

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Dražen Kustura

**UTJECAJ SMICANJA KOD
TANKOSTJENIH ŠTAPOVA MALE
ZAKRIVLJENOSTI DVOOSNO
SIMETRIČNIH OTVORENIH POPREČNIH
PRESJEKA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Split, 2023.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Dražen Kustura

*Utjecaj smicanja kod tankostjenih štapova male
zakrivljenosti dvoosno simetričnih otvorenih poprečnih
presjeka*

DOKTORSKA DISERTACIJA

Split, 2023.

Bibliografski podaci

Disertacija je izrađena na Zavodu za strojarstvo i brodogradnju, Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu.

Mentor: prof. dr. sc. Frane Vlak

Rad br. ***

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

Ključne riječi: tankostjeni štap male zakrivljenosti, otvoreni poprečni presjek s dvije osi simetrije, utjecaj smicanja, opterećenje u ravnini zakrivljenosti, opterećenje izvan ravnine zakrivljenosti

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Temeljne tehničke znanosti i Strojarstvo

Znanstvena grana: Tehnička mehanika (mehanika krutih i deformabilnih tijela) i Opće strojarstvo (konstrukcije)

Institucija na kojoj je rad izrađen: Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

Mentor rada: prof. dr. sc. Frane Vlak

Broj stranica: 127

Broj slika: 35

Broj tablica: 61

Broj korištenih bibliografskih jedinica: 42

Podaci o ocjeni i obrani disertacije

Povjerenstvo za ocjenu disertacije:

1. xxx
2. xxx
3. xxx
4. xxx
5. xxx

Povjerenstvo za obranu disertacije:

1. xxx
2. xxx
3. xxx
4. xxx
5. xxx

Disertacija obranjena dana: xx. mjesec 20xx.

Utjecaj smicanja kod tankostjenih štapova male zakrivljenosti dvoosno simetričnih otvorenih poprečnih presjeka

Sažetak:

U ovoj disertaciji je predložen analitički postupak za statičku analizu tankostjenih izotropnih štapova male zakrivljenosti pri čemu je kutna deformacija srednje plohe uzeta u obzir. Predloženi postupak je primijenjen na I i H profile s dvije osi simetrije, uz različite istovjetne oslonce na krajevima štapa (uklještenja i zglobni oslonci) te za opterećenja koja djeluju u ravnini zakrivljenosti ili izvan ravnine zakrivljenosti.

S ciljem lakše primjene, u ovom modelu su korištene geometrijske značajke ravnog štapa te su uvedena dodatna pojednostavljena temeljnih jednadžbi zbog utjecaja smicanja. Zbog toga se predložena analitička rješenja mogu smatrati približnima. Iz priloženih rješenja za kratke štapove slijedi da se Vlasovljevi pomaci i obodno normalno naprezanje, u kojima je zanemaren utjecaj smicanja, moraju nadopuniti novouvedenim članovima koji uključuju taj utjecaj. Upravo zbog toga predloženi model predstavlja proširenje kako Vlasovljevog modela štapa male zakrivljenosti, tako i teorije savijanja i teorije uvijanja ravnog izotropnog tankostjenog štapa s utjecajem smicanja.

Ključne značajke analize zakrivljenih štapova odnose se na spregnutost komponenti unutarnji sila i pomaka, a koja se ne javljaju u analizi ravnih štapova. Na primjeru štapa opterećenog jednoliko raspodijeljenim opterećenjima po jedinici duljine, u vidu sila i momenta uvijanja, provedena je parametarska analiza utjecaja smicanja na pomake i na obodna normalna naprezanja. Numerički rezultati koji su određeni primjenom ljuskastih konačnih elementa su uspoređeni s analitičkim rješenjima predloženog modela i s rješenjima Vlasovljevog modela štapa male zakrivljenosti. Iz dobivenih rezultata slijedi da je, kod kratkih zakrivljenih štapova, utjecaj smicanja veći na pomake nego na obodna normalna naprezanja (bez obzira da li opterećenje djeluje u ravnini zakrivljenosti ili izvan ravnine zakrivljenosti), a također je pokazano da je utjecaj smicanja veći kod obostrano uklještenih štapova nego kod zglobno oslonjenih štapova.

Ključne riječi:

tankostjeni štap male zakrivljenosti, otvoreni poprečni presjek s dvije osi simetrije, utjecaj smicanja, opterećenje u ravnini zakrivljenosti, opterećenje izvan ravnine zakrivljenosti

Shear influence for the thin-walled curved beams with small curvature and bi-symmetrical open cross-sections

Abstract:

This thesis proposes an analytical approach for the static analysis of isotropic thin-walled beams with small curvature that takes into account the shear strain in the middle-surface. The proposed approach has been applied to I- and H-shaped cross-sections with two axes of symmetry, with different identical supports at the beam ends (clamped and simply supported) and for loads acting in the plane of curvature or outside the plane of curvature.

The geometrical properties of a straight thin-walled beam have been used in this model in order to simplify the proposed approach and the additional simplifications of the governing equations due to shear have been introduced also. Due to this reason, the proposed analytical solutions can be considered as approximative ones. According to the obtained solutions for short curved beams, it follows that the Vlasov solutions for displacements and the circumferential normal stress, where shear influence is neglected, must be supplemented with additional terms that take this effect into account. For this reason, the proposed model is an extension of both the Vlasov model of a beam with small curvature and the theory of bending and the theory of torsion of an isotropic thin-walled straight beam under the influence of shear.

The key aspect of the curved beams analysis is the coupling effect of internal forces and displacements that do not occur in the analysis of straight beams. A parametric analysis of the shear influence on the displacements and circumferential normal stresses was performed using the example of a curved thin-walled beam loaded with uniformly distributed loads per unit length (as forces and torsional moments). The numerical results obtained with the finite shell elements were compared with the analytical solutions of the proposed model and with the solutions of the Vlasov's beam model with small curvature. It is shown that the influence of shear on displacements is greater than on circumferential normal stresses for short curved beams (regardless of whether the load acts in the plane of curvature or outside the plane of curvature), and it was also shown that the influence of shear is greater for clamped beams than for simply supported beams.

Keywords:

thin-walled beam with small curvature, open cross-section with two axes of symmetry, shear influence, in-plane loading, out-of-plane loading

Zahvala

Sadržaj

Bibliografski podaci.....	vi
Podaci o ocjeni i obrani disertacije	vii
Sažetak:.....	viii
Abstract:.....	ix
Zahvala.....	x
Sadržaj.....	xi
Popis tablica	xiii
Popis slika	xv
Popis oznaka	xvii
Popis kratica.....	xxii
1. UVOD	1
1.1. Motivacija za provođenje istraživanja	1
1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja	2
1.3. Hipoteza doktorskog istraživanja	10
1.4. Opis i metodologija istraživanja	11
1.5. Znanstveni doprinosi rada.....	11
1.6. Pregled rada	12
2. UTJECAJ SMICANJA KOD TANKOSTJENIH ZAKRIVLJENIH ŠTAPOVA	13
2.1. Jednadžbe ravnoteže	13
2.2. Pomaci i deformacije	18
2.3. Temeljni izrazi zakrivljenog štapa s utjecajem smicanja	21
2.4. Temeljne jednadžbe uslijed djelovanja opterećenja u ravnini zakrivljenosti	29
2.5. Temeljne jednadžbe uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti	33

3. ŠTAPOVI MALE I SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI S OTVORENIM DVOOSNO SIMETRIČNIM POPREČNIM PRESJECIMA	38
3.1. I profil s dvije osi simetrije uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti.....	42
3.1.1. Utjecaj raspodijeljenog opterećenja q_z na I profil	44
3.1.2. Utjecaj raspodijeljenog opterećenja m_p na I profil.....	59
3.2. H profil s dvije osi simetrije uslijed djelovanja opterećenja u ravnini zakrivljenosti	72
4. ZAKLJUČAK	89
LITERATURA	92
PRILOZI	96
PRILOG A	96
PRILOG B	98
PRILOG C	102
PRILOG D	104
PRILOG E.....	105
Životopis	
Curriculum Vitae	

Popis tablica

Tablica 2.1. Rubni uvjeti bez utjecaja smicanja.	27
Tablica 2.2. Veličine pomoću kojih se definiraju rubni uvjeti zbog koncentriranih opterećenja.	28
Tablica 3.1. Faktor η_{σ}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	45
Tablica 3.2. Faktor η_{σ}^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	45
Tablica 3.3. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	46
Tablica 3.4. Faktor η_w^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	48
Tablica 3.5. Faktor η_w^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	48
Tablica 3.6. Relativna pogreška ρ_w^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	48
Tablica 3.7. Faktor η_{α}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	49
Tablica 3.8. Faktor η_{α}^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	50
Tablica 3.9. Relativna pogreška ρ_{α}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	50
Tablica 3.10. Faktor η_{σ}^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	52
Tablica 3.11. Faktor η_w^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z	52
Tablica 3.12. Faktor η_{σ}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	53
Tablica 3.13. Faktor η_w^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	55
Tablica 3.14. Faktor η_w^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	56
Tablica 3.15. Relativna pogreška ρ_w^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	56
Tablica 3.16. Faktor η_{α}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	56
Tablica 3.17. Faktor η_{α}^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	57
Tablica 3.18. Relativna pogreška ρ_{α}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	57
Tablica 3.19. Faktor η_{σ}^{RS} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	58
Tablica 3.20. Faktor η_w^{RS} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	58
Tablica 3.21. Faktor η_{σ}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	62
Tablica 3.22. Faktor η_{σ}^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	62
Tablica 3.23. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	62
Tablica 3.24. Faktor η_{α}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	63
Tablica 3.25. Faktor η_{α}^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	63
Tablica 3.26. Relativna pogreška ρ_{α}^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	64
Tablica 3.27. Faktor η_w^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	64
Tablica 3.28. Faktor η_{σ}^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p	66

Tablica 3.29. Faktor η_{α}^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .	66
Tablica 3.30. Faktor η_{σ}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	68
Tablica 3.31. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	68
Tablica 3.32. Faktor η_{α}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	69
Tablica 3.33. Faktor η_{α}^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	69
Tablica 3.34. Relativna pogreška ρ_{α}^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	69
Tablica 3.35. Faktor η_w^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	70
Tablica 3.36. Faktor η_{α}^{RS} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	71
Tablica 3.37. Faktor η_{σ}^S kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	75
Tablica 3.38. Faktor η_{σ}^{FEM} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	75
Tablica 3.39. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	75
Tablica 3.40. Faktor η_v^S kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	77
Tablica 3.41. Faktor η_v^{FEM} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	78
Tablica 3.42. Relativna pogreška ρ_v^S kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	78
Tablica 3.43. Faktor η_u^S kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	78
Tablica 3.44. Faktor η_u^{FEM} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	79
Tablica 3.45. Relativna pogreška ρ_u^S kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	79
Tablica 3.46. Faktor η_{σ}^{RS} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	80
Tablica 3.47. Faktor η_v^{RS} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	81
Tablica 3.48. Faktor η_{σ}^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	83
Tablica 3.49. Faktor η_{σ}^{FEM} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	83
Tablica 3.50. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	83
Tablica 3.51. Faktor η_v^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	85
Tablica 3.52. Faktor η_v^{RS} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	85
Tablica 3.53. Relativna pogreška ρ_v^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	85
Tablica 3.54. Faktor η_u^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	86
Tablica 3.55. Faktor η_u^{FEM} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	86
Tablica 3.56. Relativna pogreška ρ_u^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	86
Tablica 3.57. Faktor η_{σ}^{RS} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	88
Tablica 3.58. Faktor η_v^{RS} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	88
Tablica B.1. Geometrijske značajke kod I i H profila s dvije osi simetrije [17].	98

Popis slika

Slika 1.1. Koordinatni sustavi: a) ravnog štapa; b) zakrivljenog štapa.....	3
Slika 1.2. Raspodjela posmičnog naprezanja po debljini stijenke: a) ukupno naprezanje $\tau_{x\xi}$; b) jednoliko naprezanje $\tau_{x\xi}^c$; c) linearno naprezanje $\tau_{x\xi}^l$ [4].....	4
Slika 2.1. Tankostjeni zakrivljeni štap.....	13
Slika 2.2. Komponente unutarnjih sila odsječka ravnog štapa [4].....	14
Slika 2.3. Odsječak težišne linije zakrivljenog štapa s unutarnjim silama.	16
Slika 3.1. Srednja linija poprečnog presjeka s dvije osi simetrije: a) I profil; b) H profil.....	39
Slika 3.2. Opterećenje na jedinicu duljine i rubni uvjet u FEM modelu I profila: a) opterećenje q_z i uklještenje; b) opterećenje m_p i zglobni oslonac.	40
Slika 3.3. Zglobni oslonac i radijalna sila na jedinicu duljine q_y u FEM modelu H profila. ..	41
Slika 3.4. Uklješteni I profil opterećen silom na jedinicu duljine q_z	44
Slika 3.5. Deformirani i nedeformirani numerički model uklještenog I profila opterećenog s q_z	45
Slika 3.6. Raspodjela obodnog naprezanja σ_ϕ^{op} u gornjem pojasu uklještenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z ($L/h = 5$, $\tilde{x}/L = 0.5$): a) $R/h = 10$; b) $R/h = 20$..	47
Slika 3.7. Odnos $(b\alpha_P^{FEM}/2)/w_P^{FEM}$ kod uklještenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z	51
Slika 3.8. Zglobno oslonjeni I profil opterećen silom na jedinicu duljine q_z	53
Slika 3.9. Deformirani i nedeformirani numerički model zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z	54
Slika 3.10. Raspodjela obodnog naprezanja σ_ϕ^{op} u gornjem pojasu zglobno oslonjenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z ($L/h = 3$, $R/h = 30$, $\tilde{x}/L = 0.5$).....	55
Slika 3.11. Odnos $(b\alpha_P^{FEM}/2)/w_P^{FEM}$ kod zglobno oslonjenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z	58
Slika 3.12. Uklješteni I profil opterećen momentom na jedinicu duljine m_p	60
Slika 3.13. Deformirani i nedeformirani numerički model uklještenog I profila opterećenog s m_p	60
Slika 3.14. Raspodjela obodnog naprezanja σ_ϕ^{op} u gornjem pojasu uklještenog I profila koji je opterećen s m_p ($L/h = 3$, $\tilde{x}/L = 0.5$): a) $R/h = 10$; b) $R/h = 20$	61

Slika 3.15. Odnos $w_p^{FEM}/(b\alpha_p^{FEM}/2)$ kod ukliještenog I profila koji je opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .	65
Slika 3.16. Zglobno oslonjeni I profil opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .	67
Slika 3.17. Deformirani i nedeformirani numerički model zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .	67
Slika 3.18. Odnos $w_p^{FEM}/(b\alpha_p^{FEM}/2)$ kod zglobno oslonjenog I profila koji je opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .	70
Slika 3.19. Ukliješteni H profil opterećen silom na jedinicu duljine q_y .	74
Slika 3.20. Deformirani i nedeformirani numerički model ukliještenog H profila opterećenog s q_y .	74
Slika 3.21. Raspodjela obodnog naprezanja σ_ϕ^{ip} kod ukliještenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y ($L/h = 5, R/h = 20$): a) unutarnji pojas; b) vanjski pojas.	76
Slika 3.22. Odnos u_M^{FEM}/v_P^{FEM} kod ukliještenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y za $\tilde{x} = L/4$.	80
Slika 3.23. Zglobno oslonjeni H profil opterećen silom na jedinicu duljine q_y .	82
Slika 3.24. Deformirani i nedeformirani numerički model zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .	82
Slika 3.25. Raspodjela obodnog naprezanja σ_ϕ^{ip} kod zglobno oslonjenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y ($L/h = 5, R/h = 20$): a) unutarnji pojas; b) vanjski pojas.	84
Slika 3.26. Odnos u_M^{FEM}/v_P^{FEM} kod zglobno oslonjenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y za $\tilde{x} = L/4$.	87
Slika B.1. I profil s dvije osi simetrije, definiranje predznaka koordinata a) s_z ; b) s_α [17].	99
Slika B.2. H profil s dvije osi simetrije, definiranje predznaka koordinate s_y [17].	99
Slika B.3. I profil s dvije osi simetrije, raspodjele: a) $\int_0^{s_z} S_y^*/tds$; b) $\int_0^{s_\alpha} S_\omega^*/tds$ [17].	100
Slika B.4. Raspodjela $\int_0^{s_y} S_z^*/tds$ kod H profila s dvije osi simetrije: izrazi; a) izrazi; b) grafički prikaz [17].	101

Popis oznaka

Oznaka	Opis
A	površina poprečnog presjeka
a_y, a_z	koordinate glavnog pola
b	širina pojasa
B, \tilde{B}	bimoment
B^ω	sekundarni bimoment pri uvijanju s utjecajem smicanja
D_z, D_ω	geometrijske značajke u kojima je sadržan utjecaj zakrivljenosti i oblika poprečnog presjeka
E	modul elastičnosti
G	modul smicanja
h	širina struka
h^*	najveća dimenzija poprečnog presjeka
$\mathbf{I}^p, \mathbf{I}^{op}$	vektor opterećenja
I_p	moment tromosti površine u odnosu na glavni pol
I_t	torzijski moment tromosti površine u odnosu na glavni pol
I_y	aksijalni momenti tromosti površine u odnosu na y os
I_z	aksijalni momenti tromosti površine u odnosu na z os
I_ω	sektorski moment tromosti površine
$\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^{op}$	matrica polja
K_ω	geometrijska značajka I i H profila s dvije osi simetrije
L	duljina nedeformirane težišne linije
\mathbf{L}	matrica kosinusa smjerova
M	ishodišna točka
m_p	moment uvijanja na jedinicu duljine u odnosu na glavni pol
M_p	moment uvijanja u odnosu na glavni pol
m_t	moment čistog uvijanja na jedinicu duljine
M_t	moment čistog uvijanja u odnosu na glavni pol
M_y, \tilde{M}_y	moment savijanja oko osi y (moment savijanja izvan ravnine zakrivljenosti)

M_y^z	sekundarni moment savijanja oko osi y pri savijanju s utjecajem smicanja
M_z, \widetilde{M}_z	moment savijanja oko osi z (moment savijanja u ravnini zakrivljenosti)
M_z^y	sekundarni moment savijanja oko osi z pri savijanju s utjecajem smicanja
m_ω	moment izvitoperenja na jedinicu duljine
M_ω	moment izvitoperenja u odnosu na glavni pol
N, \widetilde{N}	uzdužna sila (obodna sila)
N^*	sekundarna uzdužna sila
$O\rho\phi Z$	cilindrični koordinatni sustav zakrivljenog štapa
P	glavni pol
q_x	sila na jedinicu duljine u smjeru osi x (obodna sila na jedinicu duljine)
q_y	sila na jedinicu duljine u smjeru osi y (radijalna sila na jedinicu duljine)
Q_y	poprečna sila u smjeru osi y (radijalna poprečna sila)
q_z	sila na jedinicu duljine u smjeru z
Q_z	poprečna sila u smjeru osi z (poprečna sila okomita na ravninu zakrivljenosti)
R	polumjer zakrivljenosti nedeformirane težišne linije
S	točka srednje linije
s, s_y, s_z, s_α	krivocrtne koordinate
S_y^*	statički moment površine odsječenog dijela poprečnog presjeka u odnosu na y os
S_z^*	statički moment površine odsječenog dijela poprečnog presjeka u odnosu na z os
S_ω^*	sektorski statički moment površine odsječenog dijela poprečnog presjeka
t	debljina stjenke
T	težište poprečnog presjeka

T_1, \dots, T_6	karakteristične točke poprečnog presjeka
t_0	debljina struka
t_1	debljina pojasa
$Txyz$	koordinatni sustav poprečnog presjeka nedeformiranog štapa
\overline{Txyz}	koordinatni sustav poprečnog presjeka deformiranog štapa
u_{avg}	prosječni obodni pomak poprečnog presjeka
u_M	pomak ishodišne točke u smjeru osi x (obodni pomak ishodišne točke)
$u_{M,S}, v_{P,S}, w_{P,S}$	translatorni pomaci zbog smicanja
$u_{M,VL}, v_{P,VL}, w_{P,VL}$	translatorni pomaci bez utjecaja smicanja
u_S	pomak proizvoljne točke srednje linije u smjeru osi x (obodni pomak proizvoljne točke)
u_S^I	obodni pomak kod I profila s dvije osi simetrije
u_S^H	obodni pomak kod H profila s dvije osi simetrije
v	pomak proizvoljne točke srednje linije u smjeru osi y
$\mathbf{v}^{ip}, \mathbf{v}^{op}$	vektor stanja
$\mathbf{v}_0^{ip}, \mathbf{v}_0^{op}$	početni vektor stanja
v_P	pomak glavnog pola u smjeru osi y (radijalni pomak glavnog pola)
v_S	pomak proizvoljne točke srednje linije u smjeru osi ξ
w	pomak proizvoljne točke srednje linije u smjeru osi z
w_P	pomak glavnog pola u smjeru osi z
\tilde{x}	krivocrtna koordinata

Grčka slova

α_P	kut uvijanja konture presjeka u odnosu na glavni pol
$\alpha_{P,S}, \beta_S, \gamma_S, \vartheta_S$	rotacijski pomaci zbog smicanja
$\alpha_{P,VL}, \beta_{VL}, \gamma_{VL}, \vartheta_{VL}$	rotacijski pomaci bez utjecaja smicanja
β	kut nagiba tangente na elastičnu liniju u odnosu na os y
γ	kut nagiba tangente na elastičnu liniju u odnosu na os z
$\gamma_{x\xi}$	kutna deformacija u srednjoj plohi ravnog štapa
$\gamma_{\phi\xi}$	kutna deformacija u srednjoj plohi zakrivljenog štapa
ε_x	duljinska deformacija proizvoljnog vlakna ravnog štapa
ε_ϕ	duljinska deformacija proizvoljnog vlakna zakrivljenog štapa
ε_ϕ^I	duljinska deformacija I profila s dvije osi simetrije
ε_ϕ^H	duljinska deformacija H profila s dvije osi simetrije
ε_ϕ^*	duljinska deformacija težišne linije zakrivljenog štapa
η	normala na srednju liniju
η_u^S, η_u^{FEM}	faktor utjecaja smicanja na obodni pomak u_M
η_v^S, η_v^{FEM}	faktor utjecaja smicanja na progib v_P
η_w^S, η_w^{FEM}	faktor utjecaja smicanja na progib w_P
$\eta_\alpha^S, \eta_\alpha^{FEM}$	faktor utjecaja smicanja na kut uvijanja α_P
$\eta_\sigma^S, \eta_\sigma^{FEM}$	faktor utjecaja smicanja na obodno naprezanje σ_ϕ
η_u^{RS}	faktor utjecaja zakrivljenosti na obodni pomak u_M
η_v^{RS}	faktor utjecaja zakrivljenosti na progib v_P
η_w^{RS}	faktor utjecaja zakrivljenosti na progib w_P
η_α^{RS}	faktor utjecaja zakrivljenosti na kut uvijanja α_P
η_σ^{RS}	faktor utjecaja zakrivljenosti na obodno naprezanje σ_ϕ
ϑ	relativni kut uvijanja
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$	zakrivljenosti težišne linije u odnosu na osi x, y i z
$\kappa_{\bar{x}}, \kappa_{\bar{y}}, \kappa_{\bar{z}}$	zakrivljenosti težišne linije u odnosu na osi \bar{x}, \bar{y} i \bar{z}
κ_{yy}	faktor smicanja u odnosu pomak v_P
κ_{zz}	faktor smicanja u odnosu pomak w_P
$\kappa_{\omega\omega}$	faktor smicanja u odnosu pomak α_P

ξ	tangenta na srednju liniju
$\rho_w^s, \rho_u^s, \rho_{u,VL}^s$	relativna pogreška pomaka u_M
$\rho_v^s, \rho_{v,VL}^s$	relativna pogreška pomaka v_P
$\rho_w^s, \rho_{w,VL}^s$	relativna pogreška pomaka w_P
$\rho_\alpha^s, \rho_{\alpha,VL}^s$	relativna pogreška kuta uvijanja α_P
$\rho_\sigma^s, \rho_{\sigma,VL}^s$	relativna pogreška obodnog naprezanja σ_ϕ
σ_x	normalno naprezanje u uzdužnom smjeru ravnog štapa
σ_ϕ	obodno normalno naprezanje zakrivljenog štapa
σ_ϕ^{ip}	obodno normalno naprezanje zakrivljenog štapa opterećenog u ravnini zakrivljenosti
σ_ϕ^{op}	obodno normalno naprezanje zakrivljenog štapa opterećenog izvan ravnine zakrivljenosti
$\tau_{x\xi}$	ukupno posmično naprezanje ravnog štapa
$\tau_{x\xi}^c$	jednoliko posmično naprezanje ravnog štapa
$\tau_{x\xi}^l$	linearno raspodijeljeno posmično naprezanje ravnog štapa
$\tau_{x\xi}^\phi$	jednoliko posmično naprezanje zakrivljenog štapa
ν	Poissonov koeficijent
φ	kut normale η na srednju liniju i osi y
ϕ	obodni kut zakrivljenog štapa
Φ	ukupni obuhvatni kut zakrivljenog štapa
ω	sektorska koordinata

Popis kratica

Kratica	Opis
TBTS	teorija savijanja i teorija uvijanja ravnog tankostjenog izotropnog štapa s utjecajem smicanja

1. UVOD

1.1. Motivacija za provođenje istraživanja

U ovom radu se pod pojmom zakrivljeni štap podrazumijeva lučni nosač konstantnog polumjera zakrivljenosti nedeformirane težišne linije R . Tankostjeni zakrivljeni štapovi otvorenog poprečnog presjeka koriste se u mnogim granama inženjerstva zbog relativno jednostavne proizvodnje, povoljnog odnosa čvrstoće i mase [1] te privlačnih estetskih svojstava [2]. Njihova strukturna analiza je složena zbog spregnutosti pomaka i unutarnjih sila. Kod ravnih štapova postoje četiri osnovna slučaja opterećenja koja se mogu razmatrati zasebno, a koja se zatim mogu superponirati za analizu složenih slučajeva opterećenja. Kod zakrivljenih štapova se razlikuju samo dva osnovna slučaja opterećenja (opterećenje u ravnini zakrivljenosti i opterećenje izvan ravnine zakrivljenosti), a čija spregnutost ovisi o obliku poprečnog presjeka [3].

Motivacija ovog istraživanja proizlazi iz sve većeg interesa za razvojem teorija tankostjenih zakrivljenih štapova i za njihovom implementacijom u inženjerstvu. Pregledom dosadašnjih istraživanja tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka, uočeno je da se kutna deformacija srednje plohe mora uzeti u obzir pri analizi kratkih ravnih tankostjenih štapova [4]. Što se tiče zakrivljenih tankostjenih štapova, kutna deformacija srednje plohe je zanemarena u skoro svim tim istraživanjima.

Zakrivljeni štapovi se dijele na štapove male zakrivljenosti i na štapove velike zakrivljenosti. Tankostjeni štapovi kod kojih vrijedi omjer $h^*/R \leq 0.1$, gdje je h^* najveća dimenzija poprečnog presjeka, smatraju se štapovima male zakrivljenosti. U suprotnom, tankostjeni štapovi kod kojih vrijedi omjer $h^*/R > 0.1$, smatraju se štapovima velike zakrivljenosti [5]. Usporedbom postupaka korištenih pri analizi zakrivljenih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka, modeli korišteni u analizi štapova male zakrivljenosti znatno su jednostavniji od modela korištenih pri analizi štapova velike zakrivljenosti. Ključni razlog tome su pretpostavke temeljem kojih se dobiva raspregnutost opterećenja, bez obzira na oblik poprečnog presjeka. Pregledom modela korištenih za analizu tankostjenih štapova male zakrivljenosti, a pomoću kojih se mogu analizirati opterećenja koja djeluju kako u ravnini tako i izvan ravnine zakrivljenosti, može se ustanoviti da je utjecaj kutne deformacije srednje plohe zanemaren u ovim modelima.

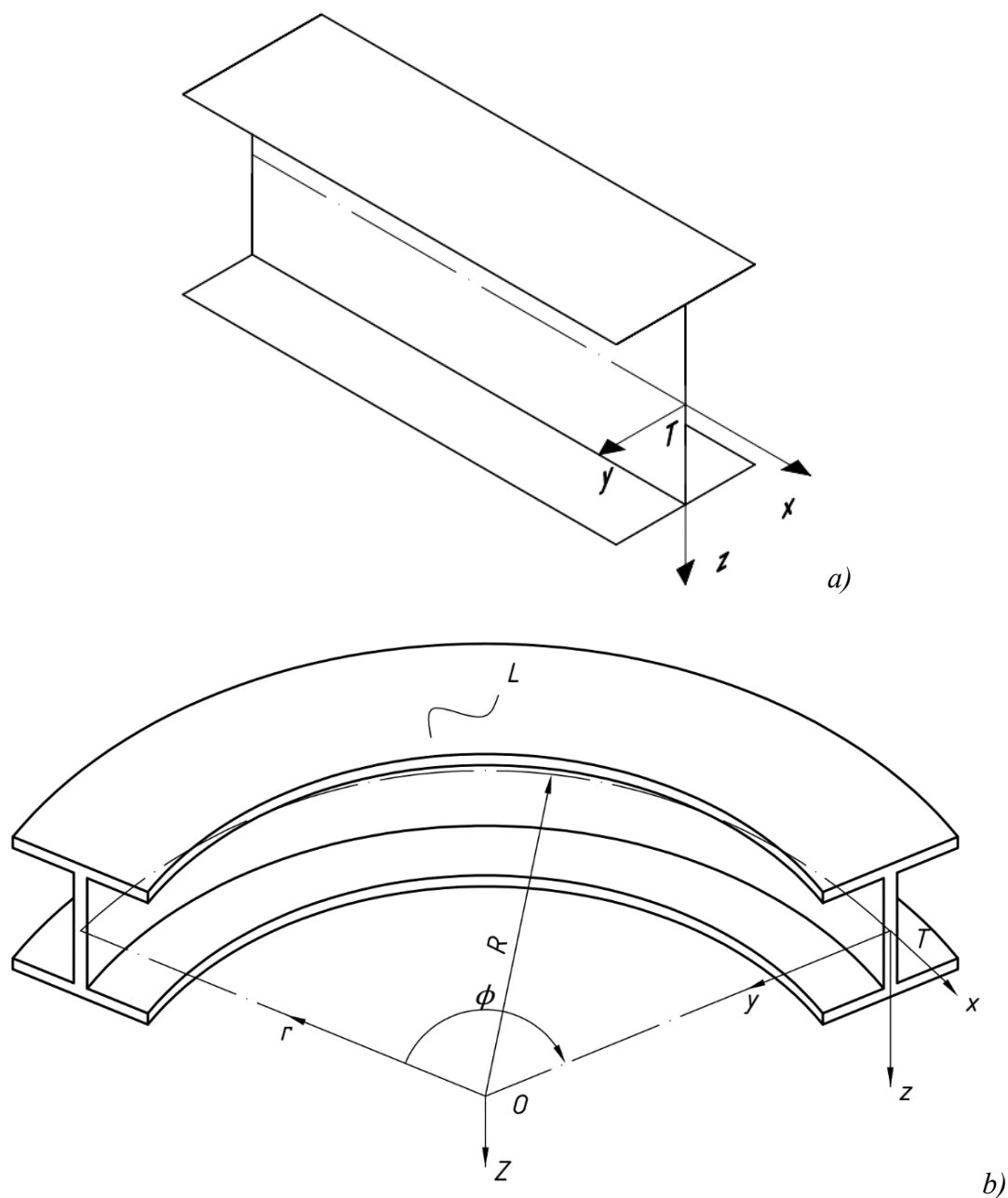
Iz navedenog proizlazi da je potrebno razviti jednostavan analitički model koji će uzeti u obzir kutnu deformaciju srednje plohe, a pomoću kojeg će se moći analizirati i kratki tankostjeni štapovi male zakrivljenosti otvorenog poprečnog presjeka, koji su opterećeni kako u ravnini zakrivljenosti tako i izvan ravnine zakrivljenosti.

1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

U nedavnim su istraživanjima tankostjeni zakrivljeni štapovi analizirani prvenstveno numeričkim metodama primjenom: izogeometrijske analize [6, 7], poopćene teorije štapova [8, 9], Carrerine objedinjene formulacije [10, 11] te linijskim konačnim elementima [12-14]. Kako je u ovom istraživanju naglasak na analitičkim modelima ograničenog uvijanja koji se temelje na Vlasovljevim pretpostavkama, s ili bez utjecaja kutne deformacije srednje plohe, u nastavku teksta je dan pregled takvih modela, a koji se prvenstveno odnose na poprečne presjeke s dvije osi simetrije.

Poznato je da se kod ograničenog uvijanja ravnog štapa u poprečnom presjeku pojavljuju normalna naprezanja promjenjiva kako po duljini štapa tako i po visini poprečnog presjeka, te da se ova pojava mora uzeti u obzir pri analizi ravnih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka [15]. Vlasov [5] je proveo jedno od prvih sustavnih istraživanja ravnih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka primjenom jednadžbi teorije elastičnosti za cilindrične ljuske i krivocrtne koordinate s [1, 16], pri čemu je pretpostavio da se distorzija poprečnog presjeka i kutna deformacija u srednjoj plohi mogu zanemariti. Ove pretpostavke su također poznate i kao klasične, to jest Vlasovljeve pretpostavke. Srednja ploha predstavlja skup svih točaka koje se nalaze na polovištu stijenke štapa, slika 1.1.a, dok srednja linija predstavlja presjek srednje plohe i ravnine koja je okomita na uzdužnu os štapa.

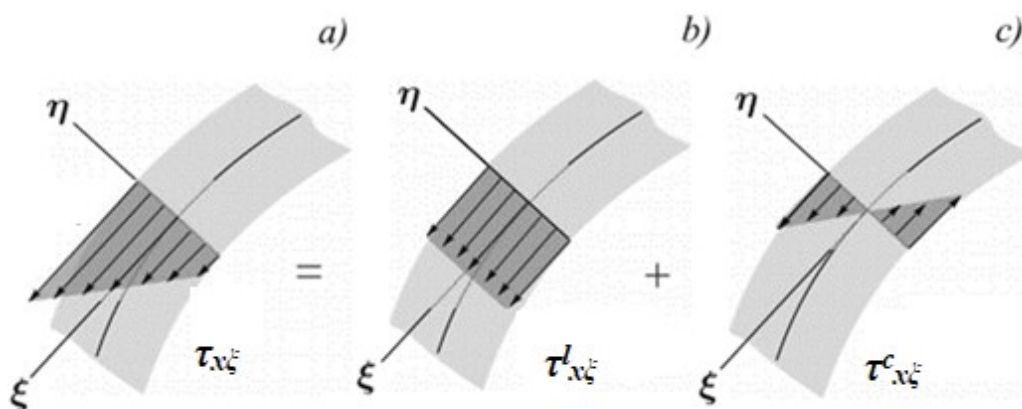
U ovom poglavlju se izrazi za ravne štapove odnose na koordinatni sustav prikazan na slici 1.1.a, dok se izrazi za zakrivljene štapove odnose na koordinatni sustav prikazan na slici 1.1.b. Na slici 1.1.a je prikazan desni pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $Txyz$ srednje plohe ravnog štapa, dok su na slici 1.1.b prikazani cilindrični koordinatni sustav zakrivljenog štapa $Or\phi Z$ i lokalni koordinatni sustav $Txyz$ poprečnog presjeka, gdje su ϕ , R i L obodni kut štapa, polumjer zakrivljenosti nedeformirane težišne linije štapa i duljina nedeformirane težišne linije, tim redoslijedom.



Slika 1.1. Koordinatni sustavi: a) ravnog štapa; b) zakrivljenog štapa.

Na slici 1.2 je prikazana pretpostavljena raspodjela ukupnog posmičnog naprezanja $\tau_{x\xi}$ po debljini stijenke u Vlasovljevom modelu ravnog štapa [5], gdje su ξ i η , redom, tangenta i normala na srednju liniju. Ukupno posmično naprezanje tada slijedi superpozicijom jednolike $\tau_{x\xi}^c$, slika 1.2.b, i linearne $\tau_{x\xi}^l$, slika 1.2.c, raspodjele posmičnog naprezanja.

U Vlasovljevom modelu se jednoliko posmično naprezanje ne može odrediti primjenom Hookeovog zakona zbog pretpostavke da je kutna deformacija srednje plohe nula. Zato se



Slika 1.2. Raspodjela posmičnog naprezanja po debljini stijenke: a) ukupno naprezanje $\tau_{x\xi}$; b) jednoliko naprezanje $\tau_{x\xi}^c$; c) linearno naprezanje $\tau_{x\xi}^l$ [4].

mora primijeniti jednadžba ravnoteže odsječka stijenke cilindrične ljuske koja, ako se zanemari sila na jedinicu površine u smjeru osi x , glasi [4, 5]

$$\frac{\partial(\sigma_x t)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{x\xi}^c t)}{\partial s} = 0 \quad (1.1)$$

gdje je σ_x normalno naprezanje u uzdužnom smjeru ravnog štapa, dok je t debljina stijenke.

Usljedila su mnoga istraživanja temeljena na Vlasovljevom modelu ravnog štapa [16], a među kojima je potrebno izdvojiti teoriju savijanja i teoriju uvijanja ravnog tankostjenog štapa otvorenog poprečnog presjeka s utjecajem smicanja [4, 17-21]. Ovaj pristup također predstavlja nadogradnju klasične Timošenkovice i Euler – Bernoullijeve teorije savijanja. U ovom postupku je uključen utjecaj kutne deformacije srednje plohe na normalna naprezanja i pokazano je da se kutna deformacija srednje plohe mora uzeti u obzir pri analizi kratkih ravnih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka. Izraz za duljinsku deformaciju ravnog štapa ε_x je u ovom postupku definiran kao [4]

$$\varepsilon_x = \frac{du_M}{dx} - \frac{d^2 v_P}{dx^2} y - \frac{d^2 w_P}{dx^2} z - \frac{d^2 \alpha_P}{dx^2} \omega + \int_0^s \frac{\partial \gamma_{x\xi}}{\partial x} ds \quad (1.2)$$

gdje je $\gamma_{x\xi}$ ukupna kutna deformacija u srednjoj plohi, u_M je pomak glavne ishodišne točke M u smjeru koordinatne osi x , v_P i w_P su pomaci glavnog pola P u smjeru koordinatnih osi y i z , tim redoslijedom, dok je α_P je kut uvijanja konture poprečnog presjeka te je ω sektorska koordinata.

Vlasov [5] je također predložio postupak za analizu izotropnih štapova male zakrivljenosti i otvorenog tankostjenog poprečnog presjeka proizvoljnog oblika, pri čemu je za sve veličine i izraze koji se javljaju kod zakrivljenih štapova koristio analogiju s odgovarajućim izrazima dobivenim u analizi ravnih štapova. Veze unutarnja sila – pomak zakrivljenog štapa u ovom modelu slijede iz veza unutarnja sila – pomak ravnog štapa, pri čemu se mjere deformacije ravnog štapa zamijenjene s mjerama deformacije zakrivljenog štapa. Temeljne jednadžbe Vlasovljevog modela štapa male zakrivljenosti slijede supstitucijom prethodno definiranih veza unutarnja sila – pomak u jednadžbe ravnoteže. U ovom postupku je prilikom postavljanja jednadžbi ravnoteže zanemaren relativni položaj glavnog pola P u odnosu na težište T poprečnog presjeka, a slijedom čega je utjecaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti raspregnut od utjecaja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti (bez obzira na oblik poprečnog presjeka).

Budući da je izraz za normalno naprezanje u Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa formalno jednak izrazu za normalno naprezanje ravnog štapa, onda izraz za duljinsku deformaciju proizvoljnog vlakna zakrivljenog štapa ε_ϕ glasi

$$\varepsilon_\phi = \left(\frac{du_M}{d\tilde{x}} - \frac{v_P}{R} \right) - y \left(\frac{d^2v_P}{d\tilde{x}^2} + \frac{v_P}{R^2} \right) - z \left(\frac{d^2w_P}{d\tilde{x}^2} - \frac{\alpha_P}{R} \right) - \omega \left(\frac{d^2\alpha_P}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2w_P}{d\tilde{x}^2} \right) \quad (1.3)$$

gdje je $\tilde{x} = R\phi$ krivocrtna koordinata koja definira položaj razmatranog poprečnog presjeka na zakrivljenoj težišnoj liniji polumjera R , u_M je obodni pomak glavne ishodišne točke M u smjeru osi x , v_P je radijalni pomak glavnog pola P u smjeru osi y , w_P je pomak glavnog pola P u smjeru osi z koja je okomita na ravninu zakrivljenosti, α_P ima isti smisao kao i kod ravnih tankostjenih štapova [5]. Kada polumjer zakrivljenosti R teži u beskonačnosti, tada zakrivljeni štap prelazi u ravni štap i svi izrazi za zakrivljeni štap prelaze u izraze koji se koriste u analizi ravnog štapa.

Timošenko [22] je pri analizi zakrivljenog štapa koji je opterećen u ravnini zakrivljenosti koristio analogiju izraza između ravnih i zakrivljenih štapova, kao i Vlasov, pri čemu je dodatno zanemario izvitoperenje poprečnog presjeka te uzdužnu deformaciju težišne linije. Yoo [23] je također koristio sličan pristup u izrazu za ukupnu potencijalnu energiju deformiranosti, na temelju kojih je proveo analizu zakrivljenih štapova.

Tankostjeni zakrivljeni štapovi su također analizirani primjenom jednadžbi teorije elastičnosti koje su iskazane u sfernom [3, 24] ili u cilindričnom koordinatnom sustavu [24-27], a koji je korišten u većini istraživanja zakrivljenih tankostjenih štapova. Pregledom dosadašnjih

istraživanja tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka, a koja se temelje na Vlasovljevim pretpostavkama, mogu se izdvojiti tri karakteristična pristupa korištena za određivanje izraza za obodni (uzdužni) pomak proizvoljne točke S [3, 25-27].

Tong i Xu [3] su, primjenom jednadžbi teorije elastičnosti za rotacijske ljuske [24] i Vlasovljevim pretpostavki, jedini predstavili sustavno proširenje Vlasovljevog modela ravnog štapa na tankostjene izotropne štapove proizvoljne zakrivljenosti težišne linije i proizvoljnog oblika otvorenog poprečnog presjeka.

U ovom modelu je kutna deformacija srednje plohe, $\gamma_{\phi\xi}$, iskazana kao

$$\gamma_{\phi\xi} = \frac{1}{R-y} \frac{\partial v_S}{\partial \phi} + \frac{\partial u_S}{\partial s} + \frac{u_S}{R-y} \sin \varphi \quad (1.4)$$

gdje je φ kut normale η na srednju liniju u točki S u odnosu na koordinatnu os y , u_S je obodni pomak točke S , a v_S je pomak točke S u smjeru tangente ξ na srednju liniju u točki S [3]. U ovom postupku je izraz za obodni pomak u_S određen u zatvorenom obliku iz uvjeta $\gamma_{\phi\xi} = 0$, a kod računanja derivacija je uzet u obzir relativni položaj glavnog pola P u odnosu na težište T poprečnog presjeka. U ovom pristupu, izraz za duljinsku deformaciju glasi

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{du_{avg}}{Rd\phi} + \frac{d^2v_P}{d\phi^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R-y} \right) - \frac{v_P}{R-y} + \frac{z-a_z}{R-y} \alpha_P + \frac{D_z}{R^2} \frac{d^2w_P}{d\phi^2} - \frac{D_{\omega}}{R^2} \frac{d^2\alpha_P}{d\phi^2} \quad (1.5)$$

gdje je u_{avg} prosječni obodni pomak poprečnog presjeka, a_y i a_z su koordinate glavnog pola P u odnosu na težište T poprečnog presjeka, a D_z i D_{ω} su novouvedene geometrijske značajke štapa u kojima je sadržan utjecaj i zakrivljenosti i oblika presjeka [3]. Izraz za obodno naprezanje slijedi primjenom izraza (1.5) i Hookeovog zakona, a veze unutarnja sila – pomak slijede integriranjem izraza za normalno naprezanje po poprečnom presjeku. U ovom postupku je utjecaj zakrivljenosti sadržan u geometrijskim značajkama, za razliku od Vlasovljevog modela gdje su korištene geometrijske značajke ravnog tankostjenog štapa.

Usporedbom izraza koji su korišteni u Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa [5] i izraza koji su predložili Tong i Xu [3] te Yang i Kuo [25], može se zaključiti da je primjena Vlasovljevog modela prikladna samo pri analizi štapova male zakrivljenosti čiji poprečni presjek je I ili H profil s dvije osi simetrije.

Analizom izraza koji su predložili Tong i Xu [3], može se uočiti da postoje dva uzroka spregnutosti pomaka i unutarnjih sila kod zakrivljenih tankostjenih štapova.

Prvi uzrok spregnutosti izraza slijedi iz veza unutarnja sila – pomak. Naime, sve unutarnje sile su funkcije svih pomaka kod nesimetričnih poprečnih presjeka, dok veze unutarnjih sila i pomaka kod simetričnih poprečnih presjeka ovise o obliku i simetričnosti poprečnog presjeka. Izraz (1.5) za duljinsku deformaciju može se pojednostavniti ako se analiza ograniči na simetrične poprečne presjeke. Tada izrazi za duljinsku deformaciju kod I i H profila s dvije osi simetrije ε_{ϕ}^I i ε_{ϕ}^H , glase [3, 25]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\phi}^I &= \left[\left(\frac{du_M}{d\tilde{x}} - \frac{v_P}{R} \right) - y \left(\frac{d^2v_P}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{R} \frac{du_M}{d\tilde{x}} \right) - z \left(\frac{d^2w_P}{d\tilde{x}^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2\alpha_P}{d\tilde{x}^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega \left(\frac{d^2\alpha_P}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2w_P}{d\tilde{x}^2} \right) \right] \frac{R}{R-y} \\ \varepsilon_{\phi}^H &= \left[\left(\frac{du_M}{d\tilde{x}} - \frac{v_P}{R} \right) - y \left(\frac{d^2v_P}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{R} \frac{du_M}{d\tilde{x}} \right) - z \left(\frac{d^2w_P}{d\tilde{x}^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2\alpha_P}{d\tilde{x}^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \omega \frac{R}{R-y} \left(\frac{d^2\alpha_P}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2w_P}{d\tilde{x}^2} \right) \right] \frac{R}{R-y}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

U ovom radu se pretpostavlja da je kod I profila struk okomit na ravninu zakrivljenosti, slika 1.1.b, dok se kod H profila struk nalazi u ravnini zakrivljenosti. Izrazi za duljinsku deformaciju kod I i H profila s dvije osi simetrije se razlikuju u članu koji opisuje izvitoperenje poprečnog presjeka. Zbog ovog člana se razlikuju veze unutarnja sila – pomak koje se odnose na analizu ovih profila uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, dok veze unutarnja sila – pomak, koje se odnosu na analizu ovih profila uslijed djelovanja opterećenja u ravnini zakrivljenosti, ne ovise o obliku poprečnog presjeka [3].

Temeljne jednadžbe u modelu koji su predložili Tong i Xu također slijede supstitucijom veza unutarnja sila – pomak u jednadžbe ravnoteže odsječka štapa, pri čemu su eliminirani izrazi za poprečne sile, i koje glase [3]

$$\begin{aligned}R \frac{dN}{d\phi} + \frac{dM_z}{d\phi} + q_x R^2 &= 0 \\ -\frac{d^2M_z}{d\phi^2} + RN + q_y(R - a_y)R &= 0 \\ R \frac{d^2M_y}{d\phi^2} + R \frac{dM_P}{d\phi} + a_z \frac{d^2M_z}{d\phi^2} + q_z R(R - a_y)^2 &= 0 \\ \frac{dM_P}{d\phi} - M_y + a_z N + m_P(R - a_y) &= 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

U jednadžbama ravnoteže iskazan je drugi uzrok spregnutosti izraza kod zakrivljenih štapova, a koji se odnosi na spregnutost unutarnjih sila. U ovom su modelu unutarnje sile koje djeluju u ravnini zakrivljenosti raspregnute od unutarnjih sila koje djeluju izvan ravnine

zakrivljenosti kod poprečnih presjeka s dvije osi simetrije, a spregnute su kod nesimetričnih poprečnih presjeka. Kada se zanemari relativni položaj glavnog pola P u odnosu na težište T poprečnog presjeka, što vrijedi kod presjeka s dvije osi simetrije, tada izraz (1.7) prelazi u jednadžbe ravnoteže korištene u Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa.

Jednoliko posmično naprezanje $\tau_{\phi\xi}^c$, zbog kutne deformacije srednje plohe, u ovom modelu slijedi iz uvjeta ravnoteže odsječka stijenke rotacijske ljuske koji glasi [3]

$$\frac{\partial(\sigma_{\phi}t)}{\partial\phi} + (R - y)\frac{\partial(\tau_{\phi\xi}^c t)}{\partial s} - 2\tau_{\phi\xi}^c t \sin\phi = 0 \quad (1.8)$$

gdje je σ_{ϕ} obodno normalno naprezanje zakrivljenog štapa. Od svih postupaka korištenih u analizi zakrivljenih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka, a koji se temelje na Vlasovljevim pretpostavkama i na jednadžbama teorije elastičnosti iskazanim u cilindričnom koordinatnom sustavu, samo su Yang i Kuo [25] predstavili različite izraze za duljinske deformacije kod I i H presjeka s dvije osi simetrije. Ovi izrazi su jednaki izrazima koje su predstavili Tong i Xu [3] za te iste presjeke i dani su izrazima (1.6). Polje pomaka u ovom postupku, kod oba profila, ispunjava uvjet da je izraz (1.4) jednak nuli [3].

Yang i Kuo su odredili izraz za obodni pomak razmatranjem diferencijalne veze pomak – deformacija po segmentima srednje linije poprečnog presjeka, a zatim je primjenom uvjeta kontinuiteta određen izraz za obodni pomak kod I i H presjeka s dvije osi simetrije [25]. U ovom radu je član koji sadržava sadržan utjecaj zakrivljenosti razvijen u red, pri čemu su članovi višeg reda zanemareni

$$\frac{R}{R - y} \cong 1 + \frac{y}{R}. \quad (1.9)$$

Temeljem prethodnog izraza koriste se geometrijske značajke poprečnog presjeka ravnog tankostjenog štapa [28], kao u Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa. U modelu koji su predložili Yang i Kuo [25] posmično naprezanje zbog kutne deformacije srednje plohe je zanemareno, to jest u obzir je uzeta samo linearna raspodjela posmičnog naprezanja od takozvanog čistog uvijanja, koja je prikazana na slici 1.2.c [29].

Treći postupak korišten za izračun obodnog pomaka proizvoljne točke S , koji je temeljen kako na Vlasovljevim pretpostavkama tako i na jednadžbama teorije elastičnosti u cilindričnom koordinatnom sustavu, opisali su Usami i Koh [26] odnosno Nishino i Fukasawa [27]. Usami i Koh [26], u odnosu na obodni pomak koji su predložili Nishino i Fukasawa [27], koriste fiktivni segment poprečnog presjeka za izračun obodnog pomaka

težišta. Ovaj segment spaja proizvoljnu točku poprečnog presjeka s njegovim težištem, a debljina mu je nula. Bitno je naglasiti da polje pomaka u [26, 27], prema [3], u općem slučaju ne ispunjava uvjet da je izraz (1.4) jednak nuli (iako je obodni pomak u ovim postupcima određen primjenom pretpostavke da je kutna deformacija jednaka nuli). Ovaj obodni pomak kod poprečnih presjeka s dvije osi simetrije ne ovisi o obliku poprečnog presjeka, a jednak je obodnom pomaku koje su predložili Tong i Xu [3] te Yang i Kuo [25] za I profile s dvije osi simetrije. Usporedba između postupaka koje su predložili Yang i Kuo [25] te Usami i Koh [26] dana je u [30], dok je detaljna usporedba modela koje su predložili Tong i Xu [3], Vlasov [5] te Usami i Koh [26] dana u [3].

U prethodnom dijelu ovog pregleda prikazana su značajnija istraživanja tankostjenih zakrivljenih štapova, koja su temeljena na Vlasovljevim pretpostavkama i koja su korištena za mnoga daljnja istraživanja zakrivljenih tankostjenih štapova. Tankostjeni zakrivljeni štapovi zatvorenog poprečnog presjeka, koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti, analizirani su također primjenom Vlasovljevog modela [5] pri čemu je utjecaj izvitoperenja zanemaren [31, 32]. Postupak koji su predložili Tong i Xu [3] korišten je u analizi izotropnih zakrivljenih tankostjenih štapova gdje je poprečni presjek proizvoljan i sastavljen od ravnih segmentata [33], ali je također poslužio i kao podloga za analizu kompozitnih štapova [34]. Postupak koji su predložili Yang i Kuo [25] korišten je u analizi izotropnih zakrivljenih štapova punog pravokutnog poprečnog presjeka [35], gdje je izvitoperenje poprečnog presjeka zanemareno, dok je utjecaj radijalnog naprezanja na tankostjene zakrivljene štapove razmatran u [36]. H profili s dvije osi simetrije, opterećeni u [37] i izvan [38] ravnine zakrivljenosti, su analizirani primjenom zadnje jednadžbe izraza (1.6) i gdje su članovi u kojima je sadržan utjecaj zakrivljenosti razvijeni u linearni red.

Postupak za izračun obodnog pomaka koji su opisali Usami i Koh [26] te Nishino i Fukasawa [27] korišten je u mnogim istraživanjima zakrivljenih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka [13, 30, 39, 40]. Među ovim istraživanjima je potrebno posebno izdvojiti istraživanje koji su proveli Kano i ostali [40], a u kojem je utjecaj kutne deformacije srednje plohe uključen u analizu tankostjenog zakrivljenog štapa. To je postignuto primjenom uzastopnih aproksimacija jednadžbe ravnoteže infinitezimalnog elementa stijenke štapa koja, ako se zanemari sila na jedinicu površine u smjeru osi x , glasi

$$\frac{1}{(R - \hat{y})^2} \frac{\partial}{\partial s} \left((R - \hat{y})^2 \hat{t}_{\phi \xi}^c t \right) + \frac{t}{R - \hat{y}} \frac{\partial \hat{\sigma}_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (1.10)$$

gdje je (\quad) simbol koji označava vrijednost varijable na srednjoj plohi [40]. U prvom koraku ovog postupka [40] je zanemareno obodno naprezanje, a integriranjem izraza (1.10) slijedi izraz za posmično naprezanje $\tau_{\phi\xi}$. Tada se primjenom Hookeovog zakona može odrediti kutna deformacija srednje plohe, a iz koje slijedi izraz za obodni pomak. U drugom koraku, ali i svakom sljedećem koraku ovog postupka, određuje se izraz za normalno obodno naprezanje primjenom izraza za obodni pomak koji je određen u prethodnom koraku te se opet pristupa izračunu: jednolikog posmičnog naprezanja, kutne deformacije srednje plohe i obodnog pomaka. Nedostatak ovog pristupa je što se u svakom koraku aproksimacije mijenjaju svi izrazi zakrivljenog štapa. Ako se u ovom postupku zanemari utjecaj kutne deformacije srednje plohe, tada slijedi izraz za duljinsku deformaciju koji je jednak deformaciji ε_{ϕ}^I u izrazu (1.6).

1.3. Hipoteza doktorskog istraživanja

Pregledom dosadašnjih istraživanja tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenih poprečnih presjeka nije pronađen analitički model u kojem je uključen utjecaj kutne deformacije srednje plohe, a koji se temelji ili na Vlasovljevom modelu štapa male zakrivljenosti [5] ili na postupcima koje su predložili Tong i Xu [3], to jest Yang i Kuo [25]. Zbog toga je u okviru doktorskog istraživanja predložen postupak koji se temelji na Vlasovljevom modelu izotropnog štapa male zakrivljenosti te na teoriji savijanja i teoriji uvijanja ravnog tankostjenog izotropnog štapa s utjecajem smicanja. Hipoteza doktorskog istraživanja tada glasi:

„Postavljanjem analitičkog modela koji će uzeti u obzir kutne deformacije u srednjoj plohi očekuju se poboljšanja u predviđanju naprezanja i pomaka u linearno – elastičnoj analizi kratkih izotropnih tankostjenih štapova male zakrivljenosti, konstantnog polumjera zakrivljenosti nedeformirane težišne linije i otvorenih poprečnih presjeka s dvije osi simetrije, a koji su opterećeni kako u ravnini zakrivljenosti tako i izvan ravnine zakrivljenosti. Definicijom faktora utjecaja smicanja na pomake i naprezanja u parametarskom obliku moći će se postaviti točniji izrazi za naprezanje i pomake u odnosu na Vlasovljev model štapa male zakrivljenosti, kod relativno kratkih tankostjenih štapova male zakrivljenosti otvorenih poprečnih presjeka s dvije osi simetrije i konstantnog polumjera zakrivljenosti nedeformirane težišne linije.“

1.4. Opis i metodologija istraživanja

Osim što se u ovom radu pod pojmom zakrivljeni štap podrazumijeva lučni nosač konstantnog polumjera zakrivljenosti nedeformirane težišne linije, u nastavku rada se zbog jednostavnijeg zapisa pojam zakrivljeni štap odnosi na tankostjeni izotropni štap male početne zakrivljenosti čiji poprečni presjek je I ili H profil s dvije osi simetrije.

Na primjeru zakrivljenog štapa, u parametarskoj analizi je ispitan utjecaj različitih slučajeva opterećenja (jednoliko opterećenje koje djeluje ili u ravnini ili izvan ravnine zakrivljenosti), rubnih uvjeta (štap je na oba kraja vezan za podlogu ili uklještenjem ili nepomičnim zglobnim osloncem) te odnosa L/h^* i R/h^* , gdje je h^* karakteristična dimenzija poprečnog presjeka. Sve razmatrane fizikalne veličine su u parametarskoj analizi uspoređene s Vlasovljevim modelom štapa male zakrivljenosti.

Verifikacija predloženog modela je provedena usporedbom s numeričkim rezultatima koji su dobiveni metodom konačnih elemenata i to primjenom ljuskastih konačnih elemenata s četiri čvora. Naime, ovi elementi su također korišteni pri analizi štapova srednje zakrivljenosti koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti, a čiji poprečni presjek je tankostjeni H profil s dvije osi simetrije [38]. Zbog toga se numerički model zakrivljenog štapa koji je korišten u ovom radu sastoji od ravninskih konačnih elemenata, a slijedom čega je kod numeričkog modela korištena gusta mreža.

1.5. Znanstveni doprinosi rada

Znanstveni doprinosi istraživanja provedenog u okviru doktorskog rada slijede iz razvoja analitičkog modela tankostjenog štapa male zakrivljenosti čiji poprečni presjek je I ili H profil s dvije osi simetrije, a u kojem je utjecaj kutne deformacije srednje plohe uzet u obzir. U ovom modelu su izvedeni analitički izrazi za pomake uslijed smicanja, pri čemu su Vlasovljevi izrazi za obodno normalno naprezanje i pomake nadopunjeni članovima koji uključuju utjecaj smicanja. Upravo zbog toga predloženi model predstavlja proširenje kako teorije savijanja i teorije uvijanja ravnog štapa s utjecajem smicanja, tako i Vlasovljevog modela štapa male zakrivljenosti. Znanstveni doprinosi provedenog istraživanja također slijede iz provedene parametarske analiza utjecaja smicanja na pomake i na obodno normalno naprezanje, za različite slučajeve opterećenja i oslanjanja zakrivljenog štapa.

1.6. Pregled rada

Doktorski rad se sastoji od tri poglavlja i zaključka.

U uvodnom poglavlju je prikazana motivacija za provedeno istraživanje te je dan kratki pregled dosadašnjih istraživanja. Navedena je hipoteza kao i ostvareni znanstveni doprinosi istraživanja provedenog u doktorskom radu.

U drugom poglavlju ovog rada su izvedene temeljne jednadžbe zakrivljenog tankostjenog štapa čiji poprečni presjek ima dvije osi simetrije, za slučajeve s i bez utjecaja smicanja. Ove jednadžbe ovise o vrsti opterećenja te su odvojeno razmatrani slučajevi opterećenja u ravnini zakrivljenosti i izvan ravnine zakrivljenosti. U ovom poglavlju su rješenja temeljnih jednadžbi prikazana u zatvorenom obliku, a ukupna rješenja su rezultat superpozicije Vlasovljevih rješenja i dodataka uslijed smicanja.

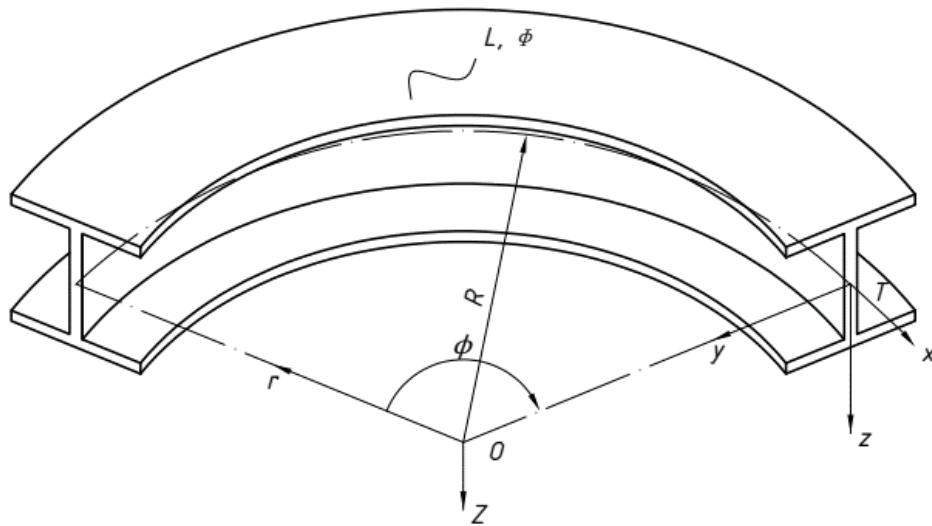
U trećem poglavlju ovog rada je provedena parametarska analiza i verifikacija modela, na primjerima I i H profila s dvije osi simetrije. I profil je analiziran za slučaj opterećenja koje djeluje izvan ravnine zakrivljenosti, dok je H profil analiziran za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti. Parametarskom analizom je ispitan utjecaj rubnih uvjeta i geometrije štapa na vrijednosti pomaka i normalnih obodnih naprezanja. Također je provedena usporedba predloženog postupka, Vlasovljevog modela i numeričkih rezultata na primjenu štapa srednje zakrivljenosti.

Na kraju rada su navedeni zaključci koji provedenog istraživanja te smjernice za buduća istraživanja.

2. UTJECAJ SMICANJA KOD TANKOSTJENIH ZAKRIVLJENIH ŠTAPOVA

2.1. Jednadžbe ravnoteže

Na slici 2.1 je prikazan zakrivljeni štap čiji je poprečni presjek I profil s dvije osi simetrije, gdje su L i R redom duljina i polumjer zakrivljenosti nedeformirane težišne linije. Težište poprečnog presjeka T predstavlja ishodište desnog pravokutnog koordinatnog sustava poprečnog presjeka $Txyz$, to jest lokalnog koordinatnog sustava poprečnog presjeka, dok je $Or\phi Z$ cilindrični koordinatni sustav zakrivljenog štapa čije je ishodište O u središtu zakrivljenosti nedeformirane težišne linije. Pravac koordinatne osi x je definiran kao tangenta na zakrivljenu težišnu liniju, a pozitivni smjer osi x je u smjeru prirasta varijable ϕ . Koordinatna os y je usmjerena suprotno od koordinatne osi r , to jest prema središtu zakrivljenosti O , dok su koordinatne osi z i Z usmjerene u istom smjeru i okomite su na ravninu zakrivljenosti $Or\phi$.



Slika 2.1. Tankostjeni zakrivljeni štap.

Položaj razmatranog poprečnog presjeka je definiran krivocrtnom koordinatom \tilde{x} za koju vrijedi

$$\tilde{x} = R\phi \quad (2.1)$$

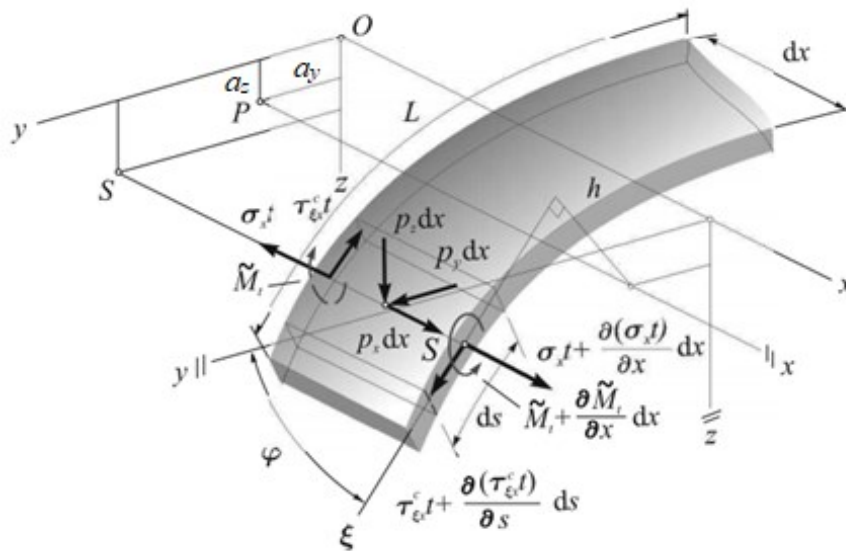
to jest

$$d\tilde{x} = R d\phi \quad (2.2)$$

gdje je ϕ obodni kut razmatranog poprečnog presjeka štapa. Ukupni obuhvatni kut štapa Φ je definiran kao

$$\Phi = L/R. \quad (2.3)$$

Kod tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka su uzdužna sila N i momenti savijanja oko y i z osi, redom M_y i M_z , najčešće definirani u odnosu na težište T poprečnog presjeka, dok su poprečne sile u smjeru y i z osi, redom Q_y i Q_z , bimoment B i ukupni moment uvijanja M_p definirani u odnosu na glavni pol P poprečnog presjeka, kao što je pokazano na slici 2.2 koja pokazuje odsječak ravnog štapa. Kao što uzdužna sila uzrokuje translaciju poprečnog presjeka, a momenti savijanja i uvijanja njegovu rotaciju, tako bimoment uzrokuje izvitoperenje poprečnog presjeka.



Slika 2.2. Komponente unutarnjih sila odsječka ravnog štapa [4].

Ukupni moment uvijanja ravnog štapa M_p je definiran kao

$$M_p = M_\omega + M_t \quad (2.4)$$

gdje su M_t i M_ω moment čistog uvijanja odnosno moment izvitoperenja. Kod zakrivljenih štapova je moment uvijanja M_p također definiran izrazom (2.4) [3, 13]. Kod ravnih štapova, bez obzira na oblik poprečnog presjeka, veza moment izvitoperenja – bimoment glasi

$$M_\omega = dB/dx. \quad (2.5)$$

Kako je analiza u ovom radu ograničena na štapove male zakrivljenosti, tako se pretpostavlja da i kod ovih štapova vrijedi veza definirana izrazom (2.5). Naime, u [3] je pokazano da izraz (2.5) vrijedi kod štapova velike zakrivljenosti čiji je poprečni presjek I profil s dvije osi simetrije, dok se kod H profila s dvije osi simetrije mora koristiti drugačija veza između momenta izvitoperenja M_ω i bimomenta B , a koja se u tom slučaju modificira zbog utjecaja zakrivljenosti.

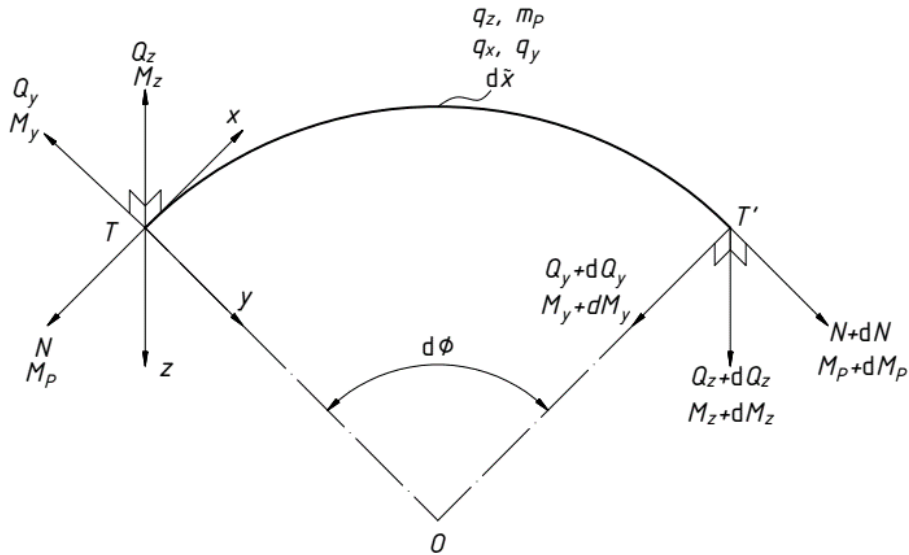
Relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište je definiran duljinama a_y i a_z . Kod ravnih štapova su težišna os (linija koja sadrži težišta svih poprečnih presjeka) i os smicanja (linija koja sadrži glavne polove svih poprečnih presjeka) paralelne i jednake su duljine. Zbog toga se prilikom deriviranja fizikalnih veličina po uzdužnoj osi ravnog štapa koristi infinitezimalni segment duljine dx , koji ujedno predstavlja infinitezimalne segmente i težišne osi i osi smicanja.

Kod zakrivljenih tankostjenih štapova se, u općem slučaju, razlikuju duljine težišne linije i osi smicanja. Tada je prilikom deriviranja fizikalnih veličina po uzdužnoj (obodnoj) osi zakrivljenog štapa potrebno koristiti infinitezimalni segment zakrivljene težišne linije, $d\tilde{x}$, i infinitezimalni segment zakrivljene osi smicanja, $d\tilde{x}_p$. Težišna os i os smicanja se nalaze u istoj liniji polumjera R kod poprečnih presjeka s dvije osi simetrije ($a_y = a_z = 0$) i tada vrijedi

$$d\tilde{x} = d\tilde{x}_p. \quad (2.6)$$

Postupak predložen u ovom radu ograničen je na poprečne presjeke s dvije osi simetrije. Uz ovo ograničenje moguće je jednostavnije dobiti točnije rješenje u zatvorenom obliku. Zbog ovog ograničenja je na slici 2.3 prikazan odsječak nedeformirane težišne linije zakrivljenog štapa, gdje su sve unutarnje sile definirane u odnosu na težište poprečnog presjeka.

Kako se u ovoj analizi koordinatne osi x i y odnose na lokalni koordinatni sustav poprečnog presjeka, tako se u analizi zakrivljenih štapova mogu koristiti sljedeći nazivi za unutarnje sile: obodna sila N , moment savijanja izvan ravnine zakrivljenosti M_y , moment savijanja u ravnini zakrivljenosti M_z , radijalna poprečna sila Q_y i poprečna sila okomita na ravninu zakrivljenosti Q_z . Bimoment B , moment izvitoperenja M_ω , moment čistog uvijanja M_t i ukupni moment uvijanja M_p nemaju alternativne nazive kod zakrivljenih štapova.



Slika 2.3. Odsječak težišne linije zakrivljenog štapa s unutarnjim silama.

U Prilogu A je prikazan detaljan izvod jednadžbi ravnoteže infinitezimalnog odsječka štapa prikazanog na slici 2.3, a koje se mogu koristiti u analizi tankostjenih štapova male i velike zakrivljenosti s poprečnim presjecima s dvije osi simetrije. Jednadžbe ravnoteže za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti tada glase

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\tilde{x}} - \frac{Q_y}{R} + q_x &= 0 \\ \frac{dQ_y}{d\tilde{x}} + \frac{N}{R} + q_y &= 0 \\ \frac{dM_z}{d\tilde{x}} + Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

odnosno, za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti

$$\begin{aligned} \frac{dM_P}{d\tilde{x}} - \frac{M_y}{R} + m_P &= 0 \\ \frac{dM_y}{d\tilde{x}} - Q_z + \frac{M_P}{R} &= 0 \\ \frac{dQ_z}{d\tilde{x}} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdje su q_x , q_y i q_z sile na jedinicu duljine u smjeru koordinatnih osi x , y i z , tim redoslijedom. Moment uvijanja na jedinicu duljine u odnosu na glavni pol P u izrazu (2.8), m_P , je definiran kao

$$m_P = m_\omega + m_t \quad (2.9)$$

gdje su m_ω i m_t redom moment izvitoperenja i moment čistog uvijanja na jedinicu duljine. Sile na jedincu duljine q_x i q_y u ovoj analizi također predstavljaju, redom, obodnu i radijalnu silu na jedinicu duljine.

U izrazima (2.7) i (2.8), koji vrijede za poprečne presjke s dvije osi simetrije, je raspregnut međusobni utjecaj unutarnjih sila koje djeluju izvan ravnine zakrivljenosti ($Q_z, M_y, M_\omega, M_t, B$ i M_p) i unutarnjih sila koje djeluju u ravnini zakrivljenosti (Q_y, M_z i N). Unutarnje sile koje djeluju izvan ravnine zakrivljenosti su međusobno spregnute, kao što su međusobno spregnute unutarnje sile koje djeluju u ravnini zakrivljenosti.

U Vlasovljevom postupku je analiza ograničena na štapove male zakrivljenosti, pri čemu je pretpostavljeno da se u jednadžbama ravnoteže može zanemariti relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište poprečnog presjeka, bez obzira na oblik poprečnog presjeka. Kao rezultat ovog ograničenja, odnosno pretpostavke, Vlasovljev model za štapove male zakrivljenosti proizvoljnog oblika poprečnog presjeka se temelji na izrazima (2.7) i (2.8) [5]. Kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, zakrivljeni štap prelazi u ravni štap pa izrazi (2.7) i (2.8) prelaze u jednadžbe ravnoteže ravnog štapa. Pri tome, infinitezimalne duljine težišne linije zakrivljenog štapa $d\tilde{x}$ i osi smicanja zakrivljenog štapa $d\tilde{x}_p$ prelaze u infinitezimalnu duljinu segmenta ravnog štapa dx .

Eliminiranjem poprečnih sila iz jednadžbi ravnoteže u izrazima (2.7) i (2.8) slijedi

$$\begin{aligned} N' + \frac{M_z'}{R} + q_x &= 0 \\ -M_z'' + \frac{N}{R} + q_y &= 0 \\ M_y'' + \frac{M_p'}{R} + q_z &= 0 \\ -\frac{M_y}{R} + M_p' + m_p &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

U izrazu (2.10), te u nastavku teksta, su derivacije fizikalnih veličina skraćeno označene kao

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\tilde{x}}. \tag{2.11}$$

Ako se u jednadžbama ravnoteže uzme u obzir relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište poprečnog presjeka, onda će spregnutost unutarnjih sila koje djeluju u ravnini zakrivljenosti i unutarnjih sila koje djeluju izvan ravnine zakrivljenosti ovisiti o obliku poprečnog presjeka, kao što je prikazano izrazom (1.7). Zanemarivanjem relativnog položaja glavnog pola u odnosu na težište poprečnog presjeka, jednadžbe ravnoteže (1.7) prelazi u jednadžbe (2.10). U općem su slučaju sve unutarnje sile spregnute kod nesimetričnih poprečnih presjeka, dok je međusobni utjecaj unutarnjih sila koje djeluju u ravnini zakrivljenosti i unutarnjih sila koje djeluju izvan ravnine zakrivljenosti raspregnut kod poprečnih presjeka s dvije osi simetrije. Kod poprečnih presjeka s jednom osi simetrije, bez obzira na zakrivljenost, spregnutost izraza ovisi o obliku poprečnog presjeka.

2.2. Pomaci i deformacije

Lokalni koordinatni sustav $Txyz$ prikazan na slici 2.1 vezan je za težišnu liniju nedeformiranog štapa, a \overline{Txyz} je lokalni koordinatni sustav deformiranog štapa čije se ishodište nalazi u težištu deformiranog poprečnog presjeka. Kada su koordinatne osi y i r usmjerene suprotno, kao što je pokazano na slici 2.1, tada pozitivni pomak težišta u smjeru osi y predstavlja negativni pomak težišta u smjeru radijalne osi r . Prema Vlasovu [5], duljinska deformacija težišne linije zakrivljenog štapa ε_ϕ^* glasi

$$\varepsilon_\phi^* = u_M' - \frac{v_P}{R} \quad (2.12)$$

gdje su u_M i v_P redom ukupni pomak glavne ishodišne točke M u smjeru osi x (obodni ili uzdužni pomak) i ukupni pomak glavnog pola P u smjeru osi y (radijalni pomak). Zakrivljenosti deformirane težišne linije zakrivljenog štapa iskazane u $Txyz$ koordinatnom sustavu glase

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \alpha_P' \\ \kappa_y &= -w_P'' \\ \kappa_z &= v_P'' + \frac{1}{R} + \frac{v_P}{R^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdje su w_P i α_P ukupni pomak glavnog pola P u smjeru koordinate osi z i ukupni kut uvijanja konture poprečnog presjeka oko glavnog pola P , tim redoslijedom, a κ_x , κ_y i κ_z su redom zakrivljenosti deformirane težišne linije u odnosu na koordinatne osi x , y i z [5].

Zakrivljenosti κ_x i κ_y te prvi član zakrivljenosti κ_z su definirani kao kod ravnih štapova [4, 5]. Drugi član zakrivljenosti κ_z predstavlja početnu zakrivljenost štapa, a treći član u κ_z predstavlja promjenu zakrivljenosti uslijed pomaka v_P u smjeru osi y . Ovi članovi se dobiju razvojem u red razlike zakrivljenosti težišne linije između deformiranog i nedeformiranog štapa [12, 24], a odakle slijedi

$$\frac{1}{R - v_P} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1 - \frac{v_P}{R}} \right) - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{v_P}{R} + \dots \right) - \frac{1}{R}. \quad (2.14)$$

Zanemarivanjem malih veličina višeg reda u prethodnom izrazu dobiva se

$$\frac{1}{R - v_P} = \frac{1}{R} + \frac{v_P}{R^2} \quad (2.15)$$

gdje su članovi s desne strane jednakosti posljedica početne zakrivljenosti štapa u $O\tau\phi$ ravnini. Koordinatna os y je usmjerena suprotno od koordinatne osi r i zato pozitivni pomak v_P povećava zakrivljenost κ_z .

Zakrivljenosti deformirane težišne linije iskazane u \overline{Txyz} koordinatnom sustavu slijede iz izraza

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{\bar{x}} \\ \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = [\mathbf{L}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

gdje su $\kappa_{\bar{x}}$, $\kappa_{\bar{y}}$ i $\kappa_{\bar{z}}$ zakrivljenosti u odnosu na koordinatne osi \bar{x} , \bar{y} i \bar{z} , a \mathbf{L} je matrica kosinusa smjerova koja je prema [5, 12] definirana kao

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & v_P' & w_P' \\ -v_P' & 1 & \alpha_P \\ -w_P' & -\alpha_P & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Zakrivljenosti $\kappa_{\bar{x}}$, $\kappa_{\bar{y}}$ i $\kappa_{\bar{z}}$ slijede primjenom izraza (2.13), (2.16) i (2.17) te glase

$$\begin{aligned} \kappa_{\bar{x}} &= \alpha_P' - v_P' w_P'' + w_P' \left(\frac{1}{R} + v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \right) \\ \kappa_{\bar{y}} &= -v_P' \alpha_P' - w_P'' + \alpha_P \left(\frac{1}{R} + v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \right) \\ \kappa_{\bar{z}} &= -w_P' \alpha_P' - \alpha_P w_P'' + \left(\frac{1}{R} + v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Zanemarivanjem diferencijalnih veličina višeg reda, izraz (2.18) se može zapisati kao

$$\begin{aligned} \kappa_{\bar{x}} &\cong \alpha_P' + \frac{w_P'}{R} \\ \kappa_{\bar{y}} &\cong \frac{\alpha_P}{R} - w_P'' \\ \kappa_{\bar{z}} &\cong v_P'' + \frac{v_P}{R^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Izrazi (2.19) predstavljaju mjere zakrivljenosti štapa male zakrivljenosti, a zajedno s izrazom (2.12) tvore poopćene mjere deformacija tankostjenog štapa male zakrivljenosti korištene u ovom radu.

U tom slučaju, ukupni relativni kut uvijanja zakrivljenog štapa ϑ slijedi iz zakrivljenosti $\kappa_{\bar{x}}$, to jest

$$\vartheta = -\kappa_{\bar{x}} = -\alpha_P' - \frac{w_P'}{R}. \quad (2.20)$$

Prema Vlasovljevom modelu štapa male zakrivljenosti [5], pretpostavljeni ukupni obodni pomak proizvoljne točke S srednje linije u_S analogan je izrazu za uzdužni pomak proizvoljne točke S ravnog tankostjenog štapa te glasi

$$u_S = u_M - \gamma y + \beta z + \vartheta \omega \quad (2.21)$$

gdje je ω sektorska koordinata koja ovisi o obliku poprečnog presjeka i koja je za I i H profile s dvije osi simetrije definirana kao

$$\begin{aligned}\omega^I &= -yz \\ \omega^H &= yz\end{aligned}\quad (2.22)$$

pri čemu su ω^I i ω^H redom sektorske koordinate I i H profila s dvije osi simetrije. U ovom se radu također pretpostavlja da se poprečni presjeci zakreću kao krute figure oko y i z osi, a β i γ , definirani kao u Vlasovljevom modelu ravnog štapa [5] te glase

$$\begin{aligned}\beta &= -w_P' \\ \gamma &= v_P'\end{aligned}\quad (2.23)$$

Primjenom izraza (2.21) – (2.23), izraz za obodni pomak u_S prelazi u

$$u_S = u_M - v_P'y - w_P'z - \left(\alpha_P' + \frac{w_P'}{R}\right)\omega\quad (2.24)$$

i u ovom obliku je korišten u nastavku rada.

Također se pretpostavlja da nema distorzije poprečnog presjeka pa izrazi za pomake proizvoljne točke S srednje linije u smjeru koordinatnih osi y i z , redom v i w , glase

$$\begin{aligned}v &= v_P - z\alpha_P \\ w &= w_P + y\alpha_P\end{aligned}\quad (2.25)$$

Izrazi (2.25) ne ovise o polumjeru zakrivljenosti težišne linije, to jest izrazi (2.25) vrijedi i kod ravnih i kod zakrivljenih štapova uz pretpostavku o nepromjenjivosti oblika poprečnog presjeka s dvije osi simetrije. Kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, tada mjere deformacija u izrazima (2.12) i (2.19), obodni pomak u_S , (2.24), i relativni kut uvijanja ϑ , (2.20), prelaze u odgovarajuće izraze ravnog štapa.

Prema [3, 35] u analizi I i H profila s dvije osi simetrije, umjesto Vlasovljevog izraza (2.24), moraju se za obodni pomak proizvoljne točke S srednje linije zakrivljenog štapa koristiti izrazi

$$\begin{aligned}u_S^I &= u_M - \left(v_C' + \frac{u_M}{R}\right)y - w_P'z - \left(\alpha_P' + \frac{w_P'}{R}\right)\omega^I \\ u_S^H &= u_M - \left(v_C' + \frac{u_M}{R}\right)y - w_P'z - \left(\alpha_P' + \frac{w_P'}{R}\right)\omega^H \frac{R}{R-y}\end{aligned}\quad (2.26)$$

gdje je u_S^I obodni pomak I profila, a u_S^H obodni pomak H profila. Uz duljinsku deformaciju proizvoljnog vlakna zakrivljenog štapa ε_ϕ definiranu prema [24] kao

$$\varepsilon_\phi = \frac{R}{R-y} \left(\frac{\partial u_S}{\partial \tilde{x}} - \frac{v_P}{R} \right)\quad (2.27)$$

može se utvrditi sljedeće: *i*) za težišnu liniju ($y = 0$) izraz (2.27) postaje Vlasovljev izraz (2.12), *ii*) izrazi (2.26) i (2.27) vrijede za štapove male i velike zakrivljenosti te ovise o obliku poprečnog presjeka (I ili H profil), a slijedom navedenog će i temeljni izrazi zakrivljenog štapa dobiveni pomoću (2.26) i (2.27) ovisiti o obliku poprečnog presjeka.

S druge strane, temeljni izrazi postupka koji je predložen u ovom radu ne ovise o obliku poprečnog presjeka, uz uvjet da poprečni presjek ima dvije osi simetrije, te je njegova primjena ograničena na štapove male zakrivljenosti.

2.3. Temeljni izrazi zakrivljenog štapa s utjecajem smicanja

Prema teoriji savijanja i teoriji uvijanja ravnog tankostjenog izotropnog štapa s utjecajem smicanja (TBTS), gdje je pokazano da se smicanje mora uzeti u obzir kod kratkih štapova, veze unutarnja sila – ukupni pomak koje slijede integriranjem normalnog naprezanja po poprečnom presjeku s dvije osi simetrije glase [4, 17-21]

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA = EA \frac{du_M}{dx} - N^* \\
 M_z &= - \int_A \sigma_x y dA = EI_z \frac{d^2 v_P}{dx^2} - M_z^y \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA = -EI_y \frac{d^2 w_P}{dx^2} - M_y^z \\
 B &= \int_A \sigma_x \omega dA = -EI_\omega \frac{d^2 \alpha_P}{dx^2} - B^\omega
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

gdje je normalno naprezanje ravnog štapa σ_x određeno primjenom Hookovog zakona i izraza (1.2), a E i G su modul elastičnosti i modul smicanja pri čemu su A , I_z , I_y i I_ω redom površina poprečnog presjeka, aksijalni momenti tromosti površine u odnosu na z i y os te sektorski moment tromosti površine. Sekundarni momenti savijanja oko z i y osi pri savijanju s utjecajem smicanja, M_z^y i M_y^z , sekundarni bimoment pri uvijanju s utjecajem smicanja B^ω i sekundarna uzdužna sila N^* , za poprečne presjeka s dvije osi simetrije glase [4, 17-21]

$$\begin{aligned}
 M_z^y &= -\kappa_{yy} \frac{EI_z}{GA} q_y \\
 M_y^z &= \kappa_{zz} \frac{EI_y}{GA} q_z \\
 B^\omega &= \kappa_{\omega\omega} \frac{EI_\omega}{GI_P} m_\omega \\
 N^* &= 0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

gdje su κ_{yy} , κ_{zz} i $\kappa_{\omega\omega}$ faktori smicanja u odnosu na pomake v_P , w_P i α_P , a I_P je polarni moment tromosti površine u odnosu na glavni pol P . Iz uvjeta ravnoteže za ravne štapove vrijedi: $q_y = -dQ_y/dx$, $q_z = -dQ_z/dx$ i $m_\omega = -dM_\omega/dx$.

Uz torzijski moment tromosti površine I_t , moment čistog uvijanja M_t definiran kao

$$M_t = GI_t \frac{d\alpha_P}{dx} \quad (2.30)$$

je zanemariv po iznosu u odnosu na moment izvitoperenja M_ω kod kratkih ravnih tankostjenih štapova [4, 17-21]. Tada, za kratke ravne tankostjene štapove vrijedi

$$\begin{aligned} M_P &= M_\omega = B' \\ m_P &= m'_\omega. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ukupne mjere deformacija ravnog tankostjenog izotropnog štapa, čiji otvoreni poprečni presjek ima dvije osi simetrije, slijede iz izraza (2.28) te glase

$$\begin{aligned} \frac{du_M}{dx} &= \frac{N}{EA} \\ \frac{d^2v_P}{dx^2} &= \frac{M_z}{EI_z} + \frac{M_z^y}{EI_z} \\ -\frac{d^2w_P}{dx^2} &= \frac{M_y}{EI_y} + \frac{M_y^z}{EI_y} \\ -\frac{d^2\alpha_P}{dx^2} &= \frac{B}{EI_\omega} + \frac{B^\omega}{EI_\omega} \end{aligned} \quad (2.32)$$

gdje se s lijeve strane jednakosti u izrazu (2.32) nalazi ukupna duljinska deformacija, to jest nalaze se ukupne zakrivljenosti ravnog tankostjenog štapa. Članovi s desne strane jednakosti koji sadrže sekundarne unutarnje sile predstavljaju novouvedene sekundarne zakrivljenosti zbog smicanja.

Normalno naprezanje ravnog štapa σ_x prema teoriji savijanja i teoriji uvijanja s utjecajem smicanja (TBTS) za poprečni presjek s osi simetrije glasi

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + q_z \frac{E\kappa_z}{GA} z - q_z \frac{E}{GI_y} \int_0^{S_z} \frac{S_y^*}{t} ds - \frac{M_z}{I_z} y + q_y \frac{E\kappa_y}{GA} y \\ &\quad - q_y \frac{E}{GI_z} \int_0^{S_y} \frac{S_z^*}{t} ds + \frac{B}{I_\omega} \omega + m_\omega \frac{E\kappa_\omega}{GI_P} \omega - m_\omega \frac{E}{GI_\omega} \int_0^S \frac{S_\omega^*}{t} ds \end{aligned} \quad (2.33)$$

gdje su S_y^* , S_z^* i S_ω^* statički moment površine odsječenog dijela poprečnog presjeka u odnosu na y i z os te sektorski statički moment površine odsječenog dijela poprečnog presjeka. Značajke poprečnog presjeka koje su uvedene u ovom poglavlju, za I i H profile s dvije osi simetrije, definirane su u Prilogu B.

U postupku koji je predložen u ovom radu, kao i u Vlasovljevom modelu za štapove male zakrivljenosti, pretpostavljena je analogija veza unutarnja sila – pomak i izraza za naprezanje između ravnog štapa i štapa male zakrivljenosti. Tada je izraz za obodno naprezanje kod štapa male zakrivljenosti formalno jednak izrazu za normalno naprezanje ravnog štapa, a veza unutarnja sila – pomak zakrivljenog štapa se dobiva zamjenom mjera deformacija u vezi

unutarnja sila – pomak ravnog štapa. Tada veze unutarnja sila – pomak s utjecajem smicanja, kod štapa male zakrivljenosti, slijede primjenom izraza (2.12), (2.19) i (2.32) te glase

$$\begin{aligned}\frac{N}{EA} &= u_M' - \frac{v_P}{R} \\ \frac{M_z}{EI_z} + \frac{M_z^y}{EI_z} &= v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \\ \frac{M_y}{EI_y} + \frac{M_y^z}{EI_y} &= -w_P'' + \frac{\alpha_P}{R} \\ \frac{B}{EI_\omega} + \frac{B^\omega}{EI_\omega} &= -\alpha_P'' - \frac{w_P''}{R}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Pod pretpostavkom da se ukupni progibi, ukupni obodni pomak i ukupni zakreti mogu odrediti superpozicijom pomaka bez utjecaja smicanja, a koji formalno odgovara Vlasovljevom pomaku ili zakretu, i novouvedenog pomaka koji je posljedica smicanja vrijedi

$$\begin{aligned}u_M &= u_{M,VL} + u_{M,S}, & v_P &= v_{P,VL} + v_{P,S}, & w_P &= w_{P,VL} + w_{P,S}, \\ \alpha_P &= \alpha_{P,VL} + \alpha_{P,S}, & \beta &= \beta_{VL} + \beta_S, & \gamma &= \gamma_{VL} + \gamma_S, & \vartheta &= \vartheta_{VL} + \vartheta_S\end{aligned}\tag{2.35}$$

gdje su $u_{M,VL}$, $v_{P,VL}$, $w_{P,VL}$, $\alpha_{P,VL}$, β_{VL} , γ_{VL} i ϑ_{VL} translatorni i rotacijski pomaci bez utjecaja smicanja i koji odgovaraju Vlasovljevim pomacima. Utjecaj smicanja je sadržan u pomacima $u_{M,S}$, $v_{P,S}$, $w_{P,S}$, $\alpha_{P,S}$, β_S , γ_S i ϑ_S za koje primjenom izraza (2.20) i (2.23), vrijedi

$$\gamma_S = v_{P,S}', \beta_S = -w_{P,S}', \vartheta_S = -\alpha_{P,S}' - \frac{w_{P,S}'}{R}.\tag{2.36}$$

Temeljni izrazi ovog postupka slijede iz izraza (2.34) i (2.35), a separiranjem slijede veze primarna unutarnja sila – pomak bez smicanja

$$\begin{aligned}N &= EA \left(u_{M,VL}' - \frac{v_{P,VL}}{R} \right) \\ M_z &= EI_z \left(v_{P,VL}'' + \frac{v_{P,VL}}{R^2} \right) \\ M_y &= EI_y \left(\frac{\alpha_{P,VL}}{R} - w_{P,VL}'' \right) \\ B &= -EI_\omega \left(\alpha_{P,VL}'' + \frac{w_{P,VL}''}{R} \right)\end{aligned}\tag{2.37}$$

odnosno veze sekundarna unutarnja sila – pomak zbog smicanja

$$\begin{aligned}0 &= u_{M,S}' - \frac{v_{P,S}}{R} \\ M_z^y &= EI_z \left(v_{P,S}'' + \frac{v_{P,S}}{R^2} \right) \\ M_y^z &= EI_y \left(-w_{P,S}'' + \frac{\alpha_{P,S}}{R} \right) \\ B^\omega &= EI_\omega \left(-\alpha_{P,S}'' - \frac{w_{P,S}''}{R} \right).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Usporede li se izrazi (2.37) s izrazima za I i H profile s dvije osi simetrije koji su prikazani u [25] i [38] (gdje je utjecaj smicanja zanemaren, a koji slijede temeljem izraza (1.6), Hookovog zakona za normalno obodno naprezanje $\sigma_\phi = E\varepsilon_\phi$ te linearizacijom članova $R/(R - y)$ i $[R/(R - y)]^2$) i koji su definirani kao

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= EA \left(u'_M - \frac{v_P}{R} \right) - \frac{EI_z}{R} \left(v''_P + \frac{u'_M}{R} \right) \\ \tilde{M}_z &= EI_z \left(v''_P + \frac{v_P}{R^2} \right) \\ \tilde{M}_y &= -EI_y \left(w''_P - \frac{\alpha_P}{R} \right) - \frac{EK_\omega}{R} \left(\frac{w''_P}{R} + \alpha''_P \right) \\ \tilde{B} &= -\frac{EI_\omega}{R} \left(w''_P - \frac{\alpha_P}{R} \right) - EK_\omega \left(\frac{w''_P}{R} + \alpha''_P \right)\end{aligned}\tag{2.39}$$

lako se uočava kako Vlasovljev model pojednostavljuje utjecaj zakrivljenosti. U izrazima (2.39) je $K_\omega^I = -I_\omega$ za I profile s dvije osi simetrije [25], dok je $K_\omega^H = 2I_\omega$ za H profile s dvije osi simetrije [38]. Za štapove male zakrivljenosti (odnosno s velikim polumjerom zakrivljenosti R), razlika između rješenja dobivenih izrazima (2.37) i (2.39) postaje zanemariva, što dodatno potvrđuje ograničenost primjene Vlasovljevog modela na ove štapove. Također, lako se može uočiti da su u izrazima (2.37) – (2.39) unutarnje sile koje djeluju u ravnini zakrivljenosti funkcije pomaka u ravnini zakrivljenosti, kao što su unutarnje sile koje djeluju izvan ravnine zakrivljenosti funkcije pomaka izvan ravnine zakrivljenosti.

Sekundarne unutarnje sile, izrazi (2.38), primjenom izraza (2.29) postaju

$$\begin{aligned}0 &= u_{M,s}' - \frac{v_{P,s}}{R} \\ -\frac{\kappa_{yy}}{GA} q_y &= v_{P,s}'' + \frac{v_{P,s}}{R^2} \\ \frac{\kappa_{zz}}{GA} q_z &= \frac{\alpha_{P,s}}{R} - w_{P,s}'' \\ -\frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} m_\omega &= \alpha_{P,s}'' + \frac{w_{P,s}''}{R}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Izrazi (2.40) predstavljaju temeljne jednadžbe zbog smicanja. Prve dvije jednadžbe u (2.40) se odnose na štap opterećen u ravnini zakrivljenosti, a zadnje dvije jednadžbe se odnose na štap opterećen izvan ravnine zakrivljenosti.

Kod TBTS [4, 17-21] te postupaka korištenih u analizi štapova velike zakrivljenosti [3, 27], gdje je jednoliko posmično naprezanje određeno u zatvorenom obliku primjenom izraza (1.1) ili (1.8), sve unutarnje sile slijede integriranjem naprezanja po poprečnom presjeku. U ovom radu, kao i u Vlasovljevom modelu štapa male zakrivljenosti [5], nije prikazan izraz za jednoliko posmično naprezanje zakrivljenog štapa $\tau_{\phi\xi}^c$. Iz tog razloga se veze unutarnja sila –

pomak koje slijede integriranjem jednolikog posmičnog naprezanja po poprečnom presjeku moraju odrediti alternativnim metodama, a koje su opisane u potpoglavnjima 2.4 i 2.5.

U Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa je ukupni moment uvijanja oko glavnog pola P definiran primjenom izraza (2.4), (2.5) i (2.37) te glasi

$$M_P = M_\omega + M_t = -EI_\omega \left(\alpha_{P,VL}''' + \frac{w_{P,VL}''''}{R} \right) + GI_t \left(\alpha'_P + \frac{w'_P}{R} \right) \quad (2.41)$$

gdje je moment izvitoperenja M_ω definiran izrazima (2.5) i (2.37), a moment čistog uvijanja M_t je definiran primjenom (2.20) kao

$$M_t = GI_t \left(\alpha'_{P,VL} + \frac{w'_{P,VL}}{R} \right). \quad (2.42)$$

Kod kratkih ravnih tankostjenih štapova je vrijednost momenta čistog uvijanja M_t zanemariva u odnosu na vrijednost momenta izvitoperenja M_ω [4, 17 – 21]. Zato je u postupku predloženom u ovom radu, pri analizi zakrivljenih štapova, također zanemaren moment čistog uvijanja M_t i što značajno pojednostavljuje analizu zakrivljenih štapova te je usvojeno da vrijedi

$$M_P = M_\omega = B' = -EI_\omega \left(\alpha_{P,VL}''' + \frac{w_{P,VL}''''}{R} \right) \quad (2.43)$$

$$m_P = m_\omega.$$

Zbog ovog pojednostavljenja je postupak predložen u ovom radu ograničen na kratke i relativno kratke zakrivljene štapove za koje vrijedi

$$L/h^* \leq 8. \quad (2.44)$$

Također, preostale unutarnje sile (Q_y i Q_z) slijede primjenom jednadžbi ravnoteže. U istraživanjima koja su provedena u okviru ove disertacije, potvrđeno je da je moment čistog uvijanja M_t zanemarivog iznosa u odnosu na iznos momenta izvitoperenja M_ω kod zakrivljenih štapova za koje vrijedi uvjet (2.44).

Temeljne jednadžbe bez utjecaja smicanja slijede iz izraza (2.10), (2.37) i (2.43). Tada, pri opterećenju u ravnini zakrivljenosti temeljne jednadžbe glase

$$\begin{aligned} AE \left(u_{M,VL}'' - \frac{v_{P,VL}'}{R} \right) + \frac{EI_z}{R} \left(v_{P,VL}''' + \frac{v_{P,VL}'}{R^2} \right) + q_x &= 0 \\ -EI_z \left(v_{P,VL}'''' + \frac{v''_{P,VL}}{R^2} \right) + \frac{AE}{R} \left(u_{M,VL}' - \frac{v_{P,VL}}{R} \right) + q_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ove temeljne jednadžbe su korištene u predloženom postupku pri analizi opterećenja koje djeluju u ravnini zakrivljenosti i jednake su Vlasovljevim jednadžbama [5].

Za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, temeljne jednadžbe su

$$\begin{aligned} EI_y \left(\frac{\alpha_{P,VL}''}{R} - w_{P,VL}'''' \right) - \frac{EI_\omega}{R} \left(\alpha_{P,VL}'''' + \frac{w_{P,VL}''''}{R} \right) + q_z &= 0 \\ -\frac{EI_y}{R} \left(\frac{\alpha_{P,VL}}{R} - w_{P,VL}'' \right) - EI_\omega \left(\alpha_{P,VL}'''' + \frac{w_{P,VL}''''}{R} \right) + m_P &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Za razliku od Vlasovljevog pristupa, izrazi (2.41), u predloženom postupku je ukupni moment uvijanja M_P definiran izrazom (2.43). Upravo zbog toga se temeljne jednadžbe predloženog postupka, za slučaj opterećenja koje djeluje izvan ravnine zakrivljenosti, razlikuju od Vlasovljevih temeljnih jednadžbi za ovaj slučaj opterećenja, a koje su navedene u Prilogu C kao i pripadna im rješenja u zatvorenom obliku.

U izrazu (2.45) je opisano rastezanje/sabijanje štapa i savijanje štapa u ravnini zakrivljenosti te se može ustanoviti da su radijalni pomak $v_{P,VL}$ i obodni pomak $u_{M,VL}$ spregnuti. U izrazu (2.46) je opisano uvijanje štapa i savijanje štapa izvan ravnine zakrivljenosti, a može se vidjeti da su kut uvijanja konture poprečnog presjeka $\alpha_{P,VL}$ i pomak težišta okomito na ravninu zakrivljenosti $w_{P,VL}$ također spregnuti. Isti zaključak vrijedi za pomake zbog smicanja, izraz (2.40), gdje su pomaci koji se javljaju u ravnini zakrivljenosti ($v_{P,S}$ i $u_{M,S}$) spregnuti, kao što su spregnuti pomaci koji se javljaju izvan ravnine zakrivljenosti ($w_{P,S}$ i $\alpha_{P,S}$). Dakle, u ovom modelu je raspregnut međusobni utjecaj opterećenja i pomaka koji djeluju u ravnini i izvan ravnine zakrivljenosti. Prema [3, 25], gdje je zanemaren utjecaj kutne deformacije srednje plohe, ovaj odnos vrijedi i kod štapova velike zakrivljenosti kada poprečni presjek ima dvije osi simetrije.

Normalno naprezanje zakrivljenog štapa prema Vlasovljevom postupku σ_ϕ^{VL} [5] glasi

$$\sigma_\phi^{VL} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (2.47)$$

gdje su unutarnje sile u izrazu (2.47) definirane izrazom (2.37).

Uzevši u obzir analogije u izrazima za ravne i zakrivljene štapove, može se usvojiti da je normalno naprezanje zakrivljenog štapa σ_ϕ formalno jednako normalnom naprezanju ravnog štapa σ_x , izraz (2.33), pa glasi

$$\begin{aligned} \sigma_\phi &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + q_z \frac{E\kappa_{zz}}{GA} z - q_z \frac{E}{GI_y} \int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds - \frac{M_z}{I_z} y + q_y \frac{E\kappa_{yy}}{GA} y \\ &\quad - q_y \frac{E}{GI_z} \int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds + \frac{B}{I_\omega} \omega + m_\omega \frac{E\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \omega - m_\omega \frac{E}{GI_\omega} \int_0^s \frac{S_\omega^*}{t} ds \end{aligned} \quad (2.48)$$

Temeljem izraza (2.40), (2.45) i (2.46), u predloženom postupku je potrebno prvo odrediti rješenja u kojima je zanemaren utjecaj smicanja. Ukupna rješenja slijede superpozicijom ovih rješenja i rješenja koji su posljedica smicanja, dobivenih primjenom izraza (2.35) i (2.48), kao i u slučaju TBTS [4, 17-21].

Kada polumjer zakrivljenosti težišne linije teži u beskonačnost, zakrivljeni štap prelazi u ravni štap i tada svi izrazi postupka predloženog u ovom radu prelaze u izraze TBTS za poprečne presjeke s dvije osi simetrije.

Budući da je u ovom postupku raspregnut međusobni utjecaj opterećenja koja djeluju u i izvan ravnine zakrivljenosti, u nastavku teksta se posebno razmatraju ovi slučajevi opterećenja. U oba slučaja je za određivanje rješenja u zatvorenom obliku korištena metoda početnih parametara. Analiza prikazana u ovom radu je ograničena na jednolika opterećenja na jedinicu duljine te na izotropne štapove istovjetnih rubnih uvjeta na krajevima. Zakrivljeni štapovi su vezani za podlogu ili uklještenjem ili nepomičnim zglobnim osloncem na oba svoja kraja, te imaju poprečni presjek u obliku I ili H profila s dvije osi simetrije.

Rubni uvjeti potrebni za rješavanje temeljenih jednadžbi bez utjecaja smicanja, (2.45) i (2.36), su dani u tablici 2.1 [2, 3]. Kako se u ovom radu analiziraju samo štapovi čiji su oslonci na krajevima istovjetni, rubni uvjeti na polovici raspona štapa zbog simetrije su također dani u tablici 2.1. Rubni uvjeti potrebni za rješavanje temeljnih jednadžbi zbog smicanja (2.40) su navedeni prilikom njihovog rješavanja, što je opisano u nastavku teksta.

Tablica 2.1. Rubni uvjeti bez utjecaja smicanja.

opterećenje	uklještenje	nepomični oslonac	simetrija
u ravnini zakrivljenosti	$u_{M,VL} = 0$	$u_{M,VL} = 0$	$u_{M,VL} = 0$
	$v_{P,VL} = 0$	$v_{P,VL} = 0$	$\gamma_{VL} = 0$
	$\gamma_{VL} = 0$	$M_z = 0$	$Q_y = 0$
izvan ravnine zakrivljenosti	$w_{P,VL} = 0$	$w_{P,VL} = 0$	$\beta_{VL} = 0$
	$\beta_{VL} = 0$	$\alpha_{P,VL} = 0$	$\vartheta_{VL} = 0$
	$\alpha_{P,VL} = 0$	$M_y = 0$	$Q_z = 0$
	$\vartheta_{VL} = 0$	$B = 0$	$M_p = 0$

Veličine pomoću koji se definiraju rubni uvjeti potrebni pri analizi zakrivljenog štapa koji je opterećen koncentriranim opterećenjima su dani u tablici 2.2, a također slijede iz postupka koji je predložen u [2, 3].

Tablica 2.2. Veličine pomoću kojih se definiraju rubni uvjeti zbog koncentriranih opterećenja.

u ravni zakrivljenosti	izvan ravni zakrivljenosti
$N + M_z/R, Q_y, M_z$	Q_z, M_y, B, M_p

Kako je u ovom radu zanemaren utjecaj oblika poprečnog presjeka u izrazu koji daje veze bimomenta i momenta izvitoperenja [2, 3], u tablicama 2.1 i 2.2 je korišten bimoment B koji je definiran zadnjom jednažbom u izrazu (2.37). Rubni uvjeti prikazani u tablicama 2.1 i 2.2 vrijede i za ravne štapove, za koje vrijedi $R = \infty$.

Jednoliko posmično naprezanje $\tau_{x\xi}^c$ je u Vlasovljevom modelu ravnog štapa definirano kao

$$\tau_{x\xi}^c = \frac{Q_y S_z^*}{t I_z} + \frac{Q_z S_y^*}{t I_y} + \frac{M_\omega S_\omega^*}{t I_\omega} \quad (2.49)$$

i nije analizirano u ovom radu zato što je prilikom izvoda temeljnih izraza TBTS pretpostavljeno da vrijedi $\partial \tau_{x\xi}^c / \partial x = const$, to jest pretpostavlja se da su izrazi za jednoliko posmično naprezanje kod Vlasovljevog modela ravnog štapa i TBTS jednaki. Osim toga, u ovom radu su analizirani štapovi istovjetnih rubnih uvjeta na krajevima pri čemu je u svrhu usporedbe rješenja razmatran poprečni presjek na polovici raspona za kojeg vrijedi $Q_y = Q_z = M_\omega = 0$.

Uzevši u obzir temeljne izraze TBTS, Vlasovljev model zakrivljenog štapa je također moguće modificirati primjenom sljedećih izraza

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{dQ_z}{dx} \frac{E \kappa_z}{GA} z + \frac{dQ_z}{dx} \frac{E}{GI_y} \int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{dQ_y}{dx} \frac{E \kappa_y}{GA} y \\ &+ \frac{dQ_y}{dx} \frac{E}{GI_z} \int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds + \frac{B}{I_\omega} \omega - \frac{dM_p}{dx} \frac{E \kappa_\omega}{GI_p} \omega + \frac{dM_p}{dx} \frac{E}{GI_\omega} \int_0^s \frac{S_\omega^*}{t} ds \\ M_z^y &= \kappa_{yy} \frac{EI_z}{GA} \frac{dQ_y}{dx} \\ M_y^z &= -\kappa_{zz} \frac{EI_y}{GA} \frac{dQ_z}{dx} \\ B^\omega &= -\kappa_{\omega\omega} \frac{EI_\omega}{GI_p} \frac{dM_\omega}{dx} \\ N^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ovi izrazi, iako opravdaniji i u općem slučaju točniji, nisu primijenjeni u ovom radu zato što u tom slučaju analiza zakrivljenih štapova s utjecajem smicanja postaje znatno složenija.

2.4. Temeljne jednadžbe uslijed djelovanja opterećenja u ravnini zakrivljenosti

Eliminiranjem obodnog pomaka $u_{M,VL}$ iz sustava dviju diferencijalnih jednadžbi za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti (oduzimanjem derivirane druge jednadžbe u izrazu (2.45) od prve jednadžbe podijeljene s R), dobiva se nehomogena parcijalna diferencijalna jednadžba petog reda s konstantnim koeficijentima koja glasi

$$EI_z \left(v_{P,VL}'''''' + 2 \frac{v_{P,VL}''''}{R^2} + \frac{v_{P,VL}''}{R^4} \right) = q_y' - \frac{q_x}{R}. \quad (2.51)$$

U Prilogu D je opisan postupak rješavanja prethodno navedene diferencijalne jednadžbe, a čije rješenje za slučaj konstantnih sila na jedinicu duljine ($q_x = konst.$, $q_y = konst.$) glasi

$$v_{P,VL} = C_1 + (C_2 + C_3\phi) \cos \phi + (C_4 + C_5\phi) \sin \phi - q_x \frac{R^4}{EI_z} \phi \quad (2.52)$$

gdje je $\phi = \tilde{x}/R$, a C_1, \dots, C_5 su konstante integracije koje je potrebno odrediti iz rubnih uvjeta. Obodni pomak $u_{M,VL}$ slijedi integriranjem druge jednadžbe izraza (2.45), primjenom izraza (2.52), te glasi

$$\begin{aligned} u_{M,VL} = C_6 + C_1\phi + \left[C_3 \left(1 - \frac{2I_z}{AR^2} \right) - C_4 - C_5\phi \right] \cos \phi + \\ + \left[C_5 \left(1 - \frac{2I_z}{AR^2} \right) + C_2 + C_3\phi \right] \sin \phi - \frac{R^2 q_y \phi}{AE} - \frac{R^4 q_x \phi^2}{2I_y E} \end{aligned} \quad (2.53)$$

gdje je C_6 također konstanta integracije koju je potrebno odrediti iz rubnih uvjeta.

Kut nagiba tangente na elastičnu liniju γ_{VL} slijedi iz izraza (2.23) i (2.52), moment savijanja u ravnini zakrivljenosti M_z i obodna sila N slijede iz izraza (2.37), (2.52) i (2.53), a radijalna poprečna sila Q_y iz izraza (2.8), te glase

$$\begin{aligned} \gamma_{VL} = v'_{P,VL} &= \frac{1}{R} [(C_3 + C_4 + C_5\phi) \cos \phi + (C_5 - C_2 - C_3\phi) \sin \phi] - q_x \frac{R^3}{EI_z} \\ M_z &= \frac{EI_z}{R^2} (C_1 + 2C_5 \cos \phi - 2C_3 \sin \phi) - q_x R^2 \phi \\ N &= \frac{2EI_z}{R^3} (-C_5 \cos \phi + C_3 \sin \phi) - q_y R \\ Q_y &= \frac{2EI_z}{R^3} (C_3 \cos \phi + C_5 \sin \phi) + q_x R. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Prethodni izrazi se mogu iskazati metodom početnih parametara u matričnom obliku kao

$$\mathbf{v}^{\text{ip}} = \mathbf{K}^{\text{ip}} \mathbf{v}_0^{\text{ip}} + \mathbf{I}^{\text{ip}} \quad (2.55)$$

gdje su \mathbf{v}^{ip} , \mathbf{v}_0^{ip} , \mathbf{K}^{ip} i \mathbf{I}^{ip} redom vektor stanja, početni vektor stanja, matrica polja i vektor opterećenja kod štapa koji je opterećen u ravnini zakrivljenosti. Vektor stanja \mathbf{v}^{ip} je definiran kao

$$\mathbf{v}^{\text{ip}} = [Q_y \quad M_z \quad \gamma_{VL} \quad v_{P,VL} \quad N \quad u_{M,VL}]^T \quad (2.56)$$

dok je početni vektor stanja \mathbf{v}_0^{ip} definiran kao

$$\mathbf{v}_0^{\text{ip}} = [Q_{y0} \quad M_{z0} \quad \gamma_{VL0} \quad v_{P,VL0} \quad N_0 \quad u_{M,VL0}]^T. \quad (2.57)$$

Konstante C_1, \dots, C_6 se mogu odrediti u zatvorenom obliku rješavanjem sustava jednadžbi

$$\mathbf{v}^{\text{ip}}|_{x=0} = \mathbf{v}_0^{\text{ip}} \quad (2.58)$$

te glase

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{R^2}{EI_z} (M_{z0} + N_0 R + q_y R^2) \\ C_2 &= v_{P,VL0} - \frac{R^2}{EI_z} (M_{z0} + N_0 R + q_y R^2) \\ C_3 &= \frac{R^3}{2EI_z} (Q_{y0} - q_x R) \\ C_4 &= \gamma_{VL0} R - \frac{R^3}{2EI_z} (Q_{y0} - 3q_x R) \\ C_5 &= -\frac{R^3}{2EI_z} (N_0 + q_y R) \\ C_6 &= u_{M,VL0} + \gamma_{VL0} R + \frac{R(I_z - AR^2)}{AEI_z} Q_{y0} - \frac{R^2(I_z - 2AR^2)}{AEI_z} q_x. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Izrazi (2.52) – (2.59) također predstavljaju rješenje Vlasovljevog modela zakrivljenog štapa koji je opterećen u ravnini zakrivljenosti.

Nakon ovih rješenja, može se pristupiti rješavanju temeljnih jednadžbi zbog smicanja uslijed djelovanja opterećenja u ravnini zakrivljenosti. Prve dvije jednadžbe izraza (2.40) primjenom izraza (2.7) i (2.8) prelaze u

$$\begin{aligned} 0 &= u'_{M,s} - \frac{v_{P,s}}{R} \\ \frac{\kappa_{yy}}{GA} \left(Q'_y + \frac{N}{R} \right) &= \frac{\kappa_{yy}}{GA} \left(-M''_z + \frac{N}{R} \right) = v''_{P,s} + \frac{v_{P,s}}{R^2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Analitička rješenja ovog sustava nehomogenih diferencijalnih jednadžbi su prilično složena i ne mogu se pregledno i jednostavno iskazati. Kako je cilj ovog rada razvoj jednostavnog analitičkog modela u kojem je kutna deformacija srednje plohe uzeta u obzir, u ovom je radu pretpostavljeno da vrijedi:

- a) član $v_{P,S}/R^2$, odnosno $v_{P,VL}/R^2$, je zanemariv u odnosu na član $v''_{P,S}$, odnosno $v''_{P,VL}$ (kod štapova male zakrivljenosti je R višestruko veći od v_p),
- b) član N/R je zanemariv u odnosu na član M''_z zato što je sila na jedinicu duljine q_x izuzeta iz ove analize, a opravdano se može pretpostaviti da daje najveći doprinos iznosu obodne sile N ,
- c) zakret γ_s ne ovisi o rubnim uvjetima, kao što je slučaj kod TBTS,
- d) radijalni pomak $v_{P,S}$ je spriječen u presjeku $\tilde{x} = 0$,
- e) prilikom izračuna pomaka $u_{M,S}$, može se zanemariti vrijednost momenta savijanja M_{z0} u presjeku $\tilde{x} = 0$ ($\phi = 0$) (u predloženom postupku je izvitoperenje poprečnog presjeka zbog smicanja slobodno) i
- f) pomak $u_{M,S}$ ne ovisi o rubnim uvjetima, kao što je slučaj kod TBTS.

Uzevši u obzir pretpostavke (a) i (b), zadnja jednadžba izraza (2.60) prelazi u

$$-\frac{\kappa_{yy}}{GA} M''_z = v''_{P,S}. \quad (2.61)$$

Integriranjem izraza (2.61) te primjenom izraza (2.8) i (2.36), dobiva se

$$\gamma_s = -\frac{\kappa_{yy}}{GA} M'_z + d_1 = -\frac{\kappa_{yy}}{GA} M'_z = \kappa_{yy} \frac{Q_y}{GA} \quad (2.62)$$

gdje je $d_1 = 0$ zbog pretpostavke (c). Izraz (2.62) je također korišten u analizi zakrivljenih štapova koji su opterećeni u ravnini zakrivljenosti i gdje je smicanje uzeto u obzir [41] primjenom Timošenkovog modela [22], dok se veze unutarnja sila – pomak korištene u toj analizi [41] razlikuju od istih tih veza korištenih u ovoj analizi.

Integriranjem izraza (2.62) slijedi

$$v_{P,S} = -\kappa_{yy} \frac{M_z}{GA} + d_2 \quad (2.63)$$

gdje se konstanta integracije d_2 dobiva primjenom pretpostavke (d) i vrijedi

$$d_2 = \kappa_{yy} \frac{M_{z0}}{GA}. \quad (2.64)$$

Tada, primjenom izraza (2.63) i (2.64), slijedi

$$v_{P,S} = -\kappa_{yy} \frac{M_z - M_{z0}}{GA}. \quad (2.65)$$

Dodatni obodni pomak zbog smicanja $u_{M,S}$ slijedi iz izraza (2.60) i (2.65), a uzevši u obzir pretpostavku (e) vrijedi

$$u_{M,S} = \int \frac{v_{P,S}}{R} d\tilde{x} + d_3 = - \int \frac{\kappa_{yy}}{RGA} (M_z - M_{z0}) d\tilde{x} + d_3 = - \frac{\kappa_{yy}}{RGA} \int M_z d\tilde{x} \quad (2.66)$$

gdje je $d_3 = 0$ zbog pretpostavke (f). Prethodni izraz primjenom izraza (2.36) i (2.37) te pretpostavke (a) prelazi u

$$\begin{aligned} u_{M,S} &= - \frac{\kappa_{yy}}{RGA} \int EI_z \left(v_{P,VL}'' + \frac{v_{P,VL}}{R^2} \right) d\tilde{x} = - \frac{\kappa_{yy}}{RGA} EI_z \int v_{P,VL}'' d\tilde{x} \\ &= - \frac{\kappa_{yy}}{RGA} EI_z v_{P,VL}' = - \frac{\kappa_{yy}}{RGA} EI_z \gamma_{VL}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Analizom izraza (2.62), (2.65) i (2.67), u predloženom postupku je izvitoperenje poprečnog presjeka uslijed smicanja slobodno, kao u TBTS, a dodatni pomaci uslijed smicanja ne ovise o osloncima. Izrazi (2.62) i (2.65) su formalno jednaki ekvivalentnim izrazima za ravne štapove kod TBTS, gdje treba imati na umu da je utjecaj zakrivljenosti težišne linije sadržan u poprečnoj sili Q_y i momentu savijanja M_z , izrazi (2.54). Za razliku od TBTS, gdje je obodni pomak zbog smicanja kod poprečnog presjeka s dvije osi simetrije jednak nuli, u ovom postupku je obodni pomak zbog smicanja različit od nule.

Kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, tada zakrivljeni štap prelazi u ravni štap te izrazi (2.62), (2.65) i (2.67) prelaze u izraze TBTS. Tada su savijanje i rastezanje/sabijanje štapa raspregnuti, a vektor stanja \mathbf{v}^{ip} koji je definiran izrazom (2.55) se sastoji od vektora stanja ravnog štapa opterećenog na savijanje i vektora stanja ravnog štapa koji je opterećen na rastezanje. U tom slučaju izrazi (2.62) i (2.65) prelaze u formalno identične izraze za ravni štap, dok za izraz (2.67) vrijedi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u_{M,S} = 0. \quad (2.68)$$

Kako je utjecaj opterećenja koja djeluju u i izvan ravnine zakrivljenosti raspregnut kod zakrivljenog štapa čiji poprečni presjek ima s dvije osi simetrije, izraz (2.48) prelazi u

$$\sigma_{\phi}^{ip} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + q_y \frac{E \kappa_{yy}}{GA} y - q_y \frac{E}{GI_z} \int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds \quad (2.69)$$

gdje je σ_{ϕ}^{ip} obodno naprezanje za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti.

2.5. Temeljne jednadžbe uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti

Izrazi (2.46) predstavljaju sustav dviju diferencijalnih jednadžbi za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, gdje je zanemaren utjecaj smicanja te nije uključen moment čistog uvijanja. U Prilogu E je opisan postupak rješavanja ovog sustava diferencijalnih jednadžbi, a čije rješenje za slučaj konstantnih sila na jedinicu duljine ($q_z = konst.$, $m_p = konst.$) glasi

$$\begin{aligned}
 w_{P,VL}(x) = & C_1 + C_2\phi + C_3\phi^2 + C_4\phi^3 + (C_5 + C_6\phi)\cos\phi + (C_7 + C_8\phi)\sin\phi + \\
 & + \frac{R^6 q_z}{EI_\omega} \left(3 - \phi^2 + \frac{1}{24}\phi^4 \right) \\
 \alpha_{VL}(x) = & \frac{2}{R}C_3 + \frac{6C_4}{R}\phi + \left(D_1 C_8 - \frac{C_5}{R} - \frac{C_6}{R}\phi \right) \cos\phi - \left(D_1 C_6 + \frac{C_7}{R} + \frac{C_8}{R}\phi \right) \sin\phi \\
 & + \frac{R^2 m_p}{EI_y} - q_z \frac{R^3}{EI_\omega} \left[\frac{I_\omega}{I_y} + R^2 \left(2 - \frac{1}{2}\phi^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

gdje je $\phi = \tilde{x}/R$, C_1, \dots, C_8 su konstante integracije koje je potrebno odrediti iz rubnih uvjeta, dok je D_1 konstanta definirana kao

$$D_1 = \frac{2I_y R}{I_y R^2 + I_\omega} \tag{2.71}$$

Kut nagiba tangente na elastičnu liniju β_{VL} i relativni kut uvijanja ϑ_{VL} slijede iz izraza (2.20), (2.23) i (2.70), moment savijanja izvan ravnine zakrivljenosti M_y i bimoment B slijede iz izraza (2.37) i (2.70), ukupni moment uvijanja M_p iz izraza (2.43), a poprečna sila Q_z slijedi iz izraza (2.8). Ovi izrazi su izostavljeni u ovom radu zbog njihove složenosti, a u metodi početnih parametara se mogu iskazati u matričnom obliku kao

$$\mathbf{v}^{\text{op}} = \mathbf{K}^{\text{op}} \mathbf{v}_0^{\text{op}} + \mathbf{I}^{\text{op}} \tag{2.72}$$

gdje su \mathbf{v}^{op} , \mathbf{v}_0^{op} , \mathbf{K}^{op} i \mathbf{I}^{op} redom vektor stanja, početni vektor stanja, matrica polja i vektor opterećenja za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti. Vektor stanja \mathbf{v}^{op} je definiran kao

$$\mathbf{v}^{\text{op}} = [Q_z \quad M_y \quad \beta_{VL} \quad w_{P,VL} \quad M_p \quad B \quad \vartheta_{VL} \quad \alpha_{VL}]^T \tag{2.73}$$

dok je početni vektor stanja \mathbf{v}_0^{op} definiran kao

$$\mathbf{v}_0^{\text{op}} = [Q_{z0} \quad M_{y0} \quad \beta_{VL0} \quad w_{P,VL0} \quad M_{p0} \quad B_0 \quad \vartheta_{VL0} \quad \alpha_{VL0}]^T \tag{2.74}$$

Konstante C_1, \dots, C_8 se mogu odrediti u zatvorenom obliku rješavanjem sustava jednadžbi

$$\mathbf{v}^{op}|_{x=0} = \mathbf{v}_0^{op} \quad (2.75)$$

i glase

$$\begin{aligned} C_1 &= w_{P,VL,0} + R\alpha_{VL,0} + \frac{R^4}{EI_\omega} \left(2M_{y0} + \frac{B_0}{R} - 2m_p R \right) + \frac{R^4}{EI_y} \left(q_z - \frac{m_p}{R} \right) \\ C_2 &= \frac{R^4}{EI_\omega} (2RQ_{z0} - M_{P0}) - R^2 \vartheta_{VL,0} \\ C_3 &= \frac{R^2}{2EI_\omega} (-RM_{y0} - B_0 + R^2 m_p) \\ C_4 &= -\frac{R^5}{6EI_\omega} Q_{z0} \\ C_5 &= -\frac{2R^4}{EI_\omega} M_{y0} - \frac{R^3}{EI_\omega} B_0 - R\alpha_{VL0} - \frac{R^4(3I_y R^2 + I_\omega)}{EI_\omega I_y} q_z + \frac{R^3(2I_y R^2 + I_\omega)}{EI_\omega I_y} m_p \\ C_6 &= \frac{R^2(I_y R^2 + I_\omega)}{2EI_\omega I_y} (RQ_{z0} - M_{P0}) \\ C_7 &= -\frac{R^3(5I_y R^2 + I_\omega)}{2EI_\omega I_y} Q_{z0} - R\beta_{VL,0} + R^2 \vartheta_{VL,0} + \frac{R^2(3I_y R^2 + I_\omega)}{2EI_\omega I_y} M_{P0} \\ C_8 &= -\frac{R^2(I_y R^2 + I_\omega)}{2EI_\omega I_y} (M_{y0} + q_z R^2 - m_p R). \end{aligned} \quad (2.76)$$

S obzirom da su postavljene temeljni izrazi bez utjecaja smicanja te da su određena njihova rješenja za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, može se pristupiti definiranju dodatnih članova zbog smicanja. Zadnje dvije jednadžbe u izrazu (2.40) također predstavljaju sustav nehomogenih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima, a koje primjenom izraza (2.7), (2.8) i (2.43) prelaze u

$$-\frac{\kappa_{zz}}{GA} Q'_z = \frac{\alpha_{P,S}}{R} - w_{P,S}'' \quad (2.77)$$

$$\frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_p} \left(M'_p - \frac{M_y}{R} \right) = \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_p} \left(B'' - \frac{M_y}{R} \right) = \alpha_{P,S}'' + \frac{w_{P,S}''}{R}.$$

Analitička rješenja izraza (2.77) su poprilično složena, kao i u prethodnom slučaju. Zbog dobivanja jednostavnog modela zakrivljenog štapa s utjecajem smicanja, u ovom je radu prilikom rješavanja sustava jednadžbi koje su definirane izrazom (2.77) pretpostavljeno da vrijedi:

- g) član $\alpha_{P,S}/R$, odnosno $\alpha_{P,VL}/R$, je zanemariv u odnosu na član $w_{P,S}''$, odnosno $w_{P,VL}''$ (kod štapova male zakrivljenosti je R višestruko veći od α_P),
- h) zakret β_S ne ovisi o rubnim uvjetima, kao što je slučaj kod TBTS,
- i) pomak $w_{P,S}$ je spriječen u presjeku $\tilde{x} = 0$ ($\phi = 0$),
- j) relativni kut uvijanja $\vartheta_{P,S}$ ne ovisi o rubnim uvjetima, kao što je slučaj kod TBTS, i
- k) kut uvijanja $\alpha_{P,S}$ je spriječen u presjeku $\tilde{x} = 0$ ($\phi = 0$).

Uzevši u obzir pretpostavke (g) te izraz (2.37), izraz (2.77) prelazi u

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_z}{GA} Q_z' &= w_{P,S}'' \\ \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \left(B'' - \frac{M_y}{R} \right) &= \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \left[B'' - \frac{EI_y}{R} \left(\frac{\alpha_{P,VL}}{R} - w_{P,VL}'' \right) \right] = \\ &= \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \left(B'' + \frac{EI_y}{R} w_{P,VL}'' \right) = \alpha_{P,S}'' + \frac{w_{P,S}''}{R}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Integriranjem prve jednadžbe izraza (2.78), te primjenom izraza (2.36), slijedi

$$w_{P,S}' = -\beta_S = \frac{\kappa_{ZZ}}{GA} Q_z + d_1 = \frac{\kappa_{ZZ}}{GA} Q_z \quad (2.79)$$

gdje je $d_1 = 0$ zbog pretpostavke (h).

Integriranjem izraza (2.79), te primjenom izraza (2.8) i (2.43), slijedi

$$w_{P,S} = \frac{\kappa_{ZZ}}{GA} \left(M_y + \frac{B}{R} \right) + d_2 \quad (2.80)$$

gdje se konstanta integracije d_2 dobiva primjenom pretpostavke (i) te vrijedi

$$d_2 = -\frac{\kappa_{ZZ}}{GA} \left(M_{y,0} + \frac{B_0}{R} \right) \quad (2.81)$$

gdje su $M_{y,0}$ i B_0 vrijednost momenta savijanja i bimomenta u presjeku $\tilde{x} = 0$ ($\phi = 0$). Tada je primjenom izraza (2.80) i (2.81)

$$w_{P,S} = \frac{\kappa_{ZZ}}{GA} \left(M_y - M_{y,0} + \frac{B - B_0}{R} \right). \quad (2.82)$$

Relativni kut uvijanja se u ovom postupku dobiva integriranjem druge jednadžbe izraza (2.77) te primjenom izraza (2.36) pa glasi

$$\vartheta_{P,S} = -\kappa_{\omega\omega} \frac{M_P}{GI_P} + d_3 = -\kappa_{\omega\omega} \frac{M_{\omega}}{GI_P} = -\kappa_{\omega\omega} \frac{B'}{GI_P} \quad (2.83)$$

gdje je $d_3 = 0$ zbog pretpostavke (j).

Dodatni kut uvijanja zbog smicanja $\alpha_{P,S}$ slijedi integriranjem izraza (2.83) te primjenom izraza (2.36), to jest

$$\alpha_{P,S} = \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \left(B + \frac{EI_y}{R} w_{P,VL} \right) - \frac{w_{P,S}}{R} + d_4 \quad (2.84)$$

gdje se konstanta d_4 dobiva iz pretpostavke (k), to jest

$$d_4 = -\frac{\kappa_{\omega\omega} B_0}{GI_P}. \quad (2.85)$$

Tada izraz (2.84), primjenom izraza (2.85), prelazi u

$$\alpha_{P,S} = \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \left(B - B_0 + \frac{EI_y}{R} w_{P,VL} \right) - \frac{w_{P,S}}{R}. \quad (2.86)$$

Rubni uvjeti korišteni za ovaj slučaj opterećenja odgovaraju štapu koji je vezan za podlogu nepomičnim zglobnim osloncem. Iako se u ovom radu pretpostavlja da pomaci $\vartheta_{P,S}$ i β_S ne ovise o rubnim uvjetima, ovaj model je primijenjen i u analizi uklještenih štapova, ali tada treba imati na umu da je izvitoperenje poprečnog presjeka zbog smicanja slobodno.

Analizom izraza (2.79), (2.82), (2.83) i (2.86), može se utvrditi da dodatni pomaci uslijed smicanja ne ovise o osloncima, a izvitoperenje poprečnog presjeka uslijed smicanja je slobodno. Izrazi (2.79) i (2.83) su formalno jednaki ekvivalentnim izrazima za ravne štapove kod TBTS, gdje treba imati na umu da je sada u izrazima (2.79) i (2.83) sadržan utjecaj zakrivljenosti težišne linije.

Kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, tada zakrivljeni štap prelazi u ravni štap te svi izrazi ovog modela prelaze u izraze TBTS. Tada su savijanje i uvijanje štapa raspregnuti, a vektor stanja \mathbf{v}^{OP} koji je definiran izrazom (2.73) se sastoji od vektora stanja ravnog štapa opterećenog na savijanje i od vektora stanja ravnog štapa koji je opterećen na uvijanje. U tom slučaju izrazi (2.79) i (2.83) prelaze u formalno identične izraze, a za izraze (2.82) i (2.86) vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} w_{P,S} &= \frac{\kappa_{ZZ}}{GA} (M_y - M_{y,0}) \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \alpha_{P,S} &= \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_P} (B - B_0). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Zbog raspregnutosti opterećenja koja djeluju u ravnini i izvan ravnine zakrivljenosti, na štapove s poprečnim presjecima s dvije osi simetrije, izraz (2.48) prelazi u

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi}^{op} = & \frac{M_y}{I_y} z + q_z \frac{E \kappa_{zz}}{GA} z - q_z \frac{E}{GI_y} \int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds + \\ & + \frac{B}{I_{\omega}} \omega + m_{\omega} \frac{E \kappa_{\omega\omega}}{GI_P} \omega - m_{\omega} \frac{E}{GI_{\omega}} \int_0^s \frac{S_{\omega}^*}{t} ds \end{aligned} \quad (2.88)$$

gdje je σ_{ϕ}^{op} obodno naprezanje za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti.

Zanemarivanjem utjecaja zakrivljenosti u predloženom modelu dobiju se izrazi prema TBTS, za otvorene poprečne presjeke s dvije osi simetrije. Vlasovljevi model ravnog štapa slijedi dodatnim zanemarivanjem utjecaja smicanja. Kada se zanemari utjecaj smicanja kod predloženog postupka, bez obzira na razmatrani slučaj opterećenja, tada svi izrazi postupka predloženog u ovom radu prelaze u Vlasovljeve izraze za štap male zakrivljenosti pri čemu je iz analize izostavljen moment čistog uvijanja M_t .

3. ŠTAPOVI MALE I SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI S OTVORENIM DVOOSNO SIMETRIČNIM POPREČNIM PRESJECIMA

U nastavku teksta su ponovo prikazani prethodno izvedeni dodatni članovi uslijed smicanja, a ukupna rješenja se dobivaju superpozicijom ovih članova i Vlasovljevih rješenja (pri čemu je moment čistog uvijanja M_t zanemaren). Kod opterećenja koje djeluje u ravnini zakrivljenosti vrijedi

$$\begin{aligned} u_{M,S} &= -\frac{\kappa_{yy}}{RGA} EI_z \gamma_{VL} \\ v_{P,S} &= -\kappa_{yy} \frac{M_z - M_{z,0}}{GA} \\ \gamma_s &= \kappa_{yy} \frac{Q_y}{GA} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sigma_\phi^{ip} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + q_y \frac{E\kappa_{yy}}{GA} y - q_y \frac{E}{GI_z} \int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds.$$

Kod opterećenja koje djeluje izvan ravnine zakrivljenosti vrijedi

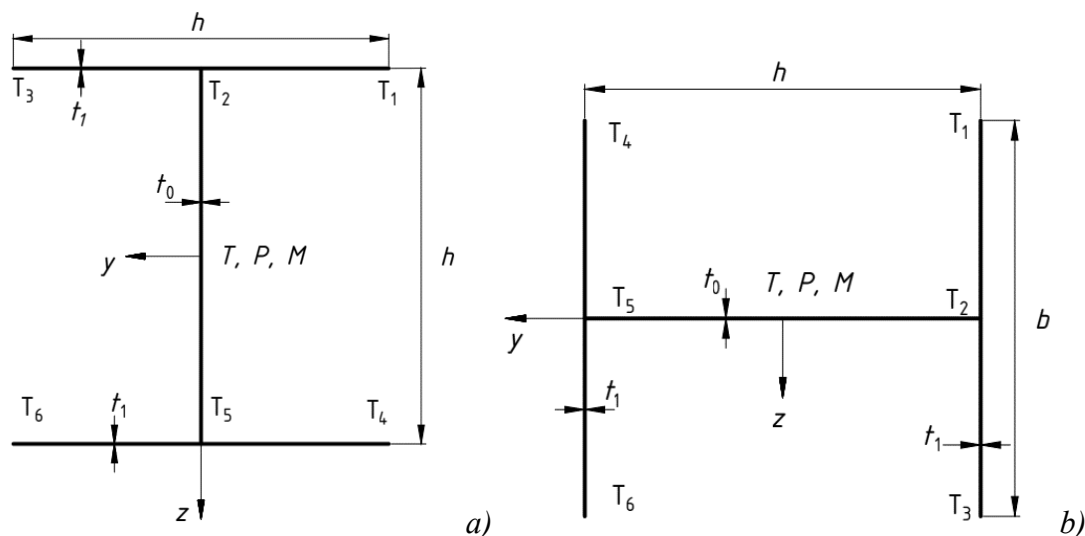
$$\begin{aligned} w_{P,S} &= \frac{\kappa_{zz}}{GA} \left(M_y - M_{y,0} + \frac{B - B_0}{R} \right) \\ \beta_s &= -\kappa_{zz} \frac{Q_z}{GA} \\ \alpha_{P,S} &= \frac{\kappa_{\omega\omega}}{GI_p} \left(B - B_0 + \frac{EI_y}{R} w_{P,VL} \right) - \frac{w_{P,S}}{R} \\ \vartheta_s &= -\kappa_{\omega\omega} \frac{M_\omega}{GI_p} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi^{op} &= \frac{M_y}{I_y} z + q_z \frac{E\kappa_{zz}}{GA} z - q_z \frac{E}{GI_y} \int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds + \\ &+ \frac{B}{I_\omega} \omega + m_\omega \frac{E\kappa_{\omega\omega}}{GI_p} \omega - m_\omega \frac{E}{GI_\omega} \int_0^s \frac{S_\omega^*}{t} ds. \end{aligned}$$

Razmatranjem izraza (3.1) i (3.2), jednoliko raspodijeljeno i koncentrirano opterećenje uzrokuje dodatne pomake zbog smicanja, a dodatni članovi u izrazima za naprezanje ovise samo o raspodijeljenim opterećenjima q_y , q_z i m_p . Zato je kod parametarske analize u ovom radu stavljen naglasak upravo na prethodno spomenuta raspodijeljena opterećenja.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Analiza provedena u ovom radu ograničena je na srednju liniju I i H profila s dvije osi simetrije, slika 3.1.



Slika 3.1. Srednja linija poprečnog presjeka s dvije osi simetrije: a) I profil; b) H profil.

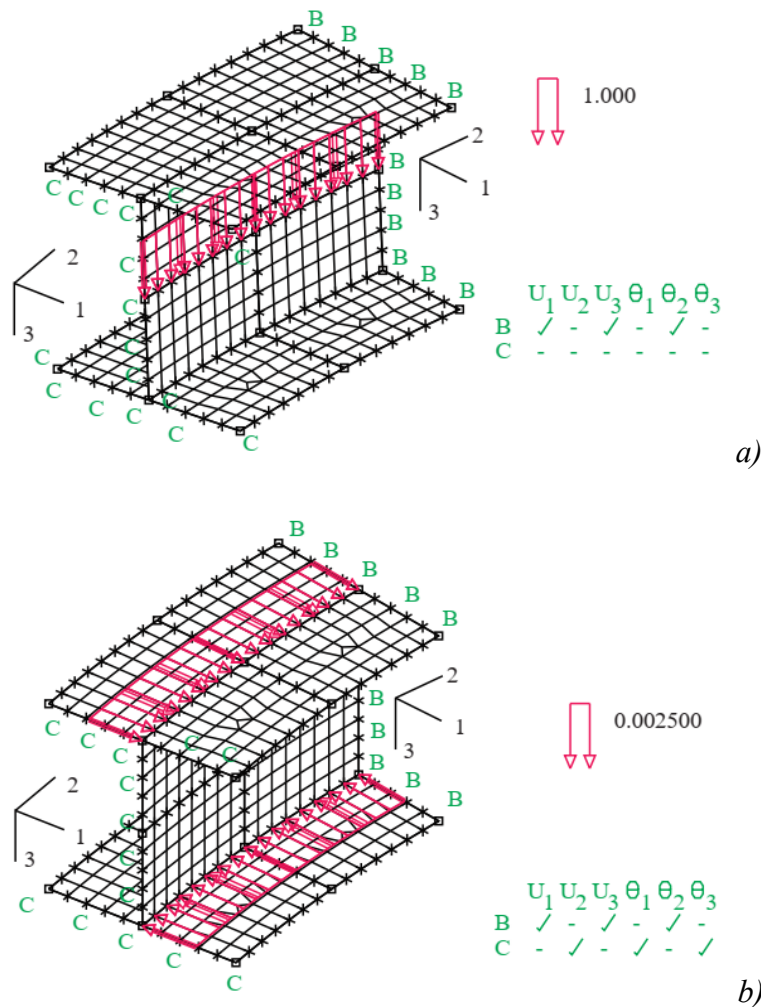
Kako je nosivost I profila bolja za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, a nosivost H profila za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti, tako je analiza u ovom radu provedena samo za ove slučajeve opterećenje – profil. Geometrijske značajke I i H poprečnih presjeka su navedene u Prilogu B. Kod ovih poprečnih presjeka se glavna ishodišna točka M i glavi pol P nalaze u težištu T poprečnog presjeka, a zbog toga se svi pomaci u (3.1) i (3.2) odnose na težište T .

U ovom je radu analiziran štap istih rubnih uvjeta na krajevima, a koji je vezan za podlogu ili uklještenjem ili nepomičnim zglobnim osloncem. Zbog toga je, i kod analitičkih i kod numeričkih modela, analizirana samo polovica štapa. Kod svih modela su rubni uvjeti i sile na jedinicu duljine definirane u odnosu na lokalni koordinatni sustav poprečnog presjeka $Txyz$. Lokalni koordinatni sustav je također korišten i prilikom očitavanja rezultata numeričkog modela. Zbog simetrije štapa su kod numeričkog modela na polovici raspona spriječeni obodni pomaci te zakreti poprečnog presjeka oko y i z osi. Kod uklještenja su spriječeni svi pomaci i svi zakreti rubnog poprečnog presjeka, slika 3.2.a, bez obzira na slučaj opterećenja. Kod nepomičnog oslonca, za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, su spriječeni svi poprečni pomaci te kut uvijanja rubnog poprečnog presjeka, slika 3.2.b. Kod nepomičnog oslonca, za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti, su spriječeni svi poprečni

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

pomaci i kut uvijanja rubnog poprečnog presjeka te je dodatno spriječen obodni pomak težišta rubnog presjeka, slika 3.3.

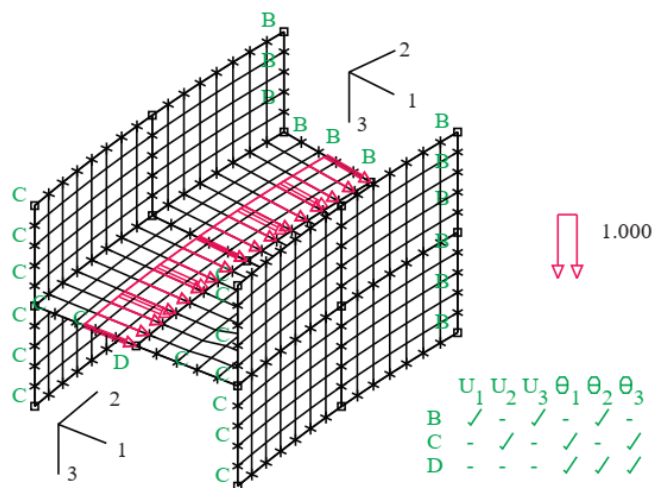
Verifikacija predloženog modela je provedena usporedbom s numeričkim rezultatima, a koji su dobiveni primjenom metode konačnih elemenata uz upotrebu linearnih ljuskastih konačnih elemenata s četiri čvora u programskom paketu ADINA [42]. Kod numeričkog modela I profila je sila na jedinicu duljine q_z modelirana u obliku vertikalnog opterećenja koje je okomito na ravninu zakrivljenosti ($q_z^{FEM} = q_z$), a koje djeluje duž težišne linije i što je pokazano na slici 3.2.a. Moment na jedinicu duljine m_p je modeliran primjenom sprega radijalnih sila na jedinicu duljine ($q_y^{FEM} = m_p/h$), a koje djeluju u spojevima pojasa i struka i što je pokazano na slici 3.2.b.



Slika 3.2. Opterećenje na jedinicu duljine i rubni uvjet u FEM modelu I profila:
a) opterećenje q_z i uklještenje; b) opterećenje m_p i zglobni oslonac.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Kod numeričkog modela H profila koji je opterećen u ravnini zakrivljenosti, radijalna sila na jedinicu duljine q_y definirana je u odnosu na težišnu liniju ($q_y^{FEM} = q_y$) i što je pokazano na slici 3.3.



Slika 3.3. Zglobni oslonac i radijalna sila na jedinicu duljine q_y u FEM modelu H profila.

Za koordinatne sustave i osi prikazane na slikama 2.2, 3.2 i 3.3 vrijedi: koordinatna os 1 odgovara radijalnoj osi y , os 2 odgovara obodnoj osi x dok os 3 odgovara osi z koja je okomita na ravninu zakrivljenosti. Znak "-" na slikama 3.2 i 3.2 označava spriječeni pomak. Poprečni presjek na slikama 3.2 i 3.3 koji je označen sa slovom B predstavlja polovicu raspona štapa, a poprečni presjek koji je označen sa slovom C predstavlja rubni presjek ($\tilde{x} = \phi = 0$).

Geometrijske značajke I i H profila s dvije osi simetrije koji su analizirani u ovom radu glase [17]: $t_0 = t_1 = t = 10$ mm, $b/t = 40$, $h/b = 1$, dok su usvojene materijalne karakteristike za čelik $\nu = 0.3$ i $E = 210$ GPa. Usvojena su opterećenja na jedinicu duljine $q_z = 1$ N/mm i $m_p = m_\omega = 1$ N/mm², za slučaj opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, te $q_y = 1$ N/mm, za slučaj opterećenja u ravnini zakrivljenosti. Utjecaj obodne sile na jedinicu duljine q_x je zanemaren i izostavljen u ovom radu. Duljina i polumjer štapa su definirani odnosima L/h i R/h , tim redoslijedom. Kod numeričkih modela su prosječna širina i duljina stranice konačnog elementa ljuske deset milimetara, bez obzira na razmatrani problem.

Usvojena je donja granica duljine štapa u parametarskoj analizi u iznosu od $L/h = 3$ zato što su rezultati numeričkog modela nepouzdana kod kraćih štapova. Gornja granica duljine štapa je definirana odnosom $L/h = 8$ zato što tada postaje značajan utjecaj zakrivljenosti, a utjecaj smicanja je kod duljih štapova u nekim slučajevima zanemariv. Kod kraćih štapova je utjecaj smicanja još izraženiji, bez obzira na poprečni presjek, oslonce i opterećenje. Donja granica zakrivljenosti štapa je definirana odnosom $R/h = 8$, s ciljem ispitivanja granica između štapa male i velike zakrivljenosti [5]. Gornja granica zakrivljenosti štapa u provedenoj parametarskoj analizi je usvojena u iznosu od $R/h = 30$, a koja se odnosi na malo zakrivljeni štap koji je sličan ravnom štapu.

3.1. I profil s dvije osi simetrije uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti

U ovoj analizi je ispitan utjecaj opterećenja q_z i m_p na I profil s dvije osi simetrije, a koji je vezan za podlogu ili uklještenjem ili nepomičnim zglobnim osloncem na oba svoja kraja. U nastavku teksta je, prilikom parametarske analize i verifikacije analitičkog modela, korišten faktor utjecaja smicanja koji predstavlja omjer razmatrane fizikalne veličine na sredini raspona i analogne fizikalne veličine određene primjenom Vlasovljevog pristupa na zakrivljene štapove. Faktor utjecaja smicanja na progib i faktor utjecaja smicanja na kut uvijanja za postupak predstavljen u ovom radu, redom η_w^s i η_α^s , te za numerički model, redom η_w^{FEM} i η_α^{FEM} , tada glase

$$\begin{aligned}\eta_w^s &= \frac{w_p}{w_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) = \frac{w_{p,VL} + w_{p,S}}{w_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) = 1 + \frac{w_{p,S}}{w_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \\ \eta_\alpha^s &= \frac{\alpha_p}{\alpha_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) = \frac{\alpha_{p,VL} + \alpha_{p,S}}{\alpha_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) = 1 + \frac{\alpha_{p,S}}{\alpha_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \\ \eta_w^{FEM} &= \frac{w_p^{FEM}}{w_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \\ \eta_\alpha^{FEM} &= \frac{\alpha_p^{FEM}}{\alpha_{p,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

gdje α_p^{FEM} ($\tilde{x} = L/2$) predstavlja prosječnu vrijednost kuta uvijanja na polovici raspona štapa kod numeričkog modela, a određena je s pomoću horizontalnih pomaka točaka T_1 , T_3 , T_4 i T_6 prikazanih na slici 3.1.a i prve jednadžbe izraza (2.25) te je definirana kao

$$\alpha_p^{FEM} = \frac{v_{T_4}^{FEM} - v_{T_1}^{FEM} + v_{T_6}^{FEM} - v_{T_3}^{FEM}}{2h}. \quad (3.4)$$

Faktori utjecaja smicanja na obodno naprezanje za pristup predstavljen u ovom radu i za numerički model, redom η_σ^S i η_σ^{FEM} , glase

$$\eta_\sigma^S = \frac{\sigma_\phi^{op}}{\sigma_{\phi,VL}^{op}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right), \quad \eta_\sigma^{FEM} = \frac{\sigma_\phi^{FEM}}{\sigma_{\phi,VL}^{FEM}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \quad (3.5)$$

gdje Vlasovljevi izrazi za obodno naprezanje $\sigma_{\phi,VL}^{op}$ slijedi iz izraza (2.47) i glasi

$$\sigma_{\phi,VL}^{op} = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_\omega} \omega. \quad (3.6)$$

Faktori utjecaja smicanja, (3.5), se odnose na ekstremne vrijednosti obodnog naprezanja u srednjoj liniji gornjeg pojasa na polovici raspona štapa, to jest na obodno naprezanje u točki T_1 , T_2 ili T_3 . Položaj prethodno spomenute ekstremne vrijednosti kod razmatranog I profila ovisi o odnosima L/h i R/h , a također vrijedi: $\sigma_\phi^{T_1} = -\sigma_\phi^{T_4}$, $\sigma_\phi^{T_2} = -\sigma_\phi^{T_5}$ i $\sigma_\phi^{T_3} = -\sigma_\phi^{T_6}$. Zato je kod svakog numeričkog modela određena točka s ekstremnom vrijednošću obodnog naprezanja, a zatim su određeni faktori utjecaja smicanja na naprezanje u toj točki. Relativne pogreške, kako predloženog pristupa tako i Vlasovljevog modela, u odnosu na numerički model slijede temeljem izraza (3.3) i (3.5) te glase

$$\rho_w^S = 100 \left(\frac{\eta_w^S}{\eta_w^{FEM}} - 1 \right), \quad \rho_\alpha^S = 100 \left(\frac{\eta_\alpha^S}{\eta_\alpha^{FEM}} - 1 \right), \quad \rho_\sigma^S = 100 \left(\frac{\eta_\sigma^S}{\eta_\sigma^{FEM}} - 1 \right), \quad (3.7)$$

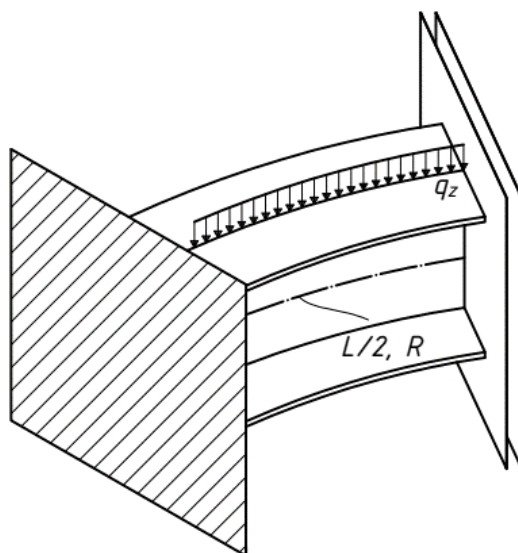
$$\rho_{w,VL}^S = 100 \left(\frac{1}{\eta_w^{FEM}} - 1 \right), \quad \rho_{\alpha,VL}^S = 100 \left(\frac{1}{\eta_\alpha^{FEM}} - 1 \right), \quad \rho_{\sigma,VL}^S = 100 \left(\frac{1}{\eta_\sigma^{FEM}} - 1 \right).$$

U ovoj analizi je također ispitan utjecaj zakrivljenosti usporedbom rješenja za zakrivljeni štap duljine L , odnosno ravni štap iste duljine, za isti slučaj opterećenja i istovjetne rubne uvjete. Faktor utjecaja zakrivljenosti η^{RS} predstavlja odnos razmatrane fizikalne veličine dobivene predloženim postupkom i odgovarajuće fizikalne veličine ravnog štapa prema TBTS te glasi

$$\eta_w^{RS} = \frac{w_P}{\lim_{R \rightarrow \infty} w_P}, \quad \eta_\alpha^{RS} = \frac{\alpha_P}{\lim_{R \rightarrow \infty} \alpha_P}, \quad \eta_\sigma^{RS} = \frac{\sigma_\phi^{op}}{\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_\phi^{op}}. \quad (3.8)$$

3.1.1. Utjecaj raspodijeljenog opterećenja q_z na I profil

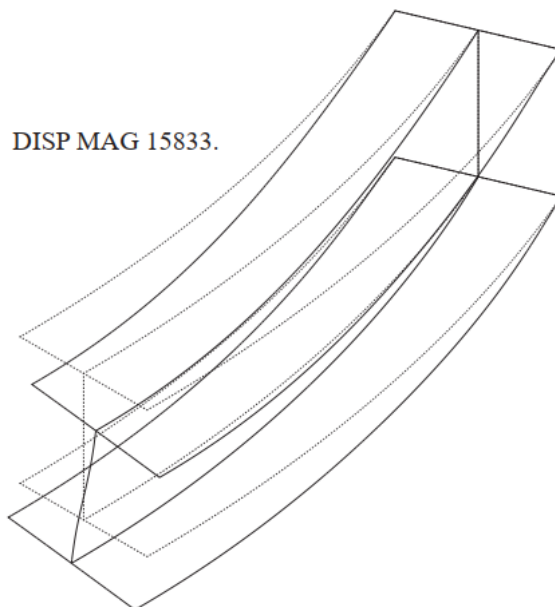
Na slici 3.4 je shematski prikazana polovica I profila koji je ukliješten na oba kraja i koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z . Na slici 3.5 su prikazani deformirani (neprekidna linija) i nedeformirani (crtkana linija) numerički model razmatranog I profila ($L/h = 8$ i $R/h = 10$), gdje DISP MAG označava faktor povećanja pomaka.



Slika 3.4. Ukliješteni I profil opterećen silom na jedinicu duljine q_z .

U tablicama 3.1 i 3.2 su prikazani faktori utjecaja smicanja na obodno naprezanje, η_{σ}^S za analitički model i η_{σ}^{FEM} za numerički model. U tablici 3.1 su dodatno označene točke gornjeg pojasa I profila, T_2 i T_3 sa slike 3.1.a, u kojima se pojavljuje maksimalna vrijednost obodnog naprezanja u gornjem pojasu na polovici raspona štapa. Osim toga, u tablici 3.1 su prikazani faktori utjecaja smicanja na normalno naprezanje kod ravnog štapa, gdje vrijedi $R/h = \infty$. Faktori utjecaja smicanja prikazani u tablici 3.2 se također odnose na prethodno opisane točke T_2 i T_3 .

Raspodjele obodnog naprezanja u donjem pojasu su suprotnog predznaka u odnosu na raspodjele obodnog naprezanja u gornjem pojasu kod I profila, za slučajeve opterećenja i oslonaca razmatrane u ovom potpoglavlju. Zbog toga je daljnja analiza obodnog naprezanja u donjem pojasu na polovici raspona štapa izostavljena u ovom potpoglavlju.



Slika 3.5. Deformirani i nedeformirani numerički model ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

Tablica 3.1. Faktor η_σ^s kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_σ^s				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,5192*	1,5165*	1,5129*	1,5122*	1,5117*
$L/h = 4$	1,3007*	1,2961*	1,2899*	1,2887*	1,2878*
$L/h = 5$	0,9121	0,9086	1,1874*	1,1856*	1,1842* 0,8722
$L/h = 6$	0,9419	0,9404	0,9325	0,9274	0,9112
$L/h = 7$	0,9579	0,9577	0,9532	0,9495	0,9348
$L/h = 8$	0,9675	0,9679	0,9659	0,9632	0,9500

Napomena: * označava faktor η_σ^s u točki T_2 , a u suprotnom se η_σ^s odnosi na točku T_3 .

Tablica 3.2. Faktor η_σ^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_σ^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,4755*	1,4735*	1,4710*	1,4706*
$L/h = 4$	1,2711*	1,2686*	1,2667*	1,2665*
$L/h = 5$	0,8997	0,8930	1,1688*	1,1689*
$L/h = 6$	0,9408	0,9316	0,9177	0,9111
$L/h = 7$	0,9738	0,9579	0,9414	0,9365
$L/h = 8$	1,0050	0,9809	0,9561	0,9520

Napomena: * označava faktor η_σ^{FEM} u točki T_2 , a u suprotnom se η_σ^{FEM} odnosi na točku T_3 .

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablici 3.3 su prikazane relativne pogreške u postotcima predloženog postupka u odnosu na numerički model za maksimalnu vrijednost obodnog naprezanja u gornjem pojasu na polovici raspona zakrivljenog štapa, ρ_σ^S . Relativne pogreške prikazane u tablici 3.3 se također odnose na točke navedene u tablici 3.1.

Tablica 3.3. Relativna pogreška ρ_σ^S kod uklještenog I profila opterećenog s q_z .

	$\rho_\sigma^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	2,9617*	2,9182*	2,8484*	2,8288*
$L/h = 4$	2,3287*	2,1677*	1,8315*	1,7529*
$L/h = 5$	1,3782	1,7469	1,5914*	1,4287*
$L/h = 6$	0,1169	0,9446	1,6127	1,7890
$L/h = 7$	-1,6328	-0,0209	1,2535	1,3881
$L/h = 8$	-3,7313	-1,3253	1,0250	1,1765

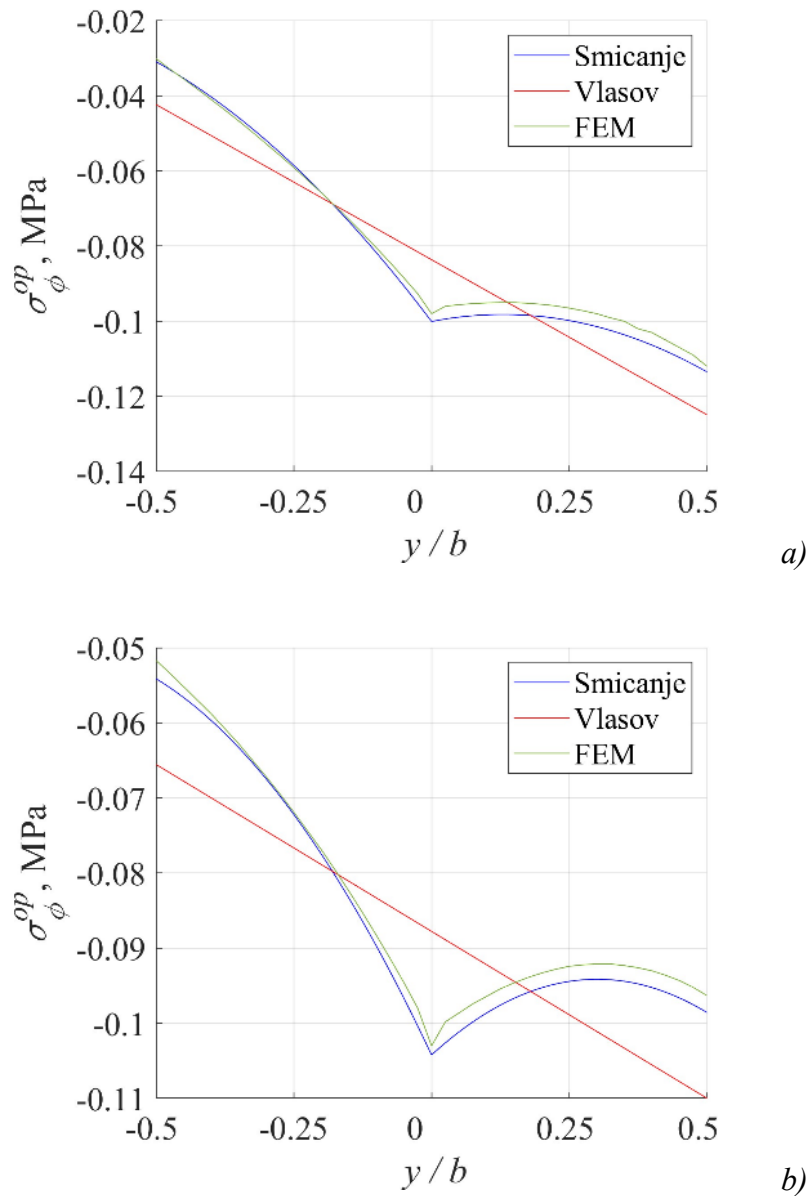
Napomena: * označava relativnu pogrešku ρ_σ^S u točki T_2 , a u suprotnom se ρ_σ^S odnosi na točku T_3

Iz tablica 3.1 i 3.2 je vidljivo da se za razmatrani problem utjecaj smicanja na obodno naprezanje mora uzeti u obzir, pogotovo kod vrlo kratkih štapova. Relativna pogreška predloženog postupka ρ_σ^S je u većini slučajeva manja od tri posto, tablica 3.3, i značajno je manja od relativne pogreške Vlasovljevog modela $\rho_{\sigma,VL}^S$, a koja slijedi primjenom izraza (3.7) i faktora η_σ^{FEM} koji je prikazan u tablici 3.2. Tako za $L/h = 3$ i $R/h = 10$, relativna pogreška Vlasovljevog modela je $\rho_{\sigma,VL}^S = 100(1/1,4735 - 1)\% = -32,1343\%$, a relativna pogreška predloženog postupka tada iznosi $\rho_\sigma^S = 2,9182\%$. Relativna pogreška Vlasovljevog modela je izostavljena u nastavku teksta zbog njezine jednostavnosti izračuna iz faktora utjecaja smicanja numeričkog modela u odnosu na Vlasovljev model, η_σ^{FEM} .

Iz priloženih rezultata slijedi da se maksimalno obodno naprezanje u gornjem pojasu na polovici raspona zakrivljenog štapa pojavljuje u različitim točkama te ovisi o geometriji štapa (odnosi R/h i L/h). Kod ravnih štapova koji su opterećeni sa silom na jedinicu duljine q_z , slika 1.1.a, najveće normalno naprezanje se javlja u točki T_2 , a normalna naprezanja u točkama T_1 i T_3 su jednaka. Kod razmatranog problema se na polovici raspona ekstremno kratkog štapa ($L/h \leq 4$) najveće obodno naprezanje javlja u točki T_2 , a kod relativno kratkih štapova ($L/h > 5$) se najveće obodno naprezanje pojavljuje u točki T_3 . Kod zakrivljenih štapova za koje vrijedi $L/h = 5$, kao što je pokazano na slici 3.6 i u tablici 3.1, s porastom odnosa R/h se najveće obodno naprezanje u numeričkom modelu i predloženom postupku premješta iz točke T_3 u točku T_2 .

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Na slici 3.6 je prikazana raspodjela obodnog naprezanja σ_{ϕ}^{op} u gornjem pojasu na polovici raspona štapa kod dva relativno kratka štapa ($L/h = 5$) koji imaju različite polumjere zakrivljenosti ($R/h = 10$ i $R/h = 20$). Kod zakrivljenih štapova vrijedi $|\sigma_{\phi}^{T_1}| \neq |\sigma_{\phi}^{T_3}|$, kao što je prikazano na slici 3.6. Predloženi postupak uspješno aproksimira numeričku raspodjelu obodnog naprezanja u gornjem pojasu, za razliku od Vlasovljeve raspodjele koja je linearna. Raspodjele obodnog naprezanja koje su prikazane na slici 3.6 s porastom polumjera R prelaze u raspodjele ravnog štapa, to jest smanjuje se nagib raspodjela obodnog naprezanja.



Slika 3.6. Raspodjela obodnog naprezanja σ_{ϕ}^{op} u gornjem pojasu ukliještenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z ($L/h = 5$, $\tilde{x}/L = 0.5$): a) $R/h = 10$; b) $R/h = 20$.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Kod zakrivljenih štapova za koje vrijedi $L/h > 6$, najveće obodno naprezanje u gornjem pojasu na polovici raspona štapa se također premješta iz točke T_3 u točku T_2 , ali to se događa pri velikim odnosima R/h , odnosno vrlo malim zakrivljenostima.

U tablicama 3.4 i 3.5 su prikazani faktori utjecaja smicanja na progib w_P , η_w^S za analitički model i η_w^{FEM} za numerički model, a u tablici 3.4 su također prikazani faktori utjecaja smicanja na progib w_P kod ravnog štapa. U tablici 3.6 su prikazane relativne pogreške progiba u postocima između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_w^S .

Tablica 3.4. Faktor η_w^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_w^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	9,9521	10,0084	10,0859	10,1005	10,1123
$L/h = 4$	5,9048	5,9790	6,0871	6,1083	6,1257
$L/h = 5$	4,0062	4,0905	4,2271	4,2561	4,2804
$L/h = 6$	2,9728	3,0544	3,2086	3,2457	3,2780
$L/h = 7$	2,3636	2,4325	2,5884	2,6326	2,6737
$L/h = 8$	1,9855	2,0389	2,1824	2,2314	2,2814

Tablica 3.5. Faktor η_w^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_w^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	9,8738	9,9267	9,9993	10,013
$L/h = 4$	5,8590	5,9298	6,0323	6,0524
$L/h = 5$	3,9797	4,0618	4,1934	4,2211
$L/h = 6$	2,9551	3,0355	3,1865	3,2224
$L/h = 7$	2,3508	2,4181	2,5726	2,6159
$L/h = 8$	1,9783	2,0276	2,1699	2,2186

Tablica 3.6. Relativna pogreška ρ_w^S kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	$\rho_w^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	0,7930	0,8230	0,8661	0,8739
$L/h = 4$	0,7817	0,8297	0,9084	0,9236
$L/h = 5$	0,6659	0,7066	0,8036	0,8292
$L/h = 6$	0,5990	0,6226	0,6936	0,7231
$L/h = 7$	0,5445	0,5955	0,6142	0,6384
$L/h = 8$	0,3639	0,5573	0,5761	0,5769

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

S obzirom na tablice 3.5 i 3.6, za razmatrani problem se utjecaj smicanja na progib w_P također mora uzeti u obzir, pri čemu je utjecaj smicanja na progib značajniji od utjecaja smicanja na obodno naprezanje, tablice 3.1 do 3.6. Relativna pogreška progiba kod predloženog postupka ρ_w^s je unutar jedan posto, tablica 3.6, a prema tablici 3.5 je relativna pogreška progiba kod Vlasovljevog modela značajna (pogotovo kod vrlo kratkih štapova).

Kao što se može vidjeti u tablici 3.4, faktor η_w^s blago raste s porastom odnosa R/h i manji je od faktora utjecaja smicanja na progib ravnog štapa. Ovo je posljedica početne zakrivljenosti nedeformirane težišne linije i zbog toga se kontura poprečnog presjeka uslijed djelovanja razmatranog slučaja opterećenja istodobno translacija u smjeru osi z i rotira oko glavnog pola P , bez obzira na oslonce. Tada kod zakrivljenog štapa kutna deformacija srednje plohe, to jest smicanje, utječe i na kut uvijanja α_P i na progib w_P . Kod ravnih štapova koji su opterećeni s q_z i čiji poprečni presjek ima dvije osi simetrije, slika 1.1a, uslijed djelovanja opterećenja se štap savija bez uvijanja, a smicanje tada utječe samo na progib. Upravo zbog toga je faktor utjecaja smicanja na progib kod ravnog štapa veći od faktora utjecaja smicanja kod zakrivljenog štapa. Razlika između ova dva faktora se smanjuje s porastom odnosa R/h , što je i vidljivo u tablici 3.4.

U tablicama 3.7 i 3.8 su prikazani faktori utjecaja smicanja na kut uvijanja α_P , η_α^s za analitički model i η_α^{FEM} za numerički model, a u tablici 3.9 su prikazane relativne pogreške kuta uvijanja u postocima između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_α^s . Faktor η_α^s ravnog štapa je izostavljen u tablici 3.7 zato što kod ravnog štapa, za slučaj razmatranog opterećenja i profila, ne dolazi do uvijanja poprečnog presjeka.

Tablica 3.7. Faktor η_α^s kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_α^s			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	3,1865	3,1898	3,1943	3,1951
$L/h = 4$	1,7437	1,7555	1,7713	1,7743
$L/h = 5$	1,2646	1,2904	1,3249	1,3313
$L/h = 6$	1,0446	1,0886	1,1477	1,1587
$L/h = 7$	0,9082	0,9737	1,0623	1,0789
$L/h = 8$	0,8014	0,8908	1,0132	1,0362

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.8. Faktor η_{α}^{FEM} kod uklještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_{α}^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,3980	1,4131	1,4346	1,4388
$L/h = 4$	1,2039	1,2247	1,2570	1,2636
$L/h = 5$	1,0958	1,1182	1,1581	1,1671
$L/h = 6$	1,0359	1,0549	1,0978	1,1090
$L/h = 7$	1,0077	1,0188	1,0580	1,0709
$L/h = 8$	1,0007	1,0015	1,0307	1,0443

Tablica 3.9. Relativna pogreška ρ_{α}^S kod uklještenog I profila opterećenog s q_z .

	$\rho_{\alpha}^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	127,9328	125,7307	122,6614	122,0670
$L/h = 4$	44,8376	43,3412	40,9149	40,4163
$L/h = 5$	15,4043	15,3997	14,4029	14,0691
$L/h = 6$	0,8398	3,1946	4,5455	4,4815
$L/h = 7$	-9,8740	-4,4268	0,4064	0,7470
$L/h = 8$	-19,9161	-11,0534	-1,6979	-0,7756

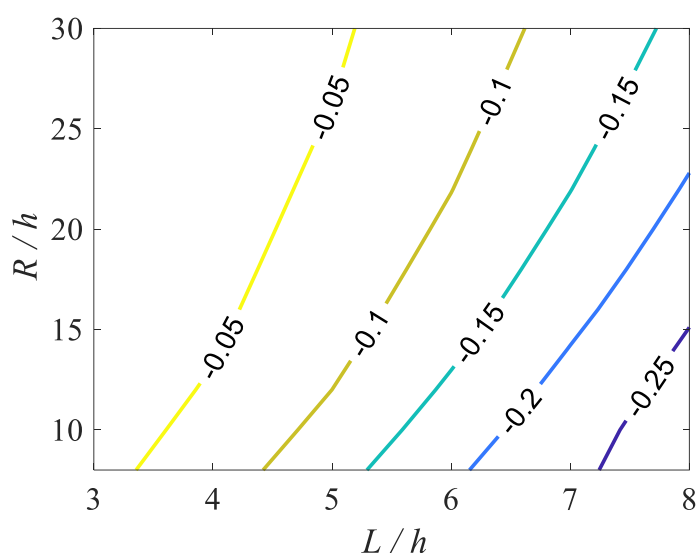
Kao što se može vidjeti u tablici 3.8, smicanje se mora uzeti u obzir kod razmatranog problema, pri čemu su procjene kuta uvijanja kod predloženog postupka općenito lošije od Vlasovljevog modela i što se može vidjeti usporedbom rezultata prikazanih u tablicama 3.7 do 3.9. Međutim, važno je naglasiti kako ni Vlasovljev model, naročito za kraće štapove, ne procjenjuje dobro vrijednosti kuta uvijanja. Ovaj nedostatak predloženog modela je vjerojatno posljedica pojednostavljenja temeljnih jednadžbi zbog smicanja, te su potreba daljnja poboljšanja u predloženom modelu.

Prema izrazu (2.25), utjecaj kuta uvijanja α_P na pomak w u smjeru koordinatne osi z je kod razmatranog poprečnog presjeka (slika 3.1.a) najveći u točkama T_1 , T_3 , T_4 i T_6 i za koje vrijedi $y = \pm b/2$. Stoga je na slici 3.7, za razmatrani problem na polovici raspona štapa, prikazan udio vertikalnog pomaka uslijed kuta uvijanja α_P u ukupnom vertikalnom pomaku rubnih točaka poprečnog presjeka kao omjer članova $b\alpha_P^{FEM}/2$ i w_P^{FEM} . Iz slike je vidljivo da udio vertikalnih pomaka zbog uvijanja, $(b\alpha_P^{FEM}/2)/w_P^{FEM}$, raste s povećanjem duljine štapa, odnosno odnosa L/h .

Sukladno izrazu (2.25) i rezultatima koji su prikazani na slici 3.7, progib w_P je dominantna veličina kod pomaka proizvoljne točke S u smjeru osi z na polovici raspona štapa (pogotovo

kod vrlo kratkih štapova). Kako predloženi postupak odlično procjenjuje progib w_p , za razliku od Vlasovljevog modela gdje su ta odstupanja značajna i što je pokazano u tablicama 3.4 do 3.6, prethodno spomenuta pogreška u procjeni kuta uvijanja α_p se iz tog razloga može smatrati manje utjecajnom za razmatrani slučaj opterećenja.

Sukladno rezultatima koji su prikazani u tablicama 3.1 do 3.6, predloženi postupak odlično predviđa progib i obodno naprezanje, pri čemu je utjecaj smicanja izraženiji kod progiba nego kod obodnog naprezanja. Faktori utjecaja smicanja zakrivljenog kratkog štapa (η_σ^S , η_σ^{FEM} , η_w^S i η_w^{FEM}) su približno jednaki faktorima utjecaja smicanja kod ravnog štapa, pri čemu oni s porastom odnosa R/h prelaze u faktore utjecaja smicanja kod ravnog štapa.



Slika 3.7. Odnos $(b\alpha_p^{FEM}/2)/w_p^{FEM}$ kod uklještenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z .

Utjecaj smicanja na kut uvijanja