja, postavlja se zahtjev konveksnosti plohe tečenja. Pri tome su anizotropija u naprezanju tečenja i anizotropija u plastičnom toku opisane parametrima

funkcije tečenja. Kod materijala s izraženim anizotropnim ponašanjem, zahtjeva se složeniji oblik funkcije tečenja koji uključuje i veći broj parametara anizotropije. Napuštanjem ograničenja o jednakosti funkcije tečenja i funkcije plastičnog potencijala, parametrima funkcije tečenja opisuje se anizotropija u naprezanju tečenja a parametrima plastičnog potencijala opisuje se anizotropija plastičnog toka. To će u konačnici rezultirati da se prihvatljiva predviđanja ponašanja materijala mogu dobiti korištenjem jednostavnih funkcija naprezanja s manjim brojem parametara kao funkcije tečenja odnosno kao funkcije plastičnog potencijala. Rezultati polikristalnih modela **Taylor (1938)** i **Bishop i Hill (1951-a)** smatraju se temeljem za razvoj anizotropnih funkcija tečenja. Ovakvim modelima pretpostavlja se jednako stanje deformacije svih zrna agregata čime su zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti ali ne i ravnoteže na granicama zrna. Prema rezultatima ovih modela, osnovne karakteristike funkcije tečenja materijala s plošno centriranom kubnom rešetkom su karakteristični mali polumjeri zakrivljenosti kontura za područje jednoosnog odnosno dvoosnog naprezanja te neeliptičan oblik kontura ploha koji je uvjetovan posmičnim naprezanjem. **Hill (1948-b)** poopćuje izotropni von Mises uvjet i prevodi ga u anizotropnu kvadratičnu Hill (1948) funkciju tečenja. Međutim, pokazalo se da kvadratična funkcija nije u mogućnosti dovoljno dobro opisati karakteristično ponašanje koje je uočeno kod nekih aluminijskih legura (**Woodthorpe i Pearce (1970)**). Kao rezultat toga, različitim modifikacijama nad izotropnim uvjetima, brojni autori nastavili su razvijati nekvadratične anizotropne funkcije tečenja kojima se nastojalo što točnije opisati anizotropno ponašanje različitih materijala, **Hosford (1979)**, **Barlat i Lian (1989)**, **Barlat i sur. (1991)**, **Karafillis i Boyce (1993)**, **Barlat i sur. (1997)**, **Wu (2002)**, **Barlat i sur., (2003)**, **Bron i Besson (2004)**, **Barlat i sur. (2005)**, **Cazacu i Barlat (2004)**, **Aretz (2004,2005)**, **Stoughton i Yoon (2004)**, **Banabic i sur. (2005)**, **Cazacu i sur. (2006)**, **Comsa i Banabic (2008)**, a od najnovijih **Aretz i Barlat (2012)**, **Lee i sur. (2017)** te **Cazacu (2018)**. Važno je istaknuti kako su **Karafillis i Boyce (1993)**, koristeći pristup s tenzorom naprezanja pridruženom ekvivalentnom izotropnom stanju naprezanja, usmjerili mnoge autore pri razvoju anizotropnih funkcija tečenja. Modifikacijom **Hershey (1952)** odnosno **Hosford (1972)** izotropnog uvjeta tečenja te usvajanjem prednosti prethodno razvijenih funkcija (**Barlat i Lian (1989)**, **Barlat i sur. (1997)**), **Barlat i sur. (2003)** predlažu 16-parametarsku Yld2000-2d funkcija tečenja koja daje jako dobre rezultate u predviđanju postupaka oblikovanja limova. S ciljem uvođenja većeg broja anizotropnih parametara, **Bron i Besson (2004)** te **Barlat i sur. (2005)** razvijaju funkcije tečenja za troosno

stanje naprezanja. **Comsa i Banabic (2008)** predlažu BBC2008 funkciju koja opcionalno može imati još složeniji oblik od prethodno spomenutih funkcija, stoga zahtjeva još veći broj eksperimentalnih podataka za kalibraciju parametara anizotropije. Modifikacijom izotropnog Drucker-Prager (1950) uvjeta tečenja, **Stoughton i Yoon (2004)** razvijaju asimetričnu anizotropnu funkciju s komponentom kojom se iskazuje utjecaj hidrostatičkog naprezanja na tečenje materijala. **Cazacu i Barlat (2004)** predlažu anizotropnu funkciju tečenja koja također uzima u obzir asimetriju naprezanja tečenja. U najnovije vrijeme, **Aretz i Barlat (2013)** predlažu dvije funkcije, Yld2011-18p i Yld2011-27p, koje sadrže 18 odnosno 27 parametara anizotropije. Autori su zaključili da su funkcije izrazito fleksibilne, bezuvjetno konveksne te su prikladne za numeričku implementaciju. Funkcije su prikladne za opis problema koji uključuju troosno stanje naprezanja, no jednostavno se mogu reducirati i na ravninsko stanje naprezanja. **Lee i sur. (2017)** predlažu funkciju tečenja koja objedinjuje kvadratičnu i nekvadratičnu funkciju s ciljem točnijeg opisa anizotropnog očvršćivanja odnosno opisa razvoja plohe tečenja s napredovanjem plastične deformacije. Osim ovdje spomenutih, u literaturi su dostupni i neki drugi uvjeti tečenja kao što su različite polinomne funkcije **Hill (1950), Gotoh (1977), Hu (2003), Soare i sur. (2008)** itd. U nastavku ovog poglavlja opisane su neke od izotropnih i anizotropnih funkcija tečenja dostupne u literaturi.

4.1. Izotropne funkcije tečenja

4.1.1. Tresca (1864)

Tresca je 1864. godine predstavio uvjet plastičnog tečenja poznat kao hipoteza posmičnih naprezanja, prema kojem plastična deformacija nastaje kad maksimalno posmično naprezanje τ_{max} postigne kritičnu vrijednost κ . Matematički se to može zapisati kao

$$\begin{aligned} \tau_{max} < \kappa & \quad - \text{elastična deformacija} \\ \tau_{max} = \kappa & \quad - \text{plastična deformacija} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Na temelju analize Mohrovih kružnica naprezanja, za troosno stanje naprezanja Tresca uvjet tečenja može se zapisati kao

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \kappa \quad (4.2)$$

gdje su σ_1 , σ_2 i σ_3 glavna naprezanja, σ_{min} i σ_{max} su minimalno odnosno maksimalno glavno naprezanje dok κ predstavlja kritičnu vrijednost svojstvenu materijalu. U prostoru naprezanja, Tresca ploha tečenja je pravilna šesterostrana prizma koja u presjeku s devijatorskom ravninom daje pravilan heksagon prikazan na slici 4.1.a. Za ravninsko stanje naprezanja ($\sigma_3 = 0$), uvjet (4.2) svodi se na

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2\kappa; \quad \sigma_1 = \pm 2\kappa; \quad \sigma_2 = \pm 2\kappa \quad (4.3)$$

Uvjet tečenja prema izrazu (4.3) prikazan je na slici 4.1.b heksagonom u ravnini $\sigma_1 - \sigma_2$. Konstanta κ može se odrediti na temelju naprezanja tečenja σ_y u pokusu jednoosnog rastezanja gdje vrijedi $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Prema izrazu (4.2), slijedi

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{2} \quad (4.4)$$

Također, konstanta κ može se odrediti na temelju naprezanja tečenja τ_y u pokusu čistog smicanja gdje je $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_y$ odnosno $\sigma_2 = 0$, pa iz izraza (4.2) slijedi

$$\kappa = \tau_y \quad (4.5)$$

Usporedbom izraza (4.4) i (4.5), slijedi

$$\kappa = \tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \quad (4.6)$$

te se može zaključiti da je prema ovom uvjetu naprezanje tečenja pri jednoosnom rastezanju dva puta veće od naprezanja tečenja pri čistom smicanju.

4.1.2. von Mises (1913)

Drugi po redu uvjet tečenja predstavili su **Huber (1904)** i neovisno o njemu von Mises 1913. godine. Prema ovom često korištenom uvjetu, tečenje materijala nastupa kada druga invarijanta devijatorskog dijela tenzora naprezanja J'_2 postigne kritičnu vrijednost κ^2 koja predstavlja svojstvo materijala

$$J'_2 < \kappa^2 \quad - \text{elastična deformacija} \quad (4.7)$$

$$J'_2 = \kappa^2 \quad - \text{plastična deformacija} \quad (4.8)$$

Neposredno nakon Hubera i Tresce, Henckey je 1924. godine u svojim radovima interpretirao isti kriterij na način da tečenje materijala nastupa kada gustoća distorzijske energije postigne

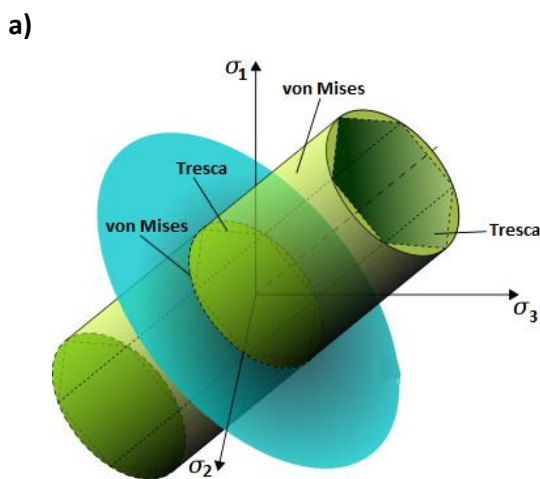
kritičnu vrijednost, **Henckey (1924)**, stoga se nerijetko von Mises uvjet tečenja naziva i *Huber-Mises-Henckey* uvjet tečenja. Za troosno stanje naprezanja može se zapisati u obliku

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \kappa^2 \quad (4.9)$$

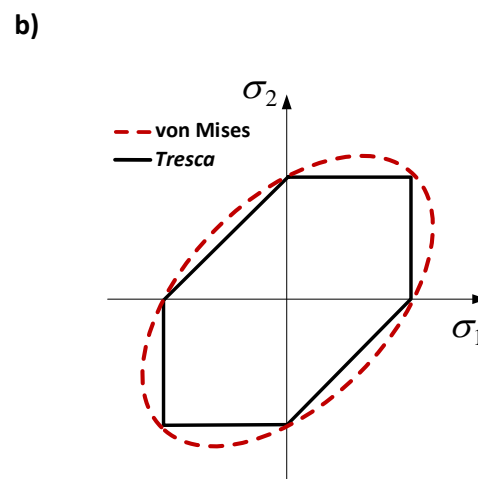
Prema von Mises uvjetu, ploha tečenja u prostoru glavnih naprezanja predstavlja cilindar opisan pravilnom heksagonu Tresca uvjeta tečenja kako je prikazano na slici 4.1.a. Za ravninsko stanje naprezanja izraz (4.9) svodi se na

$$\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3\kappa^2 \quad (4.10)$$

Izraz (4.10) u ravnini $\sigma_1 - \sigma_2$ predstavljena je elipsom koja je opisana heksagonu proizašlom iz Tresca uvjeta tečenja kako je prikazano na slici 4.1.b.



Slika 4.1. von Mises i Tresca uvjet tečenja u prostoru naprezanja



Slika 4.1. von Mises i Tresca uvjet tečenja za ravninsko stanje naprezanja

Slično kao i kod Tresca uvjeta tečenja, konstanta κ može se odrediti na temelju naprezanja tečenja σ_y u pokusu jednoosnog rastezanja ili na temelju naprezanja tečenja τ_y u pokusu čistog smicanja. Iz jednostavnog pokusa rastezanja gdje vrijedi $\sigma_1 = \sigma_y$ odnosno $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ te uvrštavanjem navedenih vrijednosti naprezanja u jednadžbu (4.9), konstanta κ iznosi

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (4.11)$$

Nadalje, ukoliko se konstanta κ određuje iz pokusa čistog smicanja, vrijedi $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_y$ odnosno $\sigma_2 = 0$. Uvrštavanjem vrijednosti naprezanja u jednadžbu (4.9) dobije se

$$\kappa = \tau_y \quad (4.12)$$

Konačno, može se zapisati da vrijedi

$$\kappa = \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (4.13)$$

iz čega je vidljivo da je prema von Mises uvjetu naprezanje tečenja u jednoosnom pokusu razvlačenja $\sqrt{3}$ puta veće od naprezanja tečenja u pokusu čistog smicanja.

4.1.3. Hershey (1954) i Hosford(1972)

Nekvadratičnu izotropnu funkciju tečenja neovisno predstavljaju **Hershey (1954)** i **Hosford (1972)** u obliku

$$f_y = |s_1 - s_2|^m + |s_2 - s_3|^m + |s_3 - s_1|^m = 2\sigma_y^m \quad (4.14)$$

gdje su s_1 , s_2 i s_3 svojstvene vrijednosti devijatorskog dijela tenzora naprezanja a m eksponent ovisan o kristalnoj strukturi materijala. Vrijednosti eksponenta $m = 6$ odnosno $m = 8$ prikladni su za materijale s prostorno odnosno plošno centriranom kubnom rešetkom. Varijacijom eksponenta m , Hershey-Hosford ploha tečenja nalazi se u prostoru naprezanja između Tresca uvjeta i von Mises uvjeta tečenja. Za vrijednost eksponenta $m = 2$, Hershey-Hosford uvjet tečenja prevodi se u von-Mises uvjet dok se za vrijednosti eksponenta $m = 1$ odnosno $m \rightarrow \infty$ prevodi u Tresca uvjet tečenja.

4.1.4. Bassani (1977)

Bassani (1977) je predložio izotropnu funkciju tečenja oblika

$$f_y = \left| \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_b} \right|^n + \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\tau} \right|^m = 1 \quad (4.15)$$

gdje su σ_1 i σ_2 glavna naprezanja, τ predstavlja naprezanje tečenja u pokusu čistog smicanja, σ_b je vrijednost ujednačenog dvoosnog naprezanja tečenja, dok je konveksnost ispunjena ako za eksponente n i m vrijedi: $n \geq 1$, $m \geq 1$. Zaključio je da uvjet iz izraza (4.15) dobro aproksimira plohe tečenja dobivene prema **Bishop i Hill (1951-a)** polikristalnom modelu.

4.1.5. Yld86

Modifikacijom Hershey-Hosford uvjeta tečenja, **Barlat i Richmond (1987)** predlažu *Yld86*, tzv. "trokomponentnu" izotropnu funkciju tečenja za ravninsko stanje naprezanja koja je funkcija komponente posmičnog naprezanja. Zamjenom glavnih naprezanja u izrazu (4.14) s invarijantama devijatorskog dijela tenzora naprezanja K_1 i K_2 , slijedi

$$f_y = |K_1 - K_2|^m + |K_1 + K_2|^m + |2K_2|^m = 2\sigma_y^m \quad (4.16)$$

gdje su

$$K_1 = \frac{s_{xx} + s_{yy}}{2}; \quad K_2 = \sqrt{\left(\frac{s_{xx} - s_{yy}}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (4.17)$$

U slučaju kada je komponenta posmičnog naprezanja jednaka nuli, izraz (4.16) se prevodi u Hershey-Hosford uvjet tečenja. **Barlat i Richmond (1987)** su pokazali da predloženi uvjet tečenja daje predviđanja koja se dobro slažu s predviđanjima polikristalnih modela za metale s plošno centriranom kubnom rešetkom.

4.1.6. Karafillis-Boyce (1993)

Za izotropan materijal u prostoru naprezanja postoje granice tečenja koje mogu biti izvedene zadovoljavanjem uvjeta simetrije i konveksnosti funkcije tečenja. Donja granica tečenja predstavlja stanja za koja je postignuta kritična vrijednost maksimalnog posmičnog naprezanja odnosno predstavlja Tresca uvjet tečenja. Donja granica tečenja je heksagon upisan a gornja granica tečenja heksagon opisan nad kružnicom koja je presjek plohe von Misesovog uvjeta tečenja s devijatorskom ravninom. Karafillis i Boyce 1993. godine predlažu izotropan uvjet tečenja kao linearnu kombinaciju dviju konveksnih nekvadratičnih funkcija φ_1 i φ_2 , (**Karafillis i Boyce, (1993)**). Funkcija φ_1 predstavlja Hershey-Hosford uvjet tečenja iz izraza (4.14) za koji ploha tečenja u prostoru naprezanja leži između donje granice tečenja i von Mises uvjeta, kao što je prikazano na slici 4.2.a, dok je funkcija φ_2 definirana prema izrazu

$$\varphi_2 = \frac{3^m}{2^{m-1} + 1} (|s_1|^m + |s_2|^m + |s_3|^m) = 2\sigma_y^m \quad (4.18)$$

Parametar m , kao i kod Hershey-Hosford uvjeta tečenja, može se dovesti u vezu s kristalnom strukturom materijala. Kao što je prikazano na slici 4.2.b., za vrijednosti parametra $m = 2$,

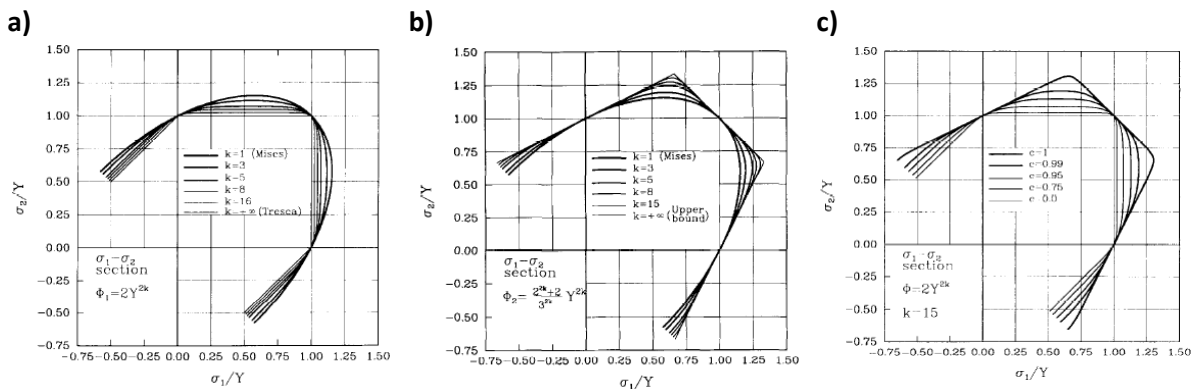
izraz (4.18) prevodi se u von Mises uvjet, a kad m teži u ∞ izraz se prevodi u gornju granicu tečenja. Izotropan Karafillis-Boyce (1993) uvjet za koji će ploha tečenja, u ovisnosti o vrijednosti parametra m , u prostoru naprezanja ležati između donje i gornje granice tečenja glasi

$$f_y = (1 - c)\varphi_1 + c\varphi_2 = 2\sigma_y^m \quad (4.19)$$

odnosno nakon uvrštavanja slijedi

$$f_y = (1 - c)(|s_1 - s_2|^m + |s_2 - s_3|^m + |s_3 - s_1|^m) + c \left(\frac{3^m}{2^{m-1} + 1} (|s_1|^m + |s_2|^m + |s_3|^m) \right) = 2\sigma_y^m \quad (4.20)$$

gdje c predstavlja parametar udjela funkcija φ_1 i φ_2 , $c \in [0,1]$. Različite izotropne Karafillis-Boyce (1993) plohe tečenja dobivene varijacijom vrijednosti parametara c i m a koje leže između gornje i donje granice tečenja prikazane su na slici 4.2.c.



Slika 4.2. Izotropne funkcije koje leže između: **a)** donje granice i von Mises uvjeta tečenja;

b) von Mises uvjeta i gornje granice tečenja; **c)** donje i gornje granice tečenja.

(Karafillis i Boyce, (1993)).

4.2. Anizotropne funkcije tečenja

4.2.1. Hill (1948)

Jedan od prvih fenomenoloških anizotropnih uvjeta tečenja prikladan za limove te ujedno i jedan od najčešće korištenih zbog svoje jednostavnosti je kvadratičan Hill (1948) uvjet

tečenja (**Hill (1948-b)**), nastao je poopćenjem Huber-Mises-Henckey uvjeta tečenja. Hill (1948) uvjet tečenja može se zapisati u obliku

$$\sigma_y^2 = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (4.21)$$

gdje su F, G, H, L, M i N parametri anizotropije, σ_y naprezanje tečenja za referenti pravac dok x, y i z označavaju pravce materijalne simetrije. Za ravninsko stanje naprezanja, izraz (4.21) prevodi se u

$$\sigma_y^2 = (G + H)\sigma_{xx}^2 + (H + F)\sigma_{yy}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2N\sigma_{xy}^2 \quad (4.22)$$

Parametri funkcije tečenja F, G, H i N iz izraza (4.22) mogu se odrediti na temelju skupa vrijednosti $(\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b)$, gdje su $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ vrijednosti naprezanja tečenja za uzorke orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° u odnosu na pravac valjanja dok je σ_b vrijednost ujednačenog dvoosnog naprezanja tečenja ($\sigma_b = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = 0$). Također, parametri se mogu odrediti i na temelju vrijednosti Lankfordova parametra za orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° u odnosu na pravac valjanja te vrijednosti naprezanja tečenja za pravac valjanja $(\sigma_0, r_0, r_{45}, r_{90})$. Zbog jednostavnosti, Hill (1948) uvjet tečenja za ravninsko stanje naprezanja često se koristi u obliku

$$\sigma_y = \sqrt{\lambda_1 \sigma_{xx}^2 + \lambda_2 \sigma_{yy}^2 - 2\nu \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2\rho \sigma_{xy}^2} \quad (4.23)$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \nu$ i ρ parametri koji opisuju anizotropno ponašanje materijala te vrijedi

$$\lambda_1 = G + H; \quad \lambda_2 = H + F; \quad \nu = H; \quad \rho = N \quad (4.24)$$

U konstitutivnom modelu temeljenom na nepridruženom pravilu tečenja, anizotropna Hill (1948) funkcija kalibrirana na temelju naprezanja tečenja može se koristiti kao funkcija tečenja a Hill (1948) funkcija kalibrirana na temelju Lankfordova parametra kao plastični potencijal. Parametri Hill (1948) funkcije tečenja, kalibrirani na temelju vrijednosti $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ i σ_b , mogu se izračunati eksplicitno prema izrazima

$$\lambda_{1y} = 1; \quad \lambda_{2y} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2; \quad \nu_y = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2\right); \quad \rho_y = 2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{45}}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2 \quad (4.25)$$

Izrazi za parametre Hill(1948) plastičnog potencijala kalibrirane na temelju vrijednosti σ_0, r_0, r_{45} i r_{90} glase

$$\lambda_{1p} = 1; \lambda_{2p} = \frac{1 + 1/r_{90}}{1 + 1/r_0}; \nu_p = \frac{1}{1 + 1/r_0}; \rho_p = \frac{(1 + 2r_{45})(1/r_0 + 1/r_{90})}{2(1 + 1/r_0)} \quad (4.26)$$

Ako se koristi pridruženo pravilo tečenja, parametri funkcije tečenja/plastičnog potencijala mogu biti određeni na temelju vrijednosti $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ i σ_b ili na temelju vrijednosti σ_0, r_0, r_{45} i r_{90} . Konačni izrazi kojima se može odrediti ovisnost Lankfordova parametra r_θ i vrijednosti naprezanja tečenja σ_θ za proizvoljnu orijentaciju θ u odnosu na pravac valjanja, glase

$$r_\theta = \frac{\nu + (2\rho - \lambda_2 - \lambda_1 - 2\nu)\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\lambda_2 - \nu)\sin^2\theta + (1 - \nu)\cos^2\theta} \quad (4.27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\lambda_1 \cos^4\theta + \lambda_2 \sin^4\theta + 2(\rho - \nu)\sin^2\theta\cos^2\theta}} \quad (4.28)$$

gdje parametri anizotropije $\lambda_1, \lambda_2, \nu$ i ρ predstavljaju parametre funkcije tečenja i/ili plastičnog potencijala. Ako se uzme u obzir pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja, izjednačavanjem izraza (4.25) i (4.26) veza između normaliziranih naprezanja tečenja i Lankfordovih parametara može se zapisati prema izrazima (**Safaei (2013-a), Banabic (2000)**)

$$\left(\frac{\sigma_{90}}{\sigma_0}\right)^2 = \frac{r_{90}(1 + r_0)}{r_0(1 + r_{90})} \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{\sigma_{45}}{\sigma_0}\right)^2 = \frac{2r_{90}(1 + r_0)}{(r_{90} + r_0)(1 + r_{45})} \quad (4.30)$$

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_0}\right)^2 = \frac{r_{90}(1 + r_0)}{r_0 + r_{90}} \quad (4.31)$$

Prema izrazu (4.29) slijedi

$$r_0 > r_{90} \rightarrow \sigma_0 > \sigma_{90} \quad (4.32a)$$

$$r_0 < r_{90} \rightarrow \sigma_0 < \sigma_{90} \quad (4.32b)$$

Također, ako su pravci materijalne simetrije koaksijalni s pravcima glavnih naprezanja uz pretpostavku da stanje odgovara stanju tzv. normalne anizotropije $r_0 = r_{45} = r_{90} \neq 1$, vrijednost parametra normalne anizotropije biti će manja od jedan, pa iz izraza (4.31) slijedi

$$\bar{r} < 1 \rightarrow \sigma_b < \sigma_0 \quad (4.33)$$

Na temelju eksperimentalnih rezultata, **Woodthorpe i Pearce (1970)** su prvi zaključili da nejednakost (4.33) nije ispunjena kod limova nekih aluminijskih legura. Hill (1948) funkcija jedna je od rijetko dostupnih anizotropnih funkcija tečenja u komercijalnim programima za analizu konačnim elementima. Međutim, unatoč prednostima i jednostavnosti kvadratičan uvjet tečenja nije prikladan za opis ponašanja materijala koji ne zadovoljavaju odnose prema

izrazima (4.32a), (4.32b) i (4.33), stoga su u literaturi predloženi mnogobrojni nekvadratični uvjeti tečenja.

4.2.2. Hill (1979)

S ciljem opisa ponašanja materijala koji ne zadovoljavaju odnos prema izrazu (4.33), **Hill (1979)** predlaže nekvadratični uvjet tečenja uz pretpostavku da se pravci glavnih naprezanja podudaraju s osima materijalne simetrije

$$\begin{aligned} \sigma_y^m = & F|\sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + G|\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|^m + H|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m \\ & + A|2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + B|2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}|^m + C|2\sigma_{zz} - \sigma_{yy} - \sigma_{xx}|^m \end{aligned} \quad (4.34)$$

gdje su F, G, H, A, B i C parametri anizotropije a m necjelobrojni eksponent. Eksponent m može se odrediti iz nelinearne veze kada se pretpostavi dvoosno stanje naprezanja ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_b$; $\sigma_{zz} = 0$) tako da se izraz (4.34) prevede u (**Banabic (2000)**)

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_0}\right)^m = \frac{1}{2}(1 + \bar{r}) \left(1 + \frac{(2^{m-1} - 2)(A - C)}{A + C2^{m-1} + F}\right) \quad (4.35)$$

Autor je pokazao da postoji više kombinacija parametara kojima se može opisati odstupanje u odnosu prema izrazu (4.33). Tako npr. za uvjete kada je $A = B = C$ te $m = 2$ te kada vrijedi $F = G = H = 0$, moguće je opisati ponašanje koje ne zadovoljava odnos iz izraza (4.33). Također, jedan od najčešće korištenih oblika za stanje normalne anizotropije kada se usvoji da vrijedi $A = B = F = G = 0$ glasi

$$\sigma_y^m = \frac{1}{2(1 + \bar{r})} |\sigma_{xx} + \sigma_{yy}|^m + \frac{(1 + 2\bar{r})}{2(1 + \bar{r})} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m \quad (4.36)$$

pri čemu se izraz (4.35) prevodi u

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_0}\right)^2 = \frac{(1 + \bar{r})}{2^{m-1}} \quad (4.37)$$

Vrijednost eksponenta m može se izračunati na temelju eksperimentalnih podataka σ_0 , σ_b i \bar{r} . Unatoč tome što je jednostavniji od Hill (1948) uvjeta i što se može opisati ponašanje materijala uočeno u eksperimentima **Woodthorpea i Pearcea (1970)**, Hill (1979) uvjet tečenja ne uključuje posmična naprezanja a zbog necjelobrojnog eksponenta m , zahtjeva numerički postupak. Također, Hill (1979) uvjetom tečenja ne mogu se opisati odstupanja u ponašanju materijala prema odnosima u izrazima (4.32a) i (4.32b), a postoje i odstupanja

plohe tečenja određene Hill (1979) uvjetom tečenja od plohe tečenja određene polikristalnim modelom **Bishopa i Hilla (1951-a)**.

4.2.3. Hosford (1979)

Hosford (1979) poopćuje svoj izotropni uvjet tečenja iz 1972. godine (4.14), te neovisno o Hillu, predlaže anizotropni uvjet tečenja

$$\sigma_y^m = F|\sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + G|\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|^m + H|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m \quad (4.38)$$

gdje su F, G i H materijalni parametri a σ_y naprezanje tečenja za referenti pravac. Vrijednost eksponenta m povezana je s kristalnom strukturom materijala kao i kod izotropnog uvjeta tečenja (4.14). Glavna prednost ovog uvjeta tečenja je što varijacijom eksponenta m dobro aproksimira plohe tečenja određene polikristalnim modelom **Bishop i Hill (1951-a)**. S druge strane, za razliku od Hill (1979) uvjeta tečenja (4.34), ne uključuje doprinose devijatorskih naprezanja i ne uzima u obzir posmična naprezanja što rezultira nemogućnošću opisa ravninske anizotropije odnosno opisa orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra i naprezanja tečenja.

4.2.4. Yld89

Modifikacijom izotropnog Hershey – Hosford uvjeta tečenja (4.14) a na tragu izotropnog uvjeta tečenja Yld86 (**Barlat i Richmond (1987)**), 1989. godine **Barlat i Lian (1989)** predlažu ortotropan Yld89 uvjet tečenja za ravninsko stanje naprezanja

$$2\sigma_y^m = A|K_1 - K_2|^m + A|K_1 + K_2|^m + C|2K_2|^m \quad (4.39)$$

gdje su

$$K_1 = \frac{\sigma_{xx} + H\sigma_{yy}}{2}; \quad K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - H\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + P^2\sigma_{xy}^2} \quad (4.40)$$

pri čemu su $A, C = 2 - A, P$ i H materijalni parametri, σ_y je naprezanje tečenja za referenti pravac dok se vrijednost eksponenta m može dovesti u vezu s kristalnom strukturom materijala. Identifikacija parametara A, C, P i H vrši se prema izrazima (**Barlat i Lian (1989)**)

$$A = \frac{2 \left(\frac{\sigma_0}{\tau_{s2}} \right)^m - 2 \left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^m}{1 + \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^m - \left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \right)^m}; \quad P = \frac{\sigma_0}{\tau_{s1}} \left(\frac{2}{2A + 2^m C} \right)^{\frac{1}{m}}; \quad H = \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} \quad (4.41)$$

gdje su τ_{s1} i τ_{s2} dva neovisna posmična naprezanja tečenja određena u različitim testovima: $(\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = 0, \sigma_{xy} = \tau_{s1})$ odnosno $(\tau_{s2} = \sigma_{xx}, \tau_{s2} = -\sigma_{yy}, \sigma_{xy} = 0)$. Također, identifikacija parametara A, C i H može se vršiti i na temelju vrijednosti Lankfordova parametra r_0 i r_{90} prema izrazima

$$A = 2 - C = 2 - 2 \sqrt{\frac{r_0}{1+r_0} \cdot \frac{r_{90}}{1+r_{90}}}; \quad H = \sqrt{\frac{r_0}{1+r_0} \cdot \frac{1+r_{90}}{r_{90}}} \quad (4.42)$$

pri čemu se vrijednost parametra P određuje koristeći neki od postojećih numeričkih postupaka ili iz jednadžbe (4.41). Prednost Yld89 uvjeta tečenja jest što, za razliku od Hershey-Hosford ili Yld86 uvjeta tečenja, uzima u obzir posmična naprezanja koja utječu na oblik konture tečenja u skladu s rezultatima polikristalnih modela te može opisati orijentacijsku ovisnosti Lankfordova parametra i naprezanja tečenja dok je glavni nedostatak poteškoća pri određivanju parametra P .

4.2.5. Hill (1990)

Hill izvodi poopćenje svog uvjeta iz 1979. godine koji za ravninsko stanje naprezanja glasi **(Hill (1990))**

$$(2\sigma_b)^m = |\sigma_{xx} + \sigma_{yy}|^m + \left(\frac{\sigma_b}{\tau_y} \right)^m \left| (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right|^{\frac{m}{2}} \quad (4.43)$$

$$+ |\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 2\sigma_{xy}^2|^{\left(\frac{m}{2}-1\right)} \left(B(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 2A(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2) \right)$$

pri čemu je σ_b ujednačeno dvoosno naprezanje tečenja τ_y naprezanje tečenja u testu čistog smicanja. Parametar m računa se prema izrazu

$$\left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_{45}} \right)^m = 2(1 + r_{45}) \quad (4.44)$$

dok se parametri A i B računaju na temelju vrijednosti naprezanja tečenja $(\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b)$ ili Lankfordova parametra (r_0, r_{45}, r_{90}) prema izrazima

$$A = \frac{1}{4} \left| \left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_{90}} \right)^m - \left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_0} \right)^m \right|; \quad B = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_0} \right)^m + \left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_{90}} \right)^m \right) - \left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_{45}} \right)^m \quad (4.45)$$

odnosno

$$A = \frac{(r_0 - r_{90})(1 - 0.5(m - 2)r_{45})}{(r_0 + r_{90}) - (m - 2)r_0r_{90}}; \quad B = \frac{m(2r_0r_{90} - r_{45}(r_0 + r_{90}))}{(r_0 + r_{90}) - (m - 2)r_0r_{90}} \quad (4.46)$$

gdje je $A \geq 0$ dok B može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti. Uz zadržavanje prednosti koje je imao i Hill (1979) uvjet tečenja, Hill (1990) uvjet uključuje posmična naprezanja. Također, **Lin i Ding, (1996)** su, na primjeru aluminijske legure Al 1100, pokazali kako ovaj uvjet tečenja ostvaruje dobru aproksimaciju rezultata polikristalnih modela a znatno bolja aproksimacija ostvarena je s plohom tečenja za koju su parametri A i B izračunati na temelju vrijednosti naprezanja tečenja prema izrazu (4.45). Autori su zaključili da su potrebne dodatne modifikacije Hill (1990) uvjeta tečenja u svrhu pojednostavljenja izraza.

4.2.6. Yld91

1991. godine, modifikacijom izotropnog Hershey-Hosford uvjeta tečenja zapisanog u funkciji komponenti tenzora naprezanja (4.14), **Barlat i sur. (1991)** predlažu ortotropan uvjet tečenja za troosno stanje naprezanja, tzv. *Yld91* uvjet tečenja. Glavna devijatorska naprezanja (s_1, s_2, s_3) mogu se zapisati korištenjem Bishop-Hill zapisa za devijatorski dio tenzora naprezanja

$$s = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C - B}{3} & H & G \\ H & \frac{A - C}{3} & F \\ G & F & \frac{B - A}{3} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Prema **Barlatu i sur. (1991)**, drugi oblik izotropnog uvjeta tečenja (4.14) prikazan je s

$$2\sigma_y^m = (3J_2)^{\frac{m}{2}} \left(\left| 2\cos\left(\frac{2\theta + \pi}{6}\right) \right|^m + \left| 2\cos\left(\frac{2\theta - 3\pi}{6}\right) \right|^m + \left| -2\cos\left(\frac{2\theta + 5\pi}{6}\right) \right|^m \right) \quad (4.48)$$

gdje je

$$\theta = \arccos(J_3/3J_2^{3/2}) \quad (4.49)$$

a druga odnosno treća invarijanta tenzora naprezanja, J_2 i J_3 , mogu se zapisati kao

$$J_2 = \frac{F^2 + G^2 + H^2}{3} + \frac{(A - C)^2 + (C - B)^2 + (B - A)^2}{54} \quad (4.50)$$

$$J_3 = \frac{(C - B)(A - C)(B - A)}{54} + FGH - \frac{(C - B)F^2 + (A - C)G^2 + (B - A)H^2}{6} \quad (4.51)$$

Navedena izotropna funkcija tečenja (4.48) može se poopćiti na način se anizotropno ponašanje opiše uvođenjem parametara anizotropije a, b, c, f, g i h , pri čemu izrazi (4.50) i (4.51) prelaze u

$$J_2 = \frac{(fF)^2 + (gG)^2 + (hH)^2}{3} + \frac{(aA - cC)^2 + (cC - bB)^2 + (bB - aA)^2}{54} \quad (4.52)$$

$$J_3 = \frac{(cC - bB)(aA - cC)(bB - aA)}{54} + fFgGhH - \frac{(cC - bB)(fF)^2 + (aA - cC)(gG)^2 + (bB - aA)h(hH)^2}{6} \quad (4.53)$$

Parametri anizotropije mogu se odrediti na temelju tri vrijednosti naprezanja tečenja u testu čistog smicanja (f, g, h) te na temelju tri vrijednosti naprezanja tečenja u testu jednoosnog razvlačenja (a, b, c). Za ravninsko stanje naprezanja, potreban broj parametara svodi se na četiri (a, b, c, h) a isti se mogu odrediti na temelju četiri podatka, ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$) ili ($\sigma_0, r_0, r_{45}, r_{90}$). Vrijednost eksponenta m pretpostavlja se kao i kod Hershey-Hosford uvjeta tečenja (4.14). Ako se vrijednosti svih parametara anizotropije pretpostave da su jednake jedan, $a = b = c = f = g = h = 1$, uvjet se svodi na izotropan. Može se pokazati da je $Yld91$ funkcija tečenja poseban oblik ortotropne Karafillis-Boyce (1993) funkcije tečenja koja će biti objašnjena u poglavlju 4.2.8. Prednost $Yld91$ funkcije jest to što je općenita, ima mogućnost opisa ravninske anizotropije, uključuje posmična naprezanja, dobro aproksimira rezultate polikristalnih modela no zbog složenog zapisa uglavnom se izbjegava.

4.2.7. Hill (1993)

Da bi se u obzir uzeo i opis ponašanja materijala koja ne zadovoljavaju odnose iz izraza (4.32a) odnosno (4.32b), Hill proširuje uvjet tečenja iz 1979. godine u obliku **(Hill (1993))**

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}\right)^2 - C \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_0\sigma_{90}} + \left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{90}}\right)^2 + \left((P+Q) - \frac{(P\sigma_{xx} + Q\sigma_{yy})}{\sigma_b} \right) \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_0\sigma_{90}} = 1 \quad (4.54)$$

gdje su C, P i Q materijalni parametri određeni prema izrazima

$$C = \sigma_0\sigma_{90} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_{90}^2} - \frac{1}{\sigma_b^2} \right) \quad (4.55)$$

$$P = \left(\frac{2r_0(\sigma_b - \sigma_{90})}{(1+r_0)\sigma_0^2} - \frac{2r_{90}\sigma_b}{(1+r_{90})\sigma_{90}^2} + \frac{C}{\sigma_0} \right) \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_{90}} - \frac{1}{\sigma_b}} \quad (4.56)$$

$$Q = \left(\frac{2r_{90}(\sigma_b - \sigma_{90})}{(1+r_{90})\sigma_{90}^2} - \frac{2r_0\sigma_b}{(1+r_0)\sigma_0^2} + \frac{C}{\sigma_{90}} \right) \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_{90}} - \frac{1}{\sigma_b}} \quad (4.57)$$

Uvjet je razvijen za ravninsko stanje naprezanja a kalibracija parametara vrši se na temelju pet podataka $r_0, r_{90}, \sigma_0, \sigma_{90}$ i σ_b koji se mogu dobiti iz jednoosnog testa rastezanja kao i ujednačenog dvoosnog testa razvlačenja. Unatoč tome što može opisati nepravilna ponašanja materijala, Hill (1993) uvjet tečenja ne uključuje posmična naprezanja te ne može opisati ravninsku anizotropiju a plohe tečenja znatno odstupaju od ploha tečenja dobivenih polikristalnim modelima Bishopa i Hilla.

4.2.8. Karafillis-Boyce (1993)

Primjenom matematičkih transformacija nad izotropnim Karafillis-Boyce (1993) uvjetom tečenja iz izraza (4.20), **Karafillis i Boyce (1993)** predlažu anizotropni uvjet tečenja

$$2\sigma_y^m = \left[\frac{(1-c)}{2} (|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2|^m + |\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3|^m + |\tilde{s}_3 - \tilde{s}_1|^m) + c \frac{3^m}{2(2^{m-1} + 1)} (|\tilde{s}_1|^m + |\tilde{s}_2|^m + |\tilde{s}_3|^m) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.58)$$

gdje su \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 i \tilde{s}_3 glavna naprezanja tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{s}}$ pridružena tzv. ekvivalentnom izotropnom stanju materijala, c je faktor udjela funkcija a m eksponent koji se može dovesti u vezu s kristalnom strukturom materijala. Komponente tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{s}}$ izvedene su linearnom transformacijom Cauchyeva tenzora naprezanja te za troosno stanje naprezanja ortotropnog materijala vrijedi

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{yy} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{xz} \\ \tilde{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

pri čemu su

$$\beta_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{2}; \quad \beta_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 - 1)}{2}; \quad \beta_3 = \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{2} \quad (4.60)$$

U gornjim izrazima parametri $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i C opisuju anizotropno ponašanje materijala. Za izotropan materijal, parametri iznose $C = 2/3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ te $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 3/2$. Za ravninsko stanje naprezanja, komponente tenzora naprezanja svode se na

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{yy} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

pri čemu se glavna naprezanja tenzora naprezanja $\tilde{\sigma}$ mogu se odrediti prema izrazima

$$\tilde{\sigma}_{1,2} = \frac{(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{yy})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy})}{2}\right)^2 + (\tilde{\sigma}_{xy})^2}; \quad \tilde{\sigma}_3 = \tilde{\sigma}_{zz} \quad (4.62)$$

Za ravninsko stanje naprezanja anizotropna Karafillis-Boyce funkcija sadržava četiri parametra anizotropije ($\alpha_1, \alpha_2, \gamma_3, C$) a za vrijednosti izotropnih parametara $m = 2$ i $c = 0$, anizotropna Karafillis-Boyce (1993) funkcija prevodi se u Hill (1948) funkciju tečenja. Autori su analizirali uvjet tečenja uz pretpostavku o pridruženom pravilu tečenja te su pokazali da njihov uvjet dobro aproksimira kako eksperimentalne rezultate tako i rezultate polikristalnih modela dok je složenost jedan je od glavnih nedostataka uvjeta. **Cvitanić i sur, (2008)**. prvi razmatraju Karafillis-Boyce (1993) uvjet tečenja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja. Prema njima, parametri Karafillis-Boyce (1993) funkcije tečenja za ravninsko stanje naprezanja mogu se odrediti na temelju vrijednosti naprezanja tečenja za uzorke orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° te vrijednosti ujednačenog dvoosnog naprezanja tečenja σ_b ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$), a parametri funkcije plastičnog potencijala mogu se odrediti na temelju vrijednosti Lankfordova parametra za orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° i vrijednosti naprezanja tečenja za pravac valjanja ($\sigma_0, r_0, r_{45}, r_{90}$). Autori su ostvarili prihvatljiva predviđanja ravninske anizotropije uz

pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja za dvije aluminijske legure, Al 2008-T4 i Al 2090-T3.

4.2.9. Yld94

1997. godine **Barlat i sur. (1997)** uočavaju nemogućnost Yld91 funkcije u predviđanju plohe tečenja Al-Mg legura dobivenih visokim stupnjem redukcije u hladnom stanju kod kojih je karakteristična velika vrijednost naprezanja tečenja u uvjetima čistog smicanja. Predlažu novu funkciju naprezanja tzv. Yld94 prema izrazu

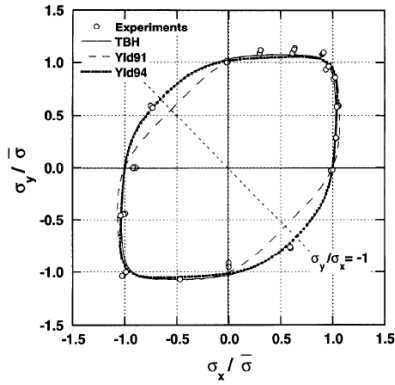
$$2\sigma_y^m = \left[\frac{1}{2} \left(\alpha_x |\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3|^m + \alpha_y |\tilde{s}_3 - \tilde{s}_1|^m + \alpha_z |\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2|^m \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.63)$$

gdje \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 i \tilde{s}_3 predstavljaju glavna naprezanja tzv. ekvivalentnog izotropnog tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{S}}$ koji se, za razliku od tenzor naprezanja kod anizotropnog Karafillis-Boyce uvjeta, određuje prema izrazu

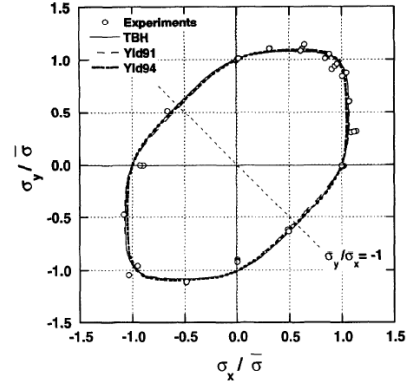
$$\begin{Bmatrix} \tilde{s}_{xx} \\ \tilde{s}_{yy} \\ \tilde{s}_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2 + c_3}{3} & \frac{-c_3}{3} & \frac{-c_2}{3} \\ \frac{-c_3}{3} & \frac{c_1 + c_3}{3} & \frac{-c_1}{3} \\ \frac{-c_2}{3} & \frac{-c_1}{3} & \frac{c_1 + c_2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz}=0 \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

U izrazima (4.63) i (4.64), parametri $c_1, c_2, c_3, \alpha_x, \alpha_y$ i α_z opisuju anizotropna svojstva materijala koja se određuju nekim od iterativnih postupaka na temelju 6 podataka ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b, r_0, r_{90}$). Na slici 4.3 prikazani su rezultati kontura plohe tečenja ostvarene s Bishop-Hill polikristalnim modelom te s Yld91 i Yld94 funkcijom za Al-Mg leguru pri različitim stupnjevima redukcije u hladnom stanju. Iako su ostvarena poboljšanja u odnosu na prethodnu Yld91 funkciju, autori su uočili da Yld94 funkcija može pokazati odstupanja u predviđanju plohe tečenja a odstupanja se mogu pojaviti i u predviđanju orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra.

a)



b)



Slika 4.3. Konture plohe tečenja dobivene različitim modelima za Al-2.5%Mg leguru pri: **a)** visokom stupnju redukcije u hladnom stanju; **b)** niskom stupnju redukcije u hladnom stanju.

(Barlat i sur. (1997))

4.2.10. Yld96

Kako bi se izbjegli nedostaci Yld94 funkcije naprezanja pri opisu anizotropije te ujedno prilagodio izraz za primjenu u numeričkim simulacijama, u istom radu **Barlat i sur. (1997)** predlažu Yld96 funkciju

$$2\sigma_y^m = \left[\frac{1}{2} (\alpha_1 |\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3|^m + \alpha_2 |\tilde{s}_3 - \tilde{s}_1|^m + \alpha_3 |\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2|^m) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.65)$$

gdje za razliku od konstantnih parametara α_x , α_y i α_z kod Yld94 funkcije, uvode α_1 , α_2 i α_3 koji predstavljaju težinske faktore ovisne o materijalnim karakteristikama i stanju naprezanja a \tilde{s}_1 , \tilde{s}_2 i \tilde{s}_3 su glavna naprezanja tzv. ekvivalentnog izotropnog tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{s}}$. Za troosno stanje naprezanja vrijedi

$$\begin{Bmatrix} \tilde{s}_{xx} \\ \tilde{s}_{yy} \\ \tilde{s}_{zz} \\ \tilde{s}_{yz} \\ \tilde{s}_{xz} \\ \tilde{s}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2 + c_3}{3} & \frac{-c_3}{3} & \frac{-c_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_3}{3} & \frac{c_1 + c_3}{3} & \frac{-c_1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_2}{3} & \frac{-c_1}{3} & \frac{c_1 + c_2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

gdje su c_{1-6} parametri koji opisuju anizotropiju materijala. Težinski faktori α_k , za $k = 1,2,3$, zapisuju se kao funkcije komponenata matrice transformacije \mathbf{p} , p_{ik} ($i = 1,2,3$),

koje predstavljaju kosinuse smjera između referentnog koordinatnog sustava a koji određuju osi anizotropije i koordinatnog sustava koji određuju pravci glavnih napreznja tenzora $\tilde{\mathbf{s}}$

$$\alpha_k = \alpha_x p_{1k}^2 + \alpha_y p_{2k}^2 + \alpha_z p_{3k}^2 \quad (4.67)$$

pri čemu se parametri α_x , α_y i α_z funkcije parametara koji opisuju anizotropno ponašanje materijala i kuteva između svojstvenih vektora tenzora $\tilde{\mathbf{s}}$ i osi anizotropije. Za ravninsko stanje napreznja, komponente tenzora $\tilde{\mathbf{s}}$ svode se na

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{yy} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2 + c_3}{3} & \frac{-c_3}{3} & \frac{-c_2}{3} & 0 \\ \frac{-c_3}{3} & \frac{c_1 + c_3}{3} & \frac{-c_1}{3} & 0 \\ \frac{-c_2}{3} & \frac{-c_1}{3} & \frac{c_1 + c_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

pri čemu se svojstvene vrijednosti tenzora $\tilde{\mathbf{s}}$ mogu izračunati kao i kod Karafillis-Boyce (1993) uvjeta prema izrazu (4.62). U tom slučaju Yld96 funkcija sadržava sedam parametara anizotropije koji se mogu odrediti na temelju sedam eksperimentalnih vrijednosti $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}, \sigma_b$. Uz pretpostavku $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, Yld96 se prevodi u Yld91 funkciju. Ako se pretpostavi vrijednost parametara $c_{1-6} = 1$, funkcija Yld96 se uz $m = 1$ ili $m \rightarrow \infty$ prevodi u izotropni Tresca uvjet tečenja dok se za vrijednosti parametra $m = 2$ prevodi u von Mises uvjet tečenja. Iako se pokazalo da Yld96 izrazito točno aproksimira rezultate polikristalnih modela (**Barlat i sur. (1997)**) te pokazuje dobru sposobnost u opisu anizotropije (**Barlati sur. (1997), Yoon (2000)**), glavni nedostaci pri implementaciji Yld96 funkcije u numeričke modele su upitna konveksnost i složenost izraza (**Barlat i sur. (2003)**).

4.2.11. Yld2000-2d

Kako bi otklonio problem konveksnosti Yld96 funkcije, **Barlat i sur. (2003)** predlažu anizotropnu nekvadratičnu Yld2000-2d funkciju napreznja koja se temelji se na dvije konveksne funkcije φ' i φ'' koje su funkcije komponenti linearno transformiranih tenzora napreznja $\tilde{\mathbf{s}}'$ i $\tilde{\mathbf{s}}''$. Za ravninsko stanje napreznja funkcija Yld2000-2d glasi

$$2\sigma_y^m = \varphi' + \varphi'' \quad (4.69)$$

pri čemu su funkcije φ' i φ'' definirane prema izrazima

$$\varphi' = (X'_1 - X'_2)^m \quad (4.70)$$

$$\varphi'' = (2X''_2 + X''_1)^m + (2X''_1 + X''_2)^m \quad (4.71)$$

gdje su $X'_{1,2}$ i $X''_{1,2}$ glavna naprezanja linearno transformiranih tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{S}}'$ i $\tilde{\mathbf{S}}''$ a parametar m vezan je za kristalnu strukturu materijala. Glavna naprezanja $X'_{1,2}$ i $X''_{1,2}$ računaju se prema izrazima

$$X'_{1,2} = \frac{(\tilde{s}'_{xx} + \tilde{s}'_{yy})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\tilde{s}'_{xx} - \tilde{s}'_{yy})}{2}\right)^2 + \tilde{s}'_{xy}{}^2} \quad (4.72)$$

$$X''_{1,2} = \frac{(\tilde{s}''_{xx} + \tilde{s}''_{yy})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\tilde{s}''_{xx} - \tilde{s}''_{yy})}{2}\right)^2 + \tilde{s}''_{xy}{}^2} \quad (4.73)$$

Linearno transformirani tenzori naprezanja $\tilde{\mathbf{S}}'$ i $\tilde{\mathbf{S}}''$ jednaki su umnošku komponenata matrice linearne transformacije \mathbf{C}' odnosno \mathbf{C}'' s komponentama devijatorskog dijela Cauchyevog tenzora naprezanja s_{xx} , s_{yy} i s_{xy} , prema izrazima

$$\begin{Bmatrix} \tilde{s}'_{xx} \\ \tilde{s}'_{yy} \\ \tilde{s}'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{s}''_{xx} \\ \tilde{s}''_{yy} \\ \tilde{s}''_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C''_{11} & C''_{12} & 0 \\ C''_{21} & C''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C''_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

S obzirom da funkcija φ' ovisi samo o X'_1 i X'_2 , pretpostavlja se da vrijedi $C'_{12} = C'_{21} = 0$ pri čemu će Yld200-2d funkcija sadržavati samo osam parametara anizotropije. Ako se pretpostavi da su komponente matrice linearnih transformacija \mathbf{C}' i \mathbf{C}'' jednake jedan, izraz (4.69) se prevodi u izotropan Hershey-Hosford uvjet tečenja. Također, transformacija se može direktno primijeniti na Cauchyev tenzor naprezanja umjesto na njegov devijatorski dio tako da vrijedi $\tilde{\mathbf{S}}' = \mathbf{L}'\boldsymbol{\sigma}$ odnosno $\tilde{\mathbf{S}}'' = \mathbf{L}''\boldsymbol{\sigma}$, gdje su matrice transformacije \mathbf{L}' i \mathbf{L}'' jednake

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & 0 \\ L'_{21} & L'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{66} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$\mathbf{L}'' = \begin{bmatrix} L''_{11} & L''_{12} & 0 \\ L''_{21} & L''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L''_{66} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

a njihove komponente su definirane prema izrazima

$$\begin{bmatrix} L'_{11} \\ L'_{12} \\ L'_{21} \\ L'_{22} \\ L'_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\begin{bmatrix} L''_{11} \\ L''_{12} \\ L''_{21} \\ L''_{22} \\ L''_{66} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

U gornjim izrazima osam parametra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ i α_8 opisuje anizotropno ponašanje materijala. Ako se koristi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja, parametri Yld2000-2d funkcije tečenja/plastičnog potencijala mogu se odrediti na temelju vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra za orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° i za ujednačeno dvoosno stanje naprezanja σ_b i r_b ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b, r_0, r_{45}, r_{90}, r_b$) pri čemu r_b predstavlja nagib plohe tečenja za stanje ujednačenog dvoosnog naprezanja ($r_b = d\varepsilon_{yy}^p/d\varepsilon_{xx}^p$). Ako se pretpostavi nepridruženo pravilo tečenja, u postupku kalibracije potrebno je poznavati 16 eksperimentalnih podataka gdje se parametri Yld2000-2d funkcije tečenja računaju se na temelju osam eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja ($\sigma_0, \sigma_{15}, \sigma_{30}, \sigma_{45}, \sigma_{60}, \sigma_{75}, \sigma_{90}, \sigma_b$), dok se parametri Yld2000-2d plastičnog potencijala računaju na temelju osam eksperimentalnih vrijednosti Lankfordova parametra ($r_0, r_{15}, r_{30}, r_{45}, r_{60}, r_{75}, r_{90}, r_b$). Kalibracija parametara svodi se na rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi nekim od iterativnih postupaka. Nekoliko autora koristilo je Yld2000-2d funkciju u svojim modelima uz pretpostavku o pridruženom (**Yoon (2006), Yoon (2010), Cai (2016)**) odnosno nepridruženom pravilu tečenja (**Park i Chung (2012), Safaei (2013-b)**) koje su implementirali u numeričke simulacije za predviđanje različitih procesa oblikovanja limova. Pokazali su da rezultati simulacija s visokom točnošću aproksimiraju eksperimentalne rezultate, pogotovo kad se usvoji pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja.

4.2.12. Yld2004-18p i Yld2004-13p

S ciljem poopćavanja Yld2000-2d funkcije za troosno stanje naprezanja uz korištenje sličnog pristupa, **Barlat i sur. (2005)** predstavljaju Yld2004-18p funkciju naprezanja

$$4\sigma_y^m = |s'_1 - s''_1|^m + |s'_1 - s''_2|^m + |s'_1 - s''_3|^m + |s'_2 - s''_1|^m + |s'_2 - s''_2|^m + |s'_2 - s''_3|^m + |s'_3 - s''_1|^m + |s'_3 - s''_2|^m + |s'_3 - s''_3|^m \quad (4.80)$$

pri čemu je vrijednost eksponenta m vezana s kristalnom strukturom materijala dok s'_1, s'_2 i s'_3 odnosno s''_1, s''_2 i s''_3 predstavljaju svojstvene vrijednosti transformiranih tenzora naprezanja dobivenih linearnom transformacijom Cauchyeva tenzora naprezanja tako da vrijedi $\tilde{s}' = \mathbf{C}'\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}$ odnosno $\tilde{s}'' = \mathbf{C}''\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}$. Tenzori transformacije \mathbf{C}' odnosno \mathbf{C}'' definirani su prema

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_5 & -\alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_7 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

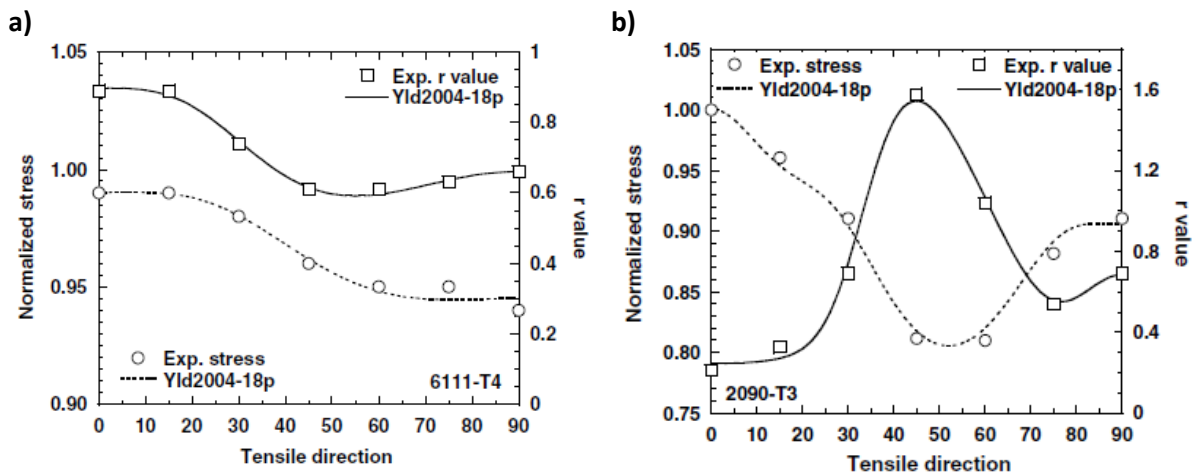
$$\mathbf{C}'' = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{10} & -\alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{12} & 0 & -\alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{14} & -\alpha_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{16} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

dok je operator \mathbf{T} definiran prema

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Funkcija Yld2004-18p za troosno stanje naprezanja sadrži ukupno 18 parametara anizotropije α_i , ($i = 1, 2, \dots, 18$) koji se kalibriraju nekim od numeričkih iterativnih postupaka. Kada su vrijednosti parametara $\alpha_{1-18} = 1$, funkcija se prevodi u izotropni Hershey-Hosford uvjet tečenja dok se za jednakost tenzora transformacije, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}''$, prevodi u Yld91 funkciju. U postupku kalibracije parametara anizotropije koriste se vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra određene u testovima rastezanja uzoraka sedam različitih orijentacija, zatim ujednačeno dvoosno naprezanje tečenja σ_b i vrijednost r_b te materijalne karakteristike koje se odnose na stanja naprezanja u ravninama yz i xz , gdje je os z okomita na ravninu valjanja. Autori su na primjeru dviju aluminijskih legura, Al 6111-T4 i Al 2090-T3, uz pretpostavku o pridruženom pravilu tečenja pokazali dobru sposobnost Yld2004-13p funkcije

u opisu ravninske anizotropije kako je prikazano na slici 4.4. Zaključili su da ova funkcija može predvidjeti najmanje šest ušica u simulaciji postupka dubokog vučenja cilindričnih posudica.



Slika 4.4. Predviđanje orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra ostvareno Yld2004-18p modelom za aluminijsku leguru: **a)** Al6111-T4; **b)** Al2090-T3. (Barlat i sur. (2005))

S obzirom na složenost same funkcije ali i ograničenost dostupnih eksperimentalnih podataka, **Barlat i sur. (2005)** reduciraju Yld2004-18p funkciju za troosno stanje naprezanja na način da parametre $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{14}$ i α_{15} iz izraza (4.81) i (4.82) izjednačavaju s jedan, pa se Yld2004-18p funkcija svodi na nešto jednostavniju tzv. Yld2004-13p funkciju oblika

$$2\sigma_y^m = |s'_1 - s''_1|^m + |s'_2 - s''_2|^m + |s'_3 - s''_3|^m - |s'_1|^m - |s'_2|^m - |s'_3|^m + |s''_1|^m + |s''_2|^m + |s''_3|^m \quad (4.84)$$

pri čemu je potrebno kalibrirati samo 13 parametara anizotropije. Za ravninsko stanje naprezanja, Yld2004-13p funkcija svodi se na 9 parametara anizotropije. Konveksnost funkcije je očuvana ako je vrijednost parametra $m \geq 1.7$ (**Barlat i sur. (2005)**).

5. MODELI PROMJENE PLASTIČNE ANIZOTROPIJE

U ovom poglavlju dan je pregled konstitutivnih modela limova koji uzimaju u obzir promjenu plastične anizotropije s napredovanjem plastične deformacije i koji se temelje na pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja te različitim funkcijama naprežanja, od najjednostavnije Hill (1948) (**Hill (1948-b)**) do složenijih kao što su Yld2000-2d (**Barlat i sur. (2003)**), CPB06ex2 (**Plunkett i sur. (2008)**) i druge.

U modelima koji se temelje na nepridruženom pravilu tečenja, parametri anizotropije funkcije tečenja mogu se kalibrirati na temelju vrijednosti naprežanja tečenja dok se parametri anizotropije plastičnog potencijala kalibriraju na temelju vrijednosti Lankfordova parametra. Ovakvim pristupom mogu se dobiti prihvatljiva predviđanja anizotropnog ponašanja limova što su u svojim radovima među prvima pokazali **Lademo i sur. (1999)**, **Stoughton (2002)**, **Stoughton i Yoon (2004)**, **Cvitanić i sur. (2008)** a poslije i **Park i Chung (2012)**, **Safaei i sur. (2014)**, **Wali i sur. (2016)**, **Min i sur. (2017)** i drugi. Većina od prethodno navedenih autora u svojim je radovima zaključila da se prihvatljiva predviđanja mogu ostvariti ako se koristi nepridruženo pravilo tečenja i jednostavnija funkcija tečenja/plastični potencijal u usporedbi s pridruženim pravilom tečenja koje zahtjeva složenu funkciju tečenja. Razlog je taj što se u modelima koji se temelje na nepridruženom pravilu tečenja u konačnici uključuje veći broj parametara anizotropije.

Razvoj modela kojima se uzima u obzir promjena omjera naprežanja tečenja i/ili Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije postaje sve popularniji. Najnovija eksperimentalna istraživanja pokazuju da se u testovima jednoosnog razvlačenja uzoraka lima, omjer naprežanja tečenja i Lankfordov parametar mijenjaju se s napredovanjem plastične deformacije. Očito je da opis tih promjena može utjecati na rezultate simulacija postupaka oblikovanja limova. U literaturi postoji nekoliko radova koji razmatraju ovakve modele poput već spomenutog **Safaei i sur. (2014)**, zatim **Plunkett i sur. (2006)**, **Aretz (2008)**, **Zamiri i Pourboghraat (2008)**, **Stoughton i Yoon (2009)**, **Aleksandrović i sur. (2009)**, **An i sur. (2013)**, **Yoshida i sur. (2014)**, **Cvitanić i Kovačić (2017)** te **Lian i sur. (2017)**. Svi od navedenih autora pokazali su da postoje određena poboljšanja u predviđanju ravninske anizotropije kada se koriste formulacije u kojima su parametri anizotropije predstavljeni kao funkcije ekvivalentne plastične deformacije. Tako na primjer **Zamiri i Pourboghraat (2008)** razvijaju

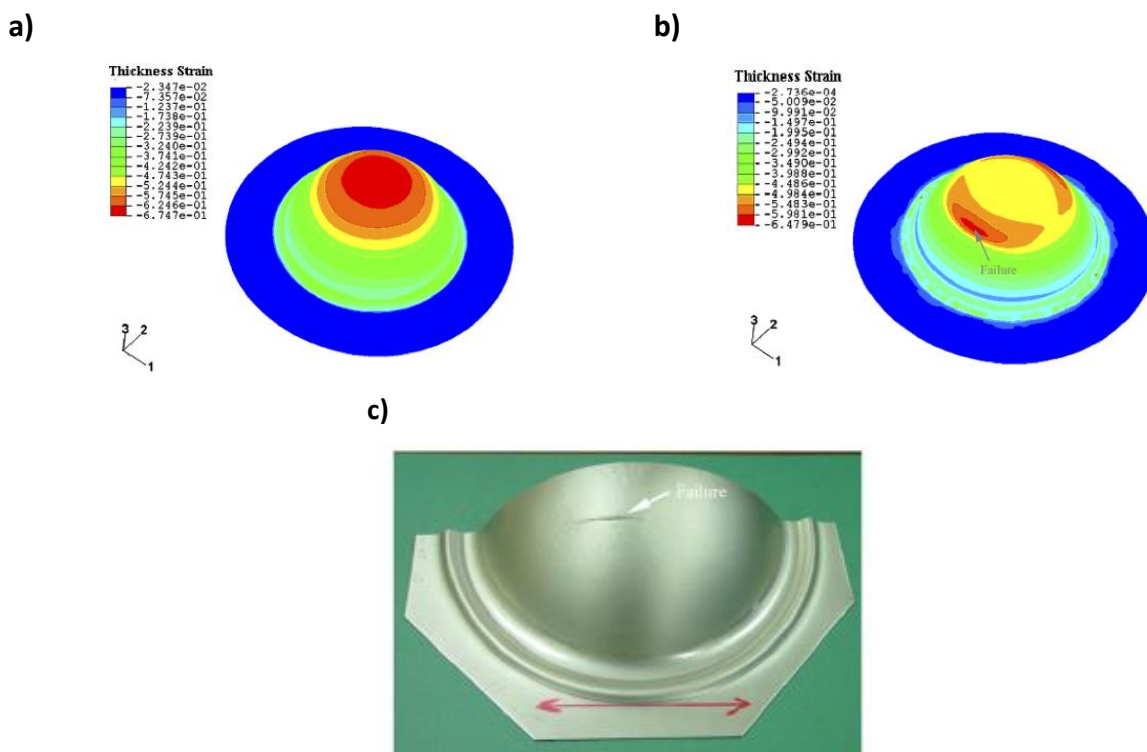
konstitutivni model temeljen na kvadratičnoj funkciji naprezanja i pridruženom pravilu tečenja pri čemu uzimaju u obzir samo promjenu Lankfordova parametara s napredovanjem plastične deformacije. **Aleksandrović i sur. (2009)** te **An i sur. (2013)** također razmatraju kako načini kojim se opisuje promjena Lankfordova parametra utječu na konačne rezultate predviđanja ravninske anizotropije. Nasuprot njima, **Plunkett i sur. (2006)**, **Aretz (2008)** te **Stoughton i Yoon (2009)** razvijaju konstitutivne modele u kojima pretpostavljaju samo promjenu vrijednosti omjera naprezanja tečenja s napredovanjem plastične deformacije. Naposljetku, **Safaei i sur. (2014)**, **Yoshida i sur. (2014)**, **Cvitanić i Kovačić (2017)** te **Lian i sur. (2017)** uzimaju u obzir promjenu kako vrijednosti Lankfordova parametra tako i omjera naprezanja tečenja uz pretpostavku o pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja.

U nastavku je dan kratak pregled nekoliko prethodno spomenutih radova u kojima su analizirani modeli s funkcijom tečenja i/ili plastičnim potencijalom koji se mijenjaju s napredovanjem plastične deformacije.

- **Plunkett i sur. (2006)** predlažu postupak proračuna parametara CPB05 (**Cazacu i sur. (2006)**) funkcije tečenja kojom se uzima u obzir promjena anizotropije kao i asimetrija naprezanja tečenja u vlaku i tlaku a što je prikladno za metale s heksagonalnom kristalnom rešetkom. Razvijeni postupak temelji se na principu ekvivalentnosti rada plastičnog deformiranja te su za različite vrijednosti ekvivalentne plastične deformacije izračunali koeficijente analizirane funkcije tečenja. Analiza predloženog modela provedena je na simulaciji postupka savijanja u 4 točke grede kvadratičnog presjeka izrađene od cirkonija te su rezultate simulacija usporedili s eksperimentom. Predloženi model daje dobra predviđanja asimetrije omjera naprezanja tečenja u vlaku i tlaku a promjena parametara anizotropije utječe na predviđanja postupaka savijanja.

- **Aretz (2008)** predlaže model s kombiniranim izotropno-distorzijskim očvršćivanjem uz konstante vrijednosti Lankfordovih parametara za aluminijsku leguru Al 7108-T6. Model je razvio koristeći Yld2003 funkciju tečenja **Aretz (2004,2005)**. U radu razmatra utjecaj distorzije uvjeta tečenja na predviđanje lokalizirane pojave vrata (suženja) za ortotropne limove te uspoređuje razvijeni model s modelom koji uzima u obzir samo izotropno očvršćivanje. Zaključio je da opis promjene anizotropije materijala ima utjecaj na konačne rezultate.

• **Zamiri i Pourboghlat (2008)** razvijaju konstitutivni model temeljen na kvadratičnoj ortotropnoj Hill (1948) (**Hill (1948-b)**) funkciji napreznja i pridruženom pravilu tečenja za lim supravodljivog niobijuma. Parametri anizotropije funkcije tečenja u ovisnosti o ekvivalentnoj plastičnoj deformaciji kalibrirani su na temelju eksperimentalno određenih vrijednosti Lankfordova parametra za orijentacije 0° , 45° i 90° (r_0, r_{45}, r_{90}). Pokazali su da promjena parametara anizotropije s napredovanjem plastične deformacije ima značajan utjecaj na predviđanje deformacije debljine odnosno pojave pukotine u testa izbočenja lima (eng. *Hydraulic bulge test*), kako je prikazano na slici 5.1. Zaključuju da se poboljšanja mogu ostvariti ako bi se u obzir uzela i promjena omjera napreznja tečenja s napredovanjem plastične deformacije.

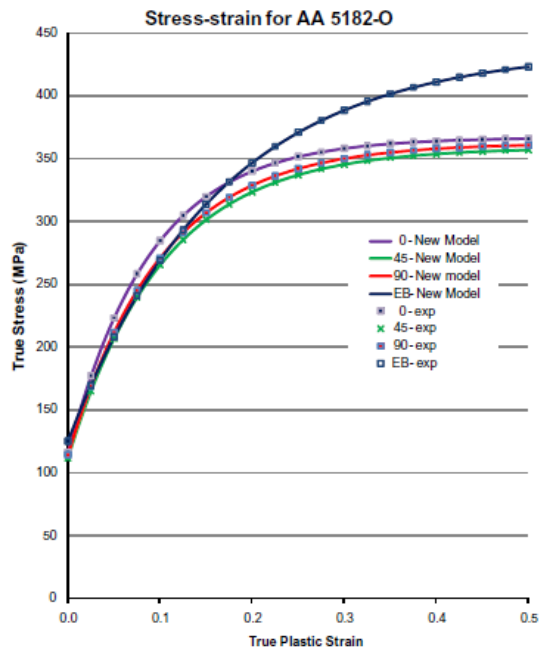


Slika 5.1. Rezultati simulacije testa izbočenja lima niobijuma ostvareni s modelima koji uzimaju u obzir:

- a) konstantne, b) promjenjive parametre anizotropije.
 c) Test izbočenja lima niobijuma. (**Zamiri i Pourboghlat (2008)**)

• **Stoughton i Yoon (2009)** predlažu model temeljen na kvadratičnoj ortotropnoj Hill (1948) funkciji napreznja i nepridruženom pravilu tečenja s distorzijskim očvršćivanjem uz pretpostavku da su vrijednosti Lankfordova parametra konstantne s napredovanjem plastične deformacije. Rezultate predviđanja napreznja tečenja analizirali su za pet

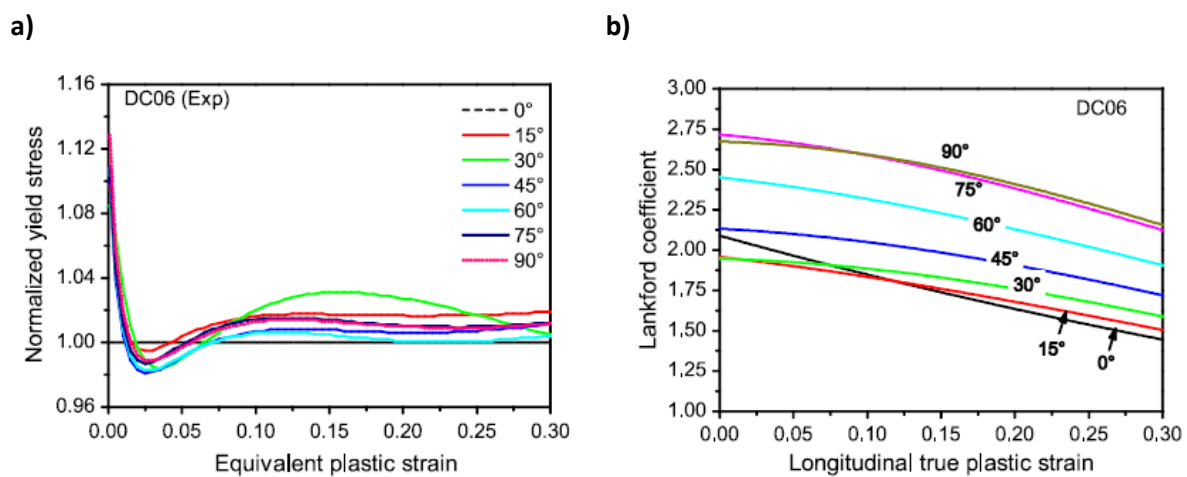
materijala: dva čelika, 719-B i 718-AT odnosno tri aluminijske legure, Al 5182-O, Al 6022-T43 te Al 6022-T4E32. Predviđanje eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja za aluminijsku leguru Al 5182-O prikazano je na slici 5.2. Njihovim modelom ostvarena su zadovoljavajuća predviđanja naprezanja tečenja za smjerove 0°, 45° te 90° u odnosu na pravac valjanja, kao i za ujednačeno dvoosno stanje naprezanja. Slični rezultati u predviđanju eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja ostvarena su za ostale analizirane materijale.



Slika 5.2. Predviđanje eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja za smjerove 0°, 45° i 90° u odnosu na pravac valjanja kao i za ujednačeno dvoosno stanje naprezanja EB. Aluminijska legura Al 5182-O. (Stoughton i Yoon (2009)).

• **An i sur. (2013)** razmatraju promjenu Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije za tri čelična lima, DC04, DC06 i DX57 te lim aluminijske legure Al 5005-O. Napuštaju standardnu proceduru prema kojoj se konstantna vrijednost Lankfordova parametra određuje iz nagiba pravca kojim se aproksimira cijelo područje u dijagramu ovisnosti stvarne poprečne i stvarne uzdužne plastične deformacije. Umjesto navedenog, na određenim intervalima (2% uzdužne plastične deformacije) vrše linearnu regresiju te se iz nagiba pravca računa inkrementalna vrijednost Lankfordova parametra za taj interval. Zaključili su da ovako dobivene vrijednosti dobro aproksimiraju trenutno stanje anizotropije materijala kao i to da je promjena Lankfordova parametra uvjetovana razvojem teksture s napredovanjem plastične deformacije.

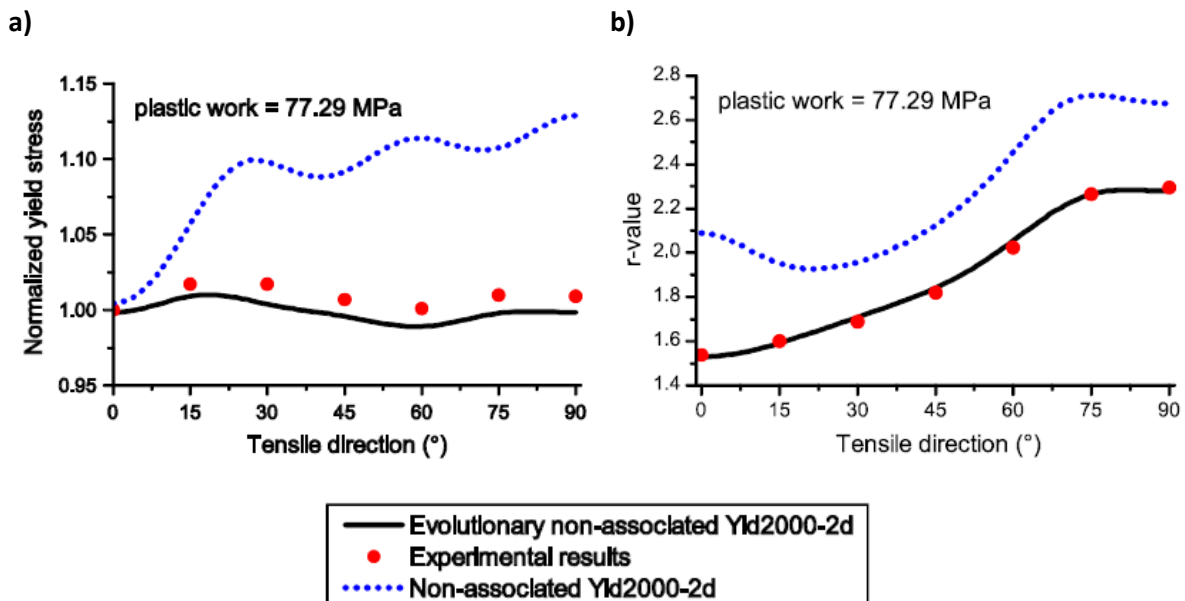
• **Safaei i sur. (2014)** provode jednoosne pokuse rastezanja uzoraka čeličnog lima DC06 za sedam različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja pri čemu koriste tzv. *Digital Image Correlation (DIC)* tehniku. Umjesto standardno korištene linearne interpolacije eksperimentalno određene ovisnosti stvarne poprečne i stvarne uzdužne plastične deformacije, u radu je korištena polinomna funkcija trećeg stupnja. Trenutne vrijednosti Lankfordova parametra u ovisnosti o ekvivalentnoj plastičnoj deformaciji izračunate su iz nagiba tangente korištene polinomne funkcije. Autori su uočili da postoji određena promjena omjera naprezanja tečenja te značajan pad vrijednosti Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije za sve razmatrane orijentacije, što je prikazano na slici 5.3.



Slika 5.3. Promjena eksperimentalno određenih **a)** omjera naprezanja tečenja, **b)** Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije za čelični lim DC06. (Safaei i sur. (2014))

Autori su razvili konstitutivni model koji se temelji na nepridruženom pravilu tečenja i nekvadratičnoj ortotropnoj Yld2000-2d funkciji naprezanja (Barlat i sur. (2003)). Parametre Yld2000-2d funkcije tečenja izračunali su na temelju osam eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja ($\sigma_0, \sigma_{15}, \sigma_{30}, \sigma_{45}, \sigma_{60}, \sigma_{75}, \sigma_{90}, \sigma_b$), dok se parametre Yld2000-2d plastičnog potencijala izračunali na temelju osam eksperimentalnih vrijednosti Lankfordova parametra ($r_0, r_{15}, r_{30}, r_{45}, r_{60}, r_{75}, r_{90}, r_b$), odnosno u postupku kalibracije parametara anizotropije za jednu razinu ekvivalentne plastične deformacije korišteno je ukupno 16 eksperimentalnih podataka. Koristeći polinomnu funkciju četvrtog stupnja, uspostavili su vezu između parametara anizotropije analizirane funkcije tečenja odnosno plastičnog potencijala sa ekvivalentnom plastičnom deformacijom. Na slici 5.4. prikazana je usporedba predviđanja

orijentacijske ovisnosti omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra za jednu od viših razina ekvivalentne plastične deformacije (ona koja odgovara vrijednosti ekvivalentnog plastičnog rada od 77.29 MPa). Predviđanja su ostvarena s dva modela: modelom u kojem se parametri anizotropije ne mijenjaju s napredovanjem plastične deformacije (*Non-Associated Yld2000-2d*) i model koji uzima u obzir promjenu parametara anizotropije (*Evolutionary non-Associated Yld2000-2d*).



Slika 5.4. Predviđanje orijentacijske ovisnosti: **a)** omjera naprezanja tečenja, **b)** Lankfordova parametra, za čelični lim DC06. (Safaei i sur. (2014))

Pokazali su da ovako razvijeni model, u kojem se plastični potencijal i funkcija tečenja neovisno mijenjaju s napredovanjem plastične deformacije, rezultira s značajnim poboljšanjima u opisu promjene orijentacijske ovisnosti omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra. Zaključili su da se analizirani model, kao relativno jednostavan i precizan, može koristiti u numeričkim simulacijama.

- **Cvitanić i Kovačić (2017)** razvijaju konstitutivni model temeljen na nepridruženom pravilu tečenja i kvadratičnoj ortotropnoj Hill (1948) odnosno nekvadratičnoj ortotropnoj Karafillis-Boyce (1993) funkciji naprezanja za čelik DC06. U razvijenim modelima uzima se u obzir promjena omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije. Autori su uočili da analizirani materijal pokazuje značajnu promjenu orijentacijske ovisnosti plastičnih karakteristika što opravdava upotrebu promjenjivih

parametara anizotropije. Koristeći polinomnu funkciju četvrtog stupnja, uspostavljena je veza parametara anizotropije funkcije tečenja odnosno parametara anizotropije plastičnog potencijala s ekvivalentnom plastičnom deformacijom. Autori su s razvijenim modelima ostvarili prihvatljiva predviđanja orijentacijske ovisnosti omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra za analizirani materijal.

Također, u radu su primjenom algoritma povratnog projiciranja razvijene algoritamske formulacije analiziranih modela temeljenih na nepridruženom pravilu tečenja pri čemu je korišten implicitni Eulerov integracijski postupak. Inkrementalni oblik konstitutivnog modela predstavljen je skupom četiriju nelinearnih jednadžbi a procjena točnosti razvijenih formulacija provedena je na temelju prikaza linija jednakih pogrešaka (*eng. iso-error maps*) za čelik DC06. Autori su uočili da ne postoji značajna razlika u procjeni pogreške za formulacije temeljene na pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja te kvadratičnoj odnosno nekvadratičnoj funkciji naprezanja.

- **Lian i sur. (2017)** razvijaju konstitutivni model temeljen na nepridruženom pravilu tečenja i kvadratičnoj ortotropnoj Hill (1948) funkciji naprezanja za nehrđajući čelik AISI 439. U razvijenom modelu anizotropni parametri analizirane funkcije tečenja odnosno plastičnog potencijala mijenjaju se kao kontinuirane funkcije s napredovanjem plastične deformacije. Svoje modele ispitali su u predviđanju krivulja dijagrama granične deformabilnosti (*eng. forming limit diagram, FLD*) u Nakajima testu. Pokazali su da se korištenjem modela promjene plastične anizotropije temeljenim na nepridruženom pravilu tečenja mogu ostvariti preciznija predviđanja krivulja od modela koji koriste konstantne parametre anizotropije ili pretpostavku o pridruženom pravilu tečenja.

6. NAPREDNI KONSTITUTIVNI MODELI U PREDVIĐANJU POSTUPKA CILINDRIČNOG DUBOKOG VUČENJA

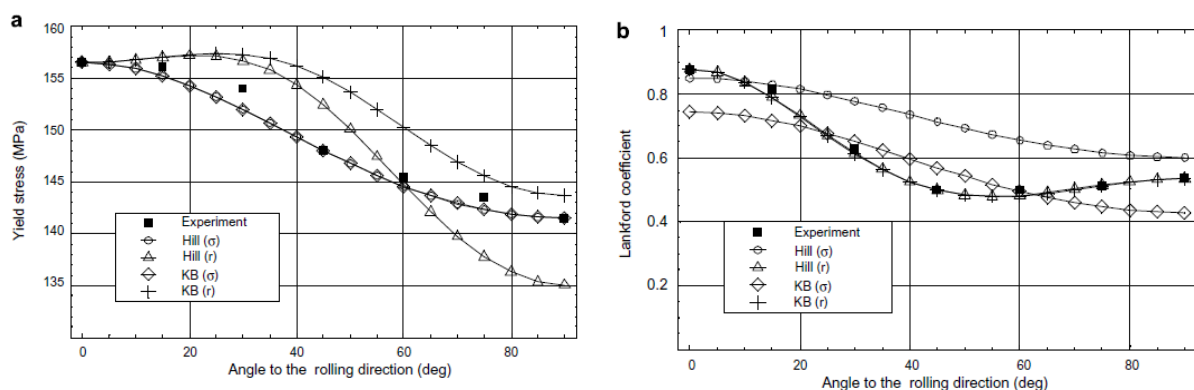
U novije vrijeme postavlja se zahtjev za što pouzdanijim predviđanjem različitih postupaka oblikovanja lima deformiranjem. Različiti razvijeni konstitutivni modeli materijala ispitani su u predviđanju postupka cilindričnog dubokog vučenja posudica. Pouzdanost numeričkih simulacija postupaka obrade deformiranjem ovisit će o opisu uvjeta kojima se odvija sam proces deformiranja kao i o implementiranom konstitutivnom modelu materijala. U postupku dubokog vučenja, anizotropno ponašanje lima uzrokovat će valoviti rub konačno izvučene posudice s izraženim tzv. ušicama, a ta pojava se naziva ušićavost. Brojni autori razmatrali su kako odabir konstitutivnog modela temeljenog na pridruženom ili nepridruženom pravilu tečenja utječe na ishod simulacija postupka dubokog vučenja. Neki od radova u kojima su razvijeni i implementirani modeli koji koriste konstantne parametre funkcije tečenja/plastičnog potencijala su npr. **Yoon i sur. (1999)**, **Yoon i sur. (2000)**, **Yoon i sur. (2004)**, **Yoon i sur. (2006)**, **Cvitanić i sur. (2007)**, **Cvitanić i sur. (2008)**, **Saxena i Dixit (2009)**, **Taherizadeh i sur. (2010)**, **Park and Chung (2012)**, **Safaei i sur. (2013-a)**, **Safaei i sur. (2013-b)**, **Vrh i sur. (2011)**, **Vrh i sur. (2014)**, **Paulino i Yoon (2015)**, **Izdapanah i sur. (2016)** itd. U navedenim radovima razmatran je utjecaj opisa orijentacijske ovisnosti plastičnih svojstava materijala na konačan izgled ruba posudice. Predviđanje amplitude visina posudice povezana je s predviđanjem amplitude naprezanja tečenja dok zrcalna slika predviđanja orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra (ovisnost za orijentacije 90° - 0° u odnosu na pravac valjanja) približno odgovara dobivenom obliku ruba četvrtine posudice za orijentacije od 0° - 90° u odnosu na pravac valjanja.

S obzirom da rezultati simulacija koji koriste konstantne parametre anizotropije pokazuju određena odstupanja od eksperimentalno određenog profila posudice, neki od autora su zaključili da bi primjena modela s promjenom plastične anizotropije mogla povećati pouzdanost u predviđanju eksperimenata. **Wang i sur. (2009)**, **Yoon i sur. (2010)**, **Cai i sur. (2016)** razvijaju modele koji uzimaju u obzir promjenu parametara anizotropije te ih ispituju u predviđanju postupka dubokog vučenja. U numeričkim simulacijama **Wang i sur. (2009)** koriste model temeljen na Yld2000-2d (**Barlat i sur. (2003)**) funkciji naprezanja i pridruženom pravilu tečenja koji uključuje omjer naprezanja tečenja i Lankfordov

parametar kao promjenjive veličine s napredovanjem plastične deformacije dok **Cai i sur. (2016)** uzimaju u obzir i varijaciju izotropnog parametra m spomenute Yld2000-2d funkcije tečenja u ovisnosti o ekvivalentnoj plastičnoj deformaciji. Autori su pokazali da njihovi modeli promjene plastične anizotropije daju poboljšanja u predviđanju profila posudice u usporedbi s modelima koji ne uzimaju promjenu parametara anizotropije s napredovanjem plastične deformacije.

U nastavku je opisano nekoliko prethodno spomenutih radova u kojima se razmatra utjecaj razvijenih konstitutivnih modela na rezultate predviđanja postupka cilindričnog dubokog vučenja.

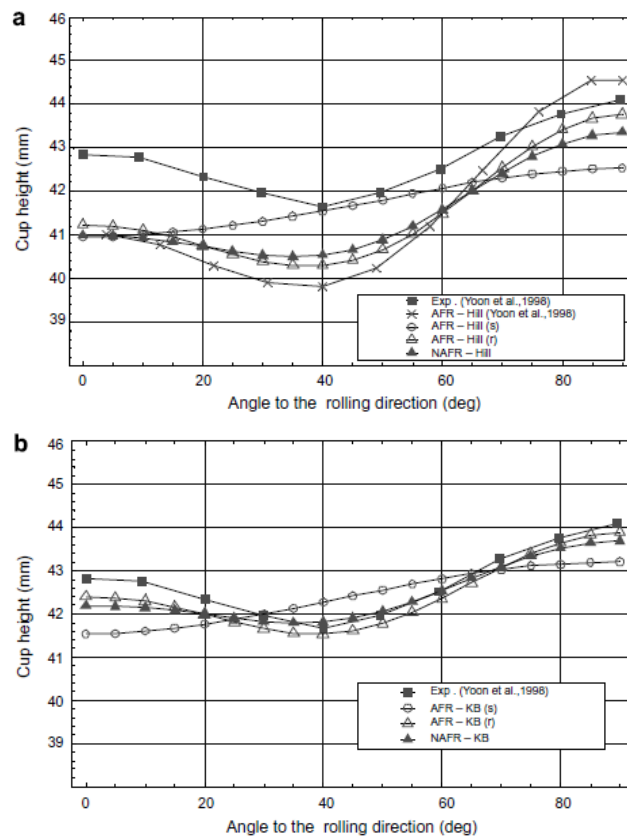
• **Cvitančić i sur. (2008)** su razvili konstitutivni model temeljen na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja i kvadratičnoj ortotropnoj Hill (1948) odnosno nekvadratičnoj ortotropnoj Karafillis-Boyce (1993) funkciji naprezanja u kombinaciji s izotropnim Swift zakonom očvršćivanja za dvije aluminijske legure, Al 2008-T4 te Al 2090-T3. Kao što je već dijelom opisano u poglavlju 4.2.8, razmatrane su mogućnosti analiziranih funkcija u predviđanju orijentacijske ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra te su na slici 6.1 prikazani rezultati predviđanja za aluminijsku leguru Al 2008-T4. Hill (1948)/Karafillis-Boyce (1993) funkcija tečenja kalibrirana na temelju naprezanja tečenja označena je s Hill(σ)/KB(σ), dok je Hill (1948)/Karafillis-Boyce (1993) funkcija plastičnog potencijala kalibrirana na temelju vrijednosti Lankfordovih parametara i označena je s Hill(r)/KB(r).



Slika 6.1. Predviđanje orijentacijske ovisnosti: **a)** naprezanja tečenja, **b)** Lankfordova parametra za aluminijsku leguru Al2008-T4. (Cvitančić i sur. (2008))

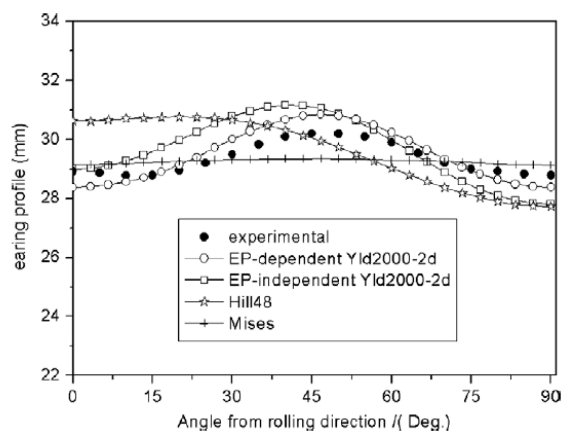
Iz slike 6.1. može se uočiti da Hill (1948)/Karafillis-Boyce (1993) funkcija tečenja/plastični potencijal daje bolja predviđanja naprezanja tečenja odnosno Lankfordovih parametara ako se koristi pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja u odnosu na rezultate dobivene s usvojenom pretpostavkom o pridruženom pravilu tečenja.

Nadalje, obnovljena Lagrangeova formulacija degeneriranog ljuskastog elementa s razvijenim materijalnim modelima uključena je u programski paket za analizu metodom konačnih elementa ADINA te su za postupak cilindričnog dubokog vučenja uspoređena predviđanja ušica duboko vučene posudice kao i deformacije debljine. Rezultati predviđanja visina posudice ostvareni u simulacijama uspoređeni su s eksperimentom te su za aluminijsku leguru Al 2008-T4 prikazani na slici 6.2. Iz slike se može zaključiti da su modelom temeljenom na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja za obje analizirane funkcije (NAFR-Hill, NAFR-KB) ostvarena određena poboljšanja u predviđanju visina posudice u usporedbi s rezultatima modela temeljenih na pridruženom pravilu tečenja. Slični zaključci doneseni su kod predviđanja deformacije debljine.



Slika 6.2. Prikaz rezultata simulacija u predviđanju eksperimentalnih vrijednosti visina duboko vučene posudice za aluminijsku leguru Al 2008-T4. Rezultati simulacija ostvareni s: **a) Hill (1948), b) Karafillis-Boyce(1993) funkcijom naprezanja. (Cvitić i sur. (2008))**

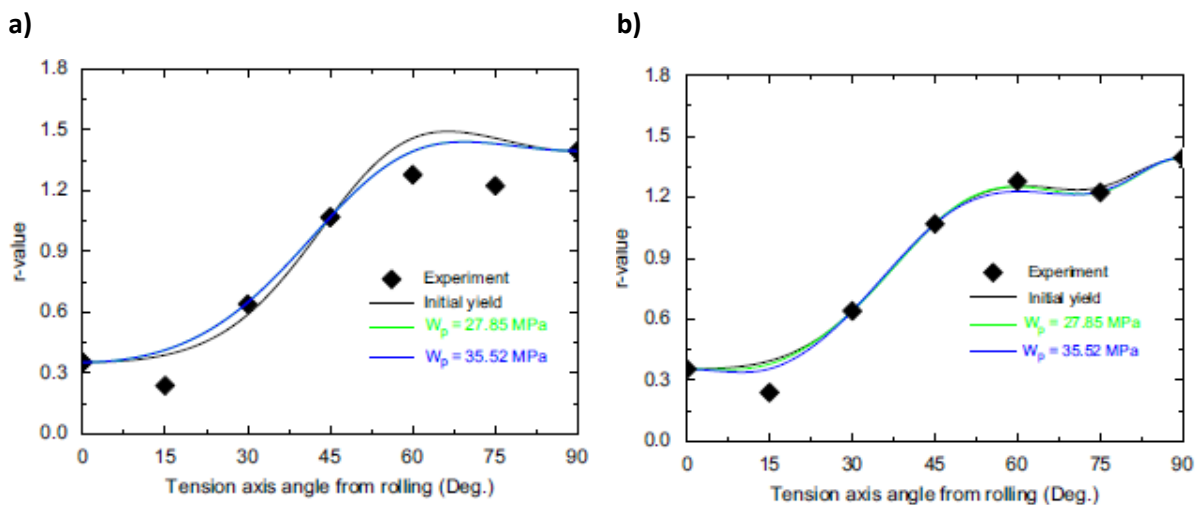
• **Wang i sur. (2009)** razvijaju konstitutivni model temeljen na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja i nekvadratičnoj ortotropnoj Yld2000-2d funkciji tečenja (**Barlat i sur. (2003)**) u kombinaciji s distorzijskim očvršćivanjem za aluminijsku leguru Al 5754-O. Anizotropni parametri analizirane funkcije tečenja kalibrirane su na temelju vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra za orijentacije 0°, 45° i 90° i za ujednačeno dvoosno stanje naprezanja σ_b i r_b ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b, r_0, r_{45}, r_{90}, r_b$) koje odgovaraju jednakim vrijednostima plastičnog rada. Veza između parametara anizotropije analizirane funkcije sa ekvivalentnom plastičnom deformacijom uspostavljena je korištenjem polinomne funkcije šestog stupnja. Na slici 6.3 prikazani su rezultati simulacija testa cilindričnog dubokog vučenja za četiri različita modela: model temeljen na izotropnom von Mises uvjetu tečenja, zatim modeli temeljeni na anizotropnoj Hill (1948) odnosno Yld2000-2d funkciji tečenja s konstantnim parametrima te model temeljen na Yld200-2d funkciji tečenja s promjenjivim parametrima. Rezultati simulacija uspoređeni su s eksperimentom. Na temelju rezultata prikazanih na slici 6.3, može se uočiti da model s promjenjivim parametrima anizotropije daje najbolja predviđanja visina posudice



Slika 6.3. Prikaz rezultata simulacija u predviđanju eksperimentalnih vrijednosti visina duboko vučene posudice za aluminijsku leguru Al 25754-O. (**Wang i sur. (2009)**).

• **Yoon i sur. (2010)** predlažu konstitutivni model s pretpostavkom o pridruženom pravilu tečenja koji se temelji na ortotropnoj Yld2000-2d (**Barlat i sur. (2003)**) odnosno ortotropnoj CPB06ex2 (**Plunkett i sur. (2008)**) funkciji tečenja u kombinaciji s distorzijskim očvršćivanjem za dvije aluminijske legure, Al 5042-H2 i Al 6111-T4. U kalibraciji parametara anizotropije Yld2000-2d funkcije tečenja koji se mijenjaju s napredovanjem plastične

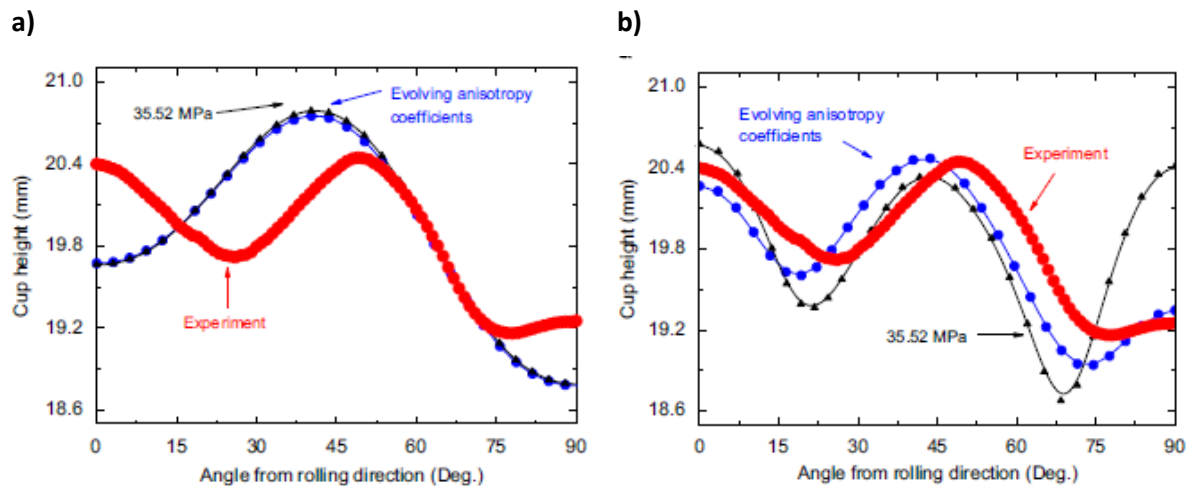
deformacije korištene su konstantne vrijednosti Lankfordova parametra (r_0, r_{45}, r_{90}, r_b) te vrijednosti naprezanja tečenja dobivene iz krivulja očvršćivanja za različite smjerove u odnosu na pravac valjanja kao i za ujednačeno dvoosno stanje naprezanja ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$) a koja su ovisna o ekvivalentnoj plastičnoj deformaciji. U postupku kalibracije parametara anizotropije CPB06ex2 funkcije tečenja korišteno je ukupno 16 podataka: 8 vrijednosti naprezanja tečenja ($\sigma_0, \sigma_{15}, \sigma_{30}, \sigma_{45}, \sigma_{60}, \sigma_{75}, \sigma_{90}, \sigma_b$) koja se mijenjaju s napredovanjem plastične deformacije te 8 konstantnih vrijednosti Lankfordova parametra ($r_0, r_{15}, r_{30}, r_{45}, r_{60}, r_{75}, r_{90}, r_b$). Na slici 6.4.a odnosno 6.4.b, uspoređena su predviđanja orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra aluminijske legure Al 5042-H2 ostvarena modelima koji se temelje na Yld2000-2d odnosno CPB06ex2 funkciji tečenja. Iz slika se može zaključiti da CPB06ex2 funkcija daje precizniji opis anizotropnog ponašanja materijala, što je i očekivano s obzirom da se u postupku kalibracije CPB06ex2 funkcije koristi veći broj eksperimentalnih podataka. Isti zaključak vrijedi i za predviđanje orijentacijske ovisnosti omjera naprezanja tečenja za sve vrijednosti ekvivalentne plastične deformacije.



Slika 6.4. Predviđanje orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra dobivene: **a)** Yld2000-2d, **b)** CPB06ex2 funkcijom tečenja za aluminijsku leguru Al 5042-H2. (Yoon i sur. (2010))

Razvijeni modeli analizirani su u predviđanju postupka dubokog vučenja posudica za analizirane aluminijske legure. Temeljem rezultata predviđanja profila četvrtine posudice, zaključeno je da se korištenjem modela koji se temelji na Yld2000-2d funkciji tečenja mogu s visokom pouzdanošću ostvariti predviđanja 4 eksperimentalno dobivene ušice duboko vučene posudice aluminijske legure Al 6111-T4. Također, temeljem rezultata predviđanja prikazanih

na slici 6.5.a odnosno 6.5.b, autori su zaključili da se korištenjem Yld2000-2d funkcije tečenja može predvidjeti samo 4 ušice od ukupno 8 eksperimentalno dobivenih ušica za posudicu aluminijske legure Al 5042-H2 dok je točan broj ušica ostvaren modelom koji koristi složeniju CPB06ex2 funkciju. S druge strane, analizirane formulacije slabo predviđaju raspored brjegov a i dolova, odnosno položaj ušica po profilu posudice za aluminijsku leguru Al 5042-H2.



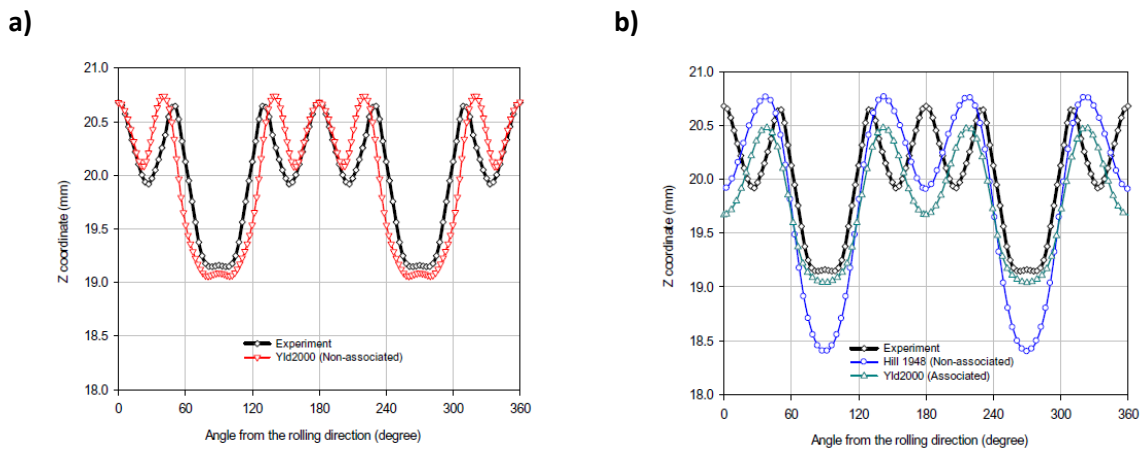
Slika 6.5. Predviđanje eksperimentalnog profila duboko vučene posudice modelom temeljenom na:

a) Yld2000-2d, **b)** CPB06ex2 funkciji tečenja za aluminijsku leguru Al 5042-H2.

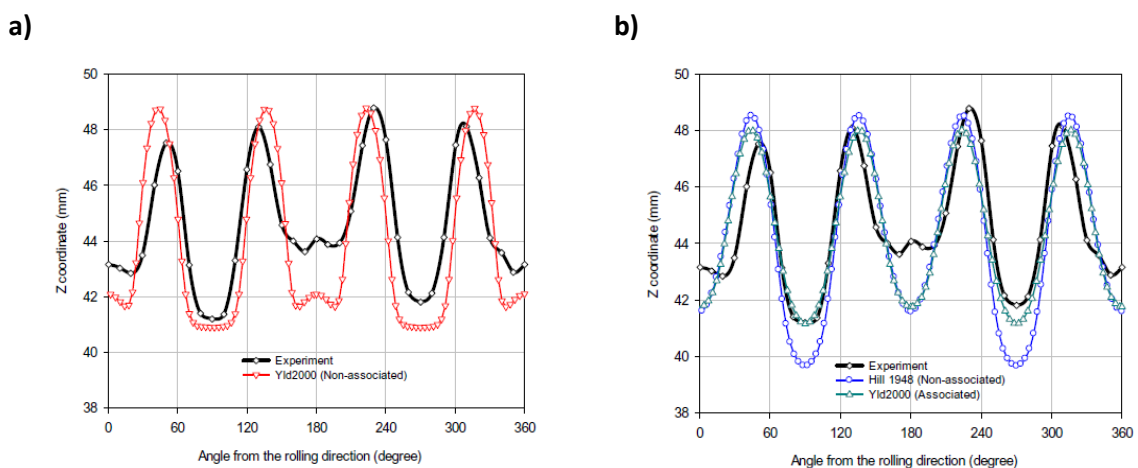
(Yoon i sur. (2010))

- **Park i Chung (2012)** razvijaju konstitutivni model temeljen na nepridruženom pravilu tečenja i nekvadratičnoj Yld2000-2d (**Barlat i sur. (2003)**) odnosno kvadratičnoj Hill (1948) (**Hill (1948-b)**) funkciji naprezanja za dvije aluminijske legure, Al 5042 i Al 2090-T3. U modelima pretpostavljaju kombinirano izotropno-kinematsko očvršćivanje. Parametri analizirane Yld2000-2d funkcije tečenja kalibrirani su na temelju 8 eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja ($\sigma_0, \sigma_{15}, \sigma_{30}, \sigma_{45}, \sigma_{60}, \sigma_{75}, \sigma_{90}, \sigma_b$), dok su parametri Yld2000-2d plastičnog potencijala izračunati na temelju 8 eksperimentalnih vrijednosti Lankfordova parametra ($r_0, r_{15}, r_{30}, r_{45}, r_{60}, r_{75}, r_{90}, r_b$). Parametri anizotropije pretpostavljeni su kao konstantne vrijednosti koje ne ovise o napredovanju plastične deformacije. Modeli su analizirani u simulaciji postupka dubokog vučenja posudica te su uspoređena predviđanja triju modela: modeli temeljeni na nepridruženom pravilu tečenja NAFR-Yld2000-2d i NAFR-Hill (1948) te model temeljenom na pridruženom pravilu tečenja AFR-Yld2000-2d. Rezultati predviđanja za analizirane aluminijske legure, Al 5042 i Al 2090-T3, prikazani su na slikama 6.6 odnosno 6.7. Potvrdili su zaključke prethodno navedene u literaturi kako se

modelom temeljenom na nepridruženom pravilu tečenja i kvadratičnoj funkciji naprezanja (NAFR-Hill (1948)) odnosno modelom koji se temelji na pridruženom pravilu tečenja i nekvadratičnoj Yld2000-2d funkciji (AFR-Yld2000-2d) ne može predvidjeti više od 4 ušice za obje analizirane aluminijske legure. S druge strane, model temeljen na složenijoj funkciji naprezanja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja može predvidjeti točan broj ušica (6 za aluminijsku leguru Al 2090-T3 i 8 za aluminijsku leguru Al 5042).

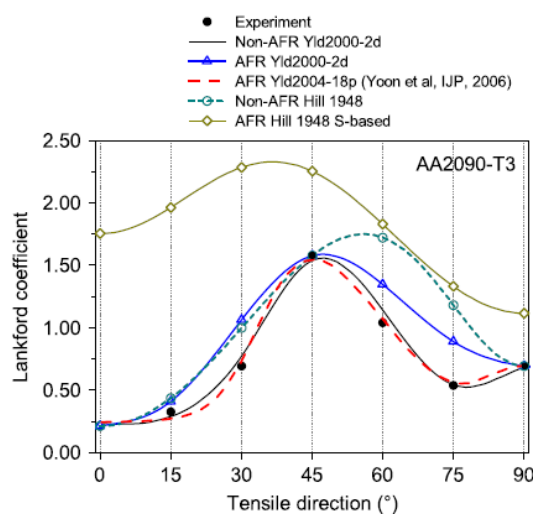


Slika 6.6. Predviđanje eksperimentalnog profila duboko vučene posudice modelom temeljenom na: **a)** NAFR-Yld2000-2d, **b)** NAFR-Hill(1948) odnosno AFR-Yld2000-2d funkciji naprezanja za aluminijsku leguru Al 5042. (Park i Chung (2012))



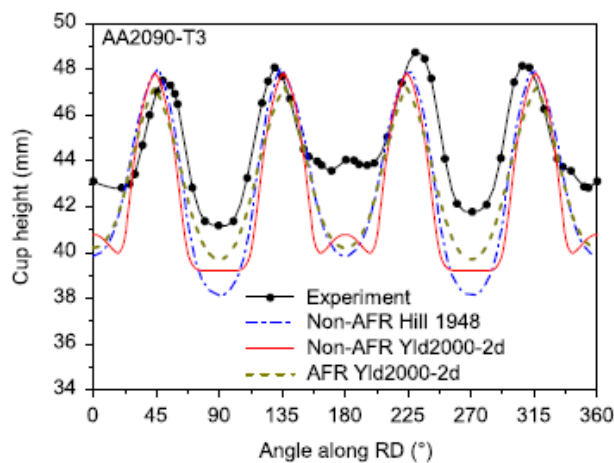
Slika 6.7. Predviđanje eksperimentalnog profila duboko vučene posudice modelom temeljenom na: **a)** NAFR-Yld2000-2d, **b)** NAFR-Hill(1948) odnosno AFR-Yld2000-2d funkciji naprezanja za aluminijsku leguru Al 2090-T3. (Park i Chung (2012))

• **Safaei i sur. (2013-b)** predlažu konstitutivni model temeljen na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja. U modelima koriste nekvadratičnu Yld2000-2d (**Barlat i sur. 2003**) odnosno kvadratičnu Hill (1948) funkciju naprezanja s konstantnim vrijednostima anizotropnih parametara u svrhu opisa ravninske anizotropije aluminijskih legura Al 5754-O i Al2090-T3. Vrijednosti anizotropnih parametara Yld2000-2d/Hill(1948) funkcije tečenja/plastičnog potencijala kalibrirane su na temelju vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra kako je već opisano u prethodnom poglavlju za spomenute funkcije. Na primjeru aluminijske legure Al 2090-T3 usporedili su rezultate predviđanja orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra ostvarene opisanim modelima kao što je prikazano na slici 6.8. Rezultate su usporedili s rezultatima dobivenim u radu **Yoon i sur. (2006)** koji su ostvarili predviđanja orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra za isti materijal s Yld2004-18p (**Barlat i sur. (2005)**) funkcijom tečenja temeljenom na pridruženom pravilu tečenja i konstantnim vrijednostima anizotropnih parametara. Model temeljen na nepridruženom pravilu tečenja i nekvadratičnoj funkciji naprezanja (Non-AFR Yld2000-2d) daje bolja predviđanja ravninske anizotropije od modela temeljenom na kvadratičnoj funkciji (Non-AFR Hill (1948)). Prema njihovim rezultatima prikazanim na slici 6.8, orijentacijska ovisnost Lankfordova parametra može se predvidjeti s istom preciznošću ako se koristi jednostavnija funkcija naprezanja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja (Non-AFR Yld2000-2d) u usporedbi s modelom koji se temelji na pridruženom pravilu tečenja i složenijoj funkciji tečenja (AFR Yld2004-18p).



Slika 6.8. Predviđanje orijentacijske ovisnosti Lankfordova parametra aluminijske legure Al 2090-T3. (**Safaei i sur. (2013-b)**)

Razvijeni modeli implementirani su u programski paket za analizu metodom konačnih elementa ABAQUS uz korištenje implicitnog unutrašnjog Eulerovog integracijskog postupka te su u simulaciji postupka cilindričnog dubokog vučenja uspoređeni razvijeni modeli u predviđanju ušica duboko vučene posudice kao što je prikazano na slici 6.9. Zaključuju da su rezultati simulacija u skladu s eksperimentom te da je predloženi model Non-AFR Yld2000-2d najpouzdaniji u predviđanju visina kao i oblika ruba (položaj brjegov i dolova) posudice .



Slika 6.9. Predviđanje profila posudice ostvareno različitim modelima u simulacijama cilindričnog dubokog vučenja za aluminijsku leguru Al 2090-T3. (Safaei i sur. (2013-b))

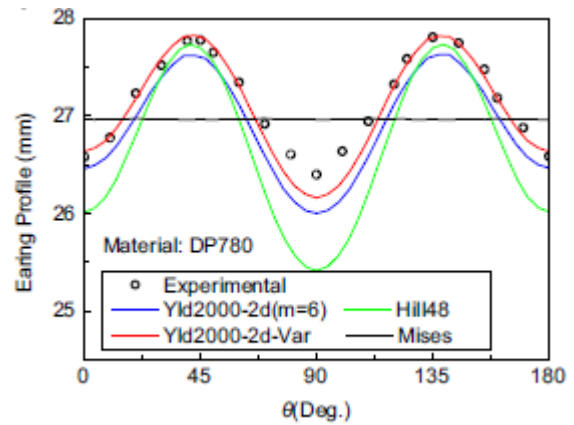
- U svojem radu **Cai i sur. (2016)** razvijaju konstitutivni model koji se temelji na pridruženom pravilu tečenja u kojem se uzima u obzir promjene omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije za tri čelika visoke čvrstoće, DP590, DP780 i DP980. U modelu je korištena modifikaciju postojeće Yld2000-2d (**Barlat i sur. (2003)**) funkcije tečenja (Yld2000-2d-Var) na način da su parametri anizotropije i izotropni parametar funkcije m predstavljeni kao eksponencijalne funkcije ekvivalentne plastične deformacije. Razvijeni model implementiran je u program ABAQUS pri čemu je korišten polu-implicitni unutrašnji Eulerov integracijski postupak. Na slici 6.10.a prikazana je eksperimentalno dobivena duboko vučena posudica od čelika DP780 dok su na slici 6.10.b prikazana predviđanja profila posudice ostvarena razvijenim modelom Yld2000-2d-Var, te modelima koji ne uzimaju u obzir promjenu parametara a koji se temelje na različitim funkcijama tečenja (Yld2000-2d, Hill (1948), von Mises) te pretpostavljaju pridruženo pravilo tečenja. Razvijeni model Yld2000-2d-Var daje poboljšanja u predviđanju profila posudice u

usporedbi s modelima koji ne uzimaju u obzir promjenu parametara anizotropije s napredovanjem plastične deformacije.

a)



b)



Slika 6.10. a) Duboko vučena posudica, **b)** predviđanje profila duboko vučene posudice korištenjem različitih modela za čelik DP780. (Cai i sur. (2016))

7. ZAKLJUČAK

U ovom radu dan je pregled razvoja i primjene fenomenoloških anizotropnih elasto-plastičnih modela za opis ponašanja limova s izraženom anizotropijom. Pregledom dosadašnjih znanstvenih istraživanja utvrđeno je da materijali s izraženim anizotropnim ponašanjem zahtijevaju složeniji oblik funkcije tečenja koji uključuje i veći broj parametara anizotropije. Klasična teorija plastičnosti metala temelji se na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja odnosno jednakosti funkcije tečenja i plastičnog potencijala. Za razliku od modela koji se temelje na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja, u novije vrijeme sve češće se razvijaju napredniji konstitutivni modeli koji se temelje na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja prema kojoj su funkcija tečenja i plastični potencijal dvije različite funkcije. Dosadašnja teorijska razmatranja pokazuju da je opis stabilnog plastičnog toka moguć i kod pretpostavke o nepridruženom pravilu tečenja ako se nad konstitutivnim izrazima uvedu neka druga, manje zahtjevna ograničenja. Uvođenjem pretpostavke o nepridruženom pravilu tečenja, neovisno se opisuje anizotropija u naprezanju tečenja od anizotropije plastičnog toka. To u konačnici rezultira da se prihvatljiva predviđanja ponašanja materijala mogu dobiti korištenjem jednostavnih funkcija naprezanja s manjim brojem parametara anizotropije kao funkcije tečenja odnosno kao funkcije plastičnog potencijala.

U dosadašnjim istraživanjima različiti anizotropni elasto-plastični konstitutivni modeli ispitani su u predviđanju postupka cilindričnog dubokog vučenja posudica. Provedena istraživanja pokazuju da modeli temeljeni na pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja koji koriste jednostavnije funkcije naprezanja daje gotovo jednaka predviđanja ovog postupka u usporedbi s modelima temeljenim na pridruženom pravilu tečenja i složenijim funkcijama tečenja. I dok su se u prijašnjim istraživanjima parametri anizotropije uzimali kao konstantne veličine, provedena istraživanja upućuju na zaključak da se poboljšanja mogu ostvariti ako se navedeni parametri uzmu kao veličine koje se mijenjaju s napredovanjem plastične deformacije. Također, temeljem pregleda znanstvenih radova, može se konstatirati da za predviđanje cilindričnog dubokog vučenja ili nekog drugog postupka oblikovanja limova nitko od autora nije koristio modele koji se temelje na nepridruženom pravilu tečenja te uključuju promjenu parametara anizotropije funkcije tečenja kao i promjenu parametara anizotropije plastičnog potencijala. S obzirom na navedeno, buduća istraživanja bila bi usmjerena upravo

na razvijanje takvih modela. Također, razvijeni modeli temeljili bi se na složenijim funkcijama naprezanja kao što su Karafillis-Boyce (1993), Yld2000-2d i druge, a testirali bi se na primjeru nekoliko čelika te aluminijskih legura u postupku cilindričnog dubokog vučenja.

Literatura

1. Aleksandrović, S., Stefanović, M., Adamović, D., Lazić, V., 2009., Variation of Normal Anisotropy Ratio "r" during Plastic Forming. *Journal of Mechanical Engineering* 55(6), 392-399.
2. An, Y. G., Vegter, H., Melzer, S., Triguero, P. R., 2013. Evolution of the plastic anisotropy with straining and its implication on formability for sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 213(8), 1419-1425.
3. Aretz, H., 2004. Applications of a new plane stress yield function to orthotropic steel and aluminium sheet metals. *Modelling and simulation in Materials Science and Engineering*, 12(3), 491-509.
4. Aretz, H., 2005. A non-quadratic plane stress yield function for orthotropic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*, 168(1), 1-9.
5. Aretz, H., 2008. A simple isotropic-distortional hardening model and its application in elastic-plastic analysis of localized necking in orthotropic sheet metals. *International Journal of Plasticity*, 24(9), 1457-1480.
6. Aretz, H., Barlat, F., 2013. New convex yield functions for orthotropic metal plasticity. *International Journal of non-linear mechanics*, 51, 97-111.
7. Banabic, D., Bünge, H. J., Pöhlandt, K., Tekkaya, A. E., 2000. *Formability of Metallic Materials (Plastic Anisotropy, Formability Testing and Forming Limits)*, Editor: Banabic D..
8. Banabic, D., Aretz, H., Comsa, D.S., Paraianu, L., 2005. An improved analytical description of orthotropy in metallic sheets. *International Journal of Plasticity* 21, 493-512.
9. Barlat, F., Richmond, O., 1987. Prediction of tricomponent plane stress yield surfaces and associated flow and failure behavior of strongly textured f.c.c. polycrystalline sheets. *Materials Science and Engineering* 95, 15-29
10. Barlat, F., Lian, K., 1989. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *International Journal of Plasticity* 5, 51-66.
11. Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C., 1991. A 6-Component Yield Function for Anisotropic Materials. *International Journal of Plasticity* 7, 693-712.

12. Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J.C., Hayashida, Y., Lege, D.J., Matsui, K., Murtha, S.J., Hattori, S., Becker, R.C., Makosey, S., 1997. Yield function development for aluminum alloy sheets. *J Mech Phys Solids* 45, 1727-1763.
13. Barlat, F., Brem, J.C., Yoon, J.W., Chung, K., Dick, R.E., Lege, D.J., Pourgoghrat, F., Choi, S.H., Chu, E., 2003. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – part 1: theory. *International Journal of Plasticity* 19, 1297-1319.
14. Barlat, F., Aretz, H., Yoon, J.W., Karabin, M.E., Brem, J.C., Dick, R.E., 2005. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity* 21, 1009-1039.
15. Bassani, J.L., 1977. Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *International Journal of Mechanical Sciences* 19, 651-660.
16. Bishop, J.F.W., Hill, R., 1951-a. A theoretical deviation of the plastic properties of a polycrystalline face-centered metal. *Philos. Mag. Ser. 7* 42, 1298-1307.
17. Bishop, J.F.W., Hill, R., 1951-b. A theory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Philos. Mag.* 42, 414–427.
18. Bridgman, P.W., 1947. The Effect of Hydrostatic Pressure on the Fracture of Brittle Substances. *J. Appl. Phys* 18, 246-258.
19. Brünig, M., Obrecht, H., 1998. Finite elastic–plastic deformation behaviour of crystalline solids based on a non-associated macroscopic flow rule. *Int. J. Plasticity* 14, 1189–1208.
20. Bron, F., Besson, J., 2004. A yield function for anisotropic materials - Application to aluminum alloys. *International Journal of Plasticity* 20, 937-963.
21. Budianski, B., 1984. Anisotropic Plasticity of Plane-Isotropic Sheets. *Mechanics of Material Behavior*, 15-29.
22. Cai, Z., Diao, K., Wu, X., Wan, M. 2016. Constitutive modeling of evolving plasticity in high strength steel sheets. *International Journal of Mechanical Sciences*, 107, 43-57.
23. Cazacu, O., Barlat, F., 2004. A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals. *International Journal of Plasticity* 20, 2027-2045.
24. Cazacu, O., Plunkett, B., Barlat, F., 2006. Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals. *International Journal of Plasticity* 22, 1171-1194.
25. Cazacu, O., 2018. New yield criteria for isotropic and textured metallic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 139, 200-210.

26. Comsa, D.-S., Banabic, D., 2008. Plane-stress yield criterion for highly-anisotropic sheet metals, NUMISHEET 2008, Switzerland.
27. Cvitanić, V., 2006. Anizotropni elasto-plastični model aluminijskih legura temeljen na nepridruženom pravilu tečenja, (Doktorska disertacija, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split)
28. Cvitanić, V., Vlak, F., Lozina, Ž., 2007. An analysis of non-associated plasticity formulations in deep drawing simulations. Transactions of FAMENA, 31(2).
29. Cvitanić, V., Vlak, F., Lozina, Ž., 2008. A finite element formulation based on non-associated plasticity for sheet metal forming. International Journal of Plasticity, 24(4), 646-687.
30. Cvitanić, V., Kovačić, M., 2017. Algorithmic Formulations of Evolutionary Anisotropic Plasticity Models Based on Non-Associated Flow Rule. Latin American Journal of Solids and Structures, 14(10), 1853-1871.
31. Drucker, D. C., 1950. Some implications of work hardening and ideal plasticity, Q. Appl. Math., vol. 7, no. 4, pp. 411–418,
32. Drucker, D.C., 1951. A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations, First U.S. Nat. Congr. Applied Mechanics. ASME, pp. 487-491.
33. Drucker, D.C., 1959. A Definition of a Stable Inelastic Material. J. Appl. Mech. Trans. ASME, 26 101-107.
34. Drucker, D.C., Prager, W., 1952. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Q Appl Math 10, 157–165
35. Duplančić, I., 2007. Obrada deformiranjem, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Splitu.
36. Gotoh, M., 1977. A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state)—I. International Journal of Mechanical Sciences 19, 505- 512.
37. Hencky, H., 1924. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Z. Angew. Math. Mech. 4, 323–334
38. Hershey, A.V., 1954. The Plasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Face Centered Cubic Crystals. J. Appl. Mech. Trans. ASME 21, 241.
39. Hill, R., 1948-a. A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, Q.J. Meek Appl. Matk, Vol 1, 18-28
40. Hill, R., 1948-b. Theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals. Proc. Roy. Soc. A 193, 281–297.

41. Hill, R., 1950. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, Oxford.
42. Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3), 236-249.
43. Hill, R., 1979. Theoretical Plasticity of Textured Aggregates. *Math Proc Cambridge* 85, 179-191.
44. Hill, R., 1990. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J Mech Phys Solids* 38, 405-417.
45. Hill, R., 1993. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. *International Journal of Mechanical Sciences* 35, 19-25.
46. Hosford, W.F., 1972. A Generalized Isotropic Yield Criterion. *Journal of Applied Mechanics* 39, 607-609.
47. Hosford, W. F., 1979, On yield loci of anisotropic cubic metals, Proc. 7th North American Metalworking Conf., SME, Dearborn, MI.
48. Hu, W., 2003. Characterized behaviors and corresponding yield criterion of anisotropic sheet metals. *Materials Science and Engineering: A* 345, 139-144.
49. Huber, M., 1904. Specific work of strain as a measure of material effort, *Towarzystwo Politechniczne, Czas. Techniczne, Lwów*
50. ISO 10113, 2006. *Metallic Materials – Sheet and Strip – Determination of Plastic Strain Ratio*.
51. Izadpanah, S., Ghaderi, S. H., Gerdooei, M., 2016. Material parameters identification procedure for BBC2003 yield criterion and earing prediction in deep drawing. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115, 552-563.
52. Karafillis, A.P., Boyce, M., 1993. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids* 41, 1859–1886.
53. Khan, A.S., Huang, S., 1995. *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, New York.
54. Lade, P.V., Nelson, R.B., Ito, Y.M., 1987. Nonassociated Flow and stability of granular materials. *ASCE, J. Engrg. Mech.* 113, 1302–1318.
55. Lademo, O.G., Hopperstad, O.S., Langseth, M., 1999. An evaluation of yield criteria and flow rules for aluminium alloys. *Int. J. Plasticity* 15, 191–208.
56. Lee, J.H., 1988. Research note on a simple model for pressure-sensitive strain-hardening materials. *Int. J. Plasticity* 4, 265.

57. Lee, E. H., Stoughton, T. B., & Yoon, J. W. (2017). A yield criterion through coupling of quadratic and non-quadratic functions for anisotropic hardening with non-associated flow rule. *International Journal of Plasticity*, 99, 120-143.
58. Lin, S. B., Ding, J. L., 1996. A modified form of Hill's orientation-dependent yield criterion for orthotropic sheet metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(11), 1739-1764.
59. Li, M., Richmond, O., 1997. Intrinsic instability and non-uniformity of plastic deformation. *Int. J. Plasticity* 13, 765–784.
60. Lian, J., Shen, F., Jia, X., Ahn, D. C., Chae, D. C., Münstermann, S., Bleck, W., 2017. An evolving non-associated Hill48 plasticity model accounting for anisotropic hardening and r-value evolution and its application to forming limit prediction. *International Journal of Solids and Structures*, Article in Press.
61. Lubarda, V. A., Mastilovic, S., Knap, J. 1996. Some comments on plasticity postulates and non-associative flow rules. *International journal of mechanical sciences*, 38(3), 247-258
62. Melan, E., 1938. Zur plastizität des räumlichen kontinuums. *Ingenieur-Archiv*, 9(2), 116-126.
63. Mroz, Z., 1963. Non-associated flow laws in plasticity. *J. Mec.* 2, 21–42.
64. Park, T., Chung, K., 2012. Non-associated flow rule with symmetric stiffness modulus for isotropic-kinematic hardening and its application for earing in circular cup drawing. *International Journal of Solids and Structures* 49, 3582-3593.
65. Paulino, M., Yoon, J. W. 2015. Study on Yield Function and Plastic Potential Under Non-Associated Flow for Accurate Earing Prediction in Cup Drawing. *steel research international*, 86(8), 852-860.
66. Plunkett, B., Lebensohn, R. A., Cazacu, O., Barlat, F.. 2006. Anisotropic yield function of hexagonal materials taking into account texture development and anisotropic hardening. *Acta Materialia*, 54(16), 4159-4169.
67. Plunkett, B., Cazacu, O., & Barlat, F., 2008. Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals. *International Journal of Plasticity*, 24(5), 847-866.
68. Richmond, O., 1980. Plastic dilatancy in metals. In: Lee, E.H., Mallet, R.L. (Eds.), *Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and Computation*. p. 343.

69. Runesson, K., & Mroz, Z. , 1989. A note on non-associated plastic flow rules. *International journal of plasticity*, 5(6), 639-658.
70. Safaei, M., 2013-a. Constitutive modelling of anisotropic sheet metals based on a non-associated flow rule (Doctoral dissertation, Ghent University)
71. Safaei, M., Zang, S. L., Lee, M. G., De Waele, W. 2013-b. Evaluation of anisotropic constitutive models: Mixed anisotropic hardening and non-associated flow rule approach. *International Journal of Mechanical Sciences* 73, 53-68.
72. Safaei, M., Lee, M. G., Zang, S. L., De Waele, W. 2014. An evolutionary anisotropic model for sheet metals based on non-associated flow rule approach. *Computational Materials Science*, 81, 15-29.
73. Saxena, R. K., Dixit, P. M. 2009. Finite element simulation of earing defect in deep drawing. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 45(3-4), 219-233.
74. Soare, S., Yoon, J.W., Cazacu, O., 2008. On the use of homogeneous polynomials to develop anisotropic yield functions with applications to sheet forming. *International Journal of Plasticity* 24, 915-944.
75. Spitzig, W.A., Richmond, O., 1984. The effect of pressure on the flow stress of metals. *Acta Metall.* 32, 457–463.
76. Stoughton, T.B., 2002. A non-associated flow rule for sheet metal forming. *Int. J. Plasticity* 18, 687–714.
77. Stoughton, T.B., Yoon, J.W., 2004. A pressure-sensitive yield criterion under a non-associated flow rule for sheet metal forming. *Int. J. Plasticity* 20, 705–731.
78. Stoughton, T.B., Yoon, J.W., 2006. Review of Drucker’s postulate and the issue of plastic stability in metal forming. *Int. J. Plasticity* 22, 391–433.
79. Stoughton, T. B., Yoon, J. W., 2009. Anisotropic hardening and non-associated flow in proportional loading of sheet metals. *International Journal of Plasticity*, 25(9), 1777-1817.
80. Taylor, G., 1938. Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals* 62, 307-324
81. Vrh, M., Halilović, M., Starman, B., Štok, B., Comsa, D. S., Banabic, D. 2011. Earing prediction in cup drawing using the bbc2008 yield criterion. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1383, No. 1, pp. 142-149). Article in Press.

82. Vrh, M., Halilović, M., Starman, B., Štok, B., Comsa, D. S., Banabic, D., 2014. Capability of the BBC2008 yield criterion in predicting the earing profile in cup deep drawing simulations. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 45, 59-74.
83. Yoon, J. W., Yang, D. Y., Chung, K. 1999. Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials.
84. Yoon, J.W., Barlat, F., Chung, K., Pourboghraat, F., Yang, D.Y., 2000. Earing predictions based on asymmetric nonquadratic yield function. *International Journal of Plasticity* 16, 1075-1104.
85. Yoon, J. W., Barlat, F., Dick, R. E., Chung, K., Kang, T. J. 2004. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part II: FE formulation and its implementation. *International Journal of Plasticity*, 20(3), 495-522.
86. Yoon, J.W., Barlat, F., Dick, R.E., Karabin, M.E., 2006. Prediction of six or eight ears in a drawn cup based on a new anisotropic yield function. *International Journal of Plasticity* 22, 174-193.
87. Yoon, J.-H., Cazacu, O., Whan Yoon, J., Dick, R.E., 2010. Earing predictions for strongly textured aluminum sheets. *International Journal of Mechanical Sciences* 52,1563-1578.
88. Yoshida, F., Hamasaki, H., Uemori, T., 2014. A model of anisotropy evolution of sheet metals. *Procedia Engineering*, 81, 1216-1221.
89. Wang, H., Wan, M., Wu, X., Yan, Y., 2009. The equivalent plastic strain-dependent Yld2000-2d yield function and the experimental verification. *Computational materials science*, 47(1), 12-22.
90. Wu, H.C., 2002. Anisotropic plasticity for sheet metals using the concept of combined isotropic–kinematic hardening. *Int. J. Plasticity* 18, 1661–1682.
91. Woodthorpe, J., Pearce, R., 1970. The anomalous behaviour of aluminium sheet under balanced biaxial tension. *International Journal of Mechanical Sciences* 12, 341- 347.
92. Zamiri, A., Pourboghraat, F., 2007. Characterization and development of an evolutionary yield function for the superconducting niobium sheet. *International journal of Solids and structures*, 44(25-26), 8627-8647.

Sažetak

U ovom radu dan je pregled razvoja i primjene fenomenoloških anizotropnih elasto-plastičnih modela za opis ponašanja limova s izraženom anizotropijom. Jedna od temeljnih pretpostavki klasične teorije plastičnosti metala je pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja prema kojoj se u fenomenološkim konstitutivnim modelima anizotropnih materijala jednom funkcijom opisuje anizotropija u naprezanju tečenja i anizotropija plastičnog toka. Ovakav pristup zahtjeva razvoj složenih anizotropnih funkcija tečenja s većim brojem parametara anizotropije. Nasuprot tome, u konstitutivnim modelima temeljenim na nepridruženom pravilu tečenja anizotropija u naprezanju tečenja i anizotropija plastičnog toka opisani su s dvije zasebne funkcije koje mogu imati jednostavniju matematičku formu i manji broj parametara anizotropije. Novija istraživanja ukazuju da se poboljšanja anizotropnih elasto-plastičnih konstitutivnih modela za limove mogu postići ako se u modele uključi i opis promjene plastične anizotropije s napredovanjem plastične deformacije u samom postupku oblikovanja materijala.

U ovom radu razmatrane su osnovne značajke anizotropnog ponašanja limova te su prikazane osnove klasične teorije plastičnosti metala koja se temelji na pretpostavci o pridruženom pravilu tečenja. Predstavljeni su uvjeti stabilnosti plastičnog toka uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja te su kronološki opisane različite izotropne i anizotropne funkcije tečenja. Analizirani su anizotropni elasto-plastični konstitutivni modeli za limove koji koriste konstantne ili promjenjive parametre anizotropije te pretpostavku o pridruženom ili nepridruženom pravilu tečenja. Razmatrana su predviđanja postupka cilindričnog dubokog vučenja ostvarena korištenjem prethodno opisanih modela te su izneseni zaključci i smjernice za budući rad.

Popis oznaka i kratica

AFR	pridruženo pravilo tečenja
A, C, P, H	parametri anizotropije Yld89 funkcije tečenja
b, b_0	konačna i početna širina uzorka
c	parametar udjela funkcija
C	parametar anizotropije Karafillis-Boyce (1993) funkcije tečenja
c_1, c_2, c_3	parametri anizotropije Yld94 funkcije tečenja
c_{1-6}	parametri anizotropije Yld6 funkcije tečenja
C, P, Q	parametri anizotropije Hill (1993) funkcije tečenja
\mathbf{C}^e	tenzor elastičnosti
$\mathbf{C}', \mathbf{C}''$	matrice linearne transformacije
F	uvjet tečenja
F, G, H	parametri anizotropije Hosford (1979) funkcije tečenja
F, G, H, A, B, C	parametri anizotropije Hill (1979) funkcije tečenja
F, G, H, L, M, N	parametri anizotropije Hill (1948) funkcije tečenja
f_y	funkcija tečenja
f_p	funkcija plastičnog potencijala
\mathbf{g}	tenzorska funkcija naprezanja
g	skalarna funkcija naprezanja
J_2, J_3	druga i treća invarijanta tenzora naprezanja
J_2'	druga invarijanta devijatorskog dijela tenzora naprezanja
K_1, K_2	invarijanta devijatorskog dijela tenzora naprezanja
l, l_0	konačna i početna mjerna duljina uzorka
$\mathbf{L}', \mathbf{L}''$	matrice transformacije
m	eksponent nekvadratične funkcije tečenja

NAFR	nepridruženo pravilo tečenja
n, m	eksponenti izotropne funkcije tečenja
\mathbf{n}	normala na tangencijalnu ravninu plohe tečenja
p	hidrostatički tlak
\mathbf{p}	matrica transformacije
p_{ik}	komponente matrice transformacije
r	Lankfordov parametar, parametar plastične anizotropije
r_b	nagib plohe tečenja za stanje ujednačenog dvoosnog naprezanja
r_θ	Lankfordov parametar za orijentaciju θ
\bar{r}	parametar normalne anizotropije
Δr	parametar ravninske anizotropije
s_1, s_2, s_3	sojstvene vrijednosti devijatorskog dijela tenzora naprezanja
$\tilde{\mathbf{s}}$	ekvivalentni izotropni tenzor naprezanja
$\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3$	sojstvene vrijednosti ekvivalentnog izotropnog tenzora naprezanja
$\tilde{\mathbf{s}}', \tilde{\mathbf{s}}''$	linearno transformirani tenzori naprezanja
s'_1, s'_2, s'_3	sojstvene vrijednosti linearno transformiranog tenzora naprezanja
s''_1, s''_2, s''_3	sojstvene vrijednosti linearno transformiranog tenzora naprezanja
s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}	komponente devijatorskog dijela Cauchyevog tenzora naprezanja
t, t_0	konačna i početna debljina uzorka
t	vrijeme
x, y, z	pravci materijalne simetrije
$X'_{1,2}, X''_{1,2}$	sojstvene vrijednosti linearno transformirani tenzori naprezanja
W	rad dodatnog opterećenja po jedinici volumena
α'	parametar tlaka
α_1, α_2	parametri anizotropije Karafillis-Boyce (1993) funkcije tečenja

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	težinski faktori Yld96 funkcije tečenja ovisni o materijalnim karakteristikama i stanju naprezanja
α_{1-6}	parametri anizotropije Yld2000-2d funkcije tečenja
α_{1-18}	parametri anizotropije Yld2004-18p funkcije tečenja
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	parametri anizotropije funkcije tečenja
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	parametri anizotropije
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	parametri anizotropije Karafillis-Boyce (1993) funkcije tečenja
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenzor ukupne deformacije
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	tenzor elastične deformacije
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	tenzor plastične deformacije
$\bar{\varepsilon}^p$	ekvivalentna plastična deformacija
ε_{11}^p	logaritamska mjera stvarne plastične deformacije na pravcu duljine uzorka
ε_{22}^p	logaritamska mjera stvarne plastična deformacija na pravcu širine uzorka
ε_{33}^p	logaritamska mjera stvarne plastična deformacija na pravcu debljine uzorka
θ	kut koji os uzorka lima zatvara s referentnim pravcem
κ	materijalni parametar u izrazu za uvjet tečenja, funkcija očvršćivanja
$d\lambda$	plastični množitelj, parametar konzistentnosti
$\lambda_1, \lambda_2, \nu, \rho$	parametri anizotropije Hill (1948) funkcije tečenja
φ	varijabla očvršćivanja
φ_1, φ_2	konveksne nekvadratične funkcije tečenja
φ', φ''	konveksne funkcije komponenti linearno transformiranih tenzora naprezanja
$\boldsymbol{\sigma}$	tenzor naprezanja
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	glavna naprezanja
σ_b	vrijednost ujednačenog dvoosnog naprezanja tečenja
σ_{max}	maksimalno glavno naprezanje

σ_{min}	minimalno glavno naprezanje
σ_y	naprezanje tečenja
σ_θ	naprezanje tečenja za orijentaciju θ
$d\sigma^n$	normalna komponenta inkrementa naprezanja
$d\sigma^t$	tangencijalna komponenta inkrementa naprezanja
τ_{max}	maksimalno posmično naprezanje
τ_{s1}, τ_{s2}	posmična naprezanja tečenja određena u različitim testovima
τ_y	naprezanje tečenja u testu čistog smicanja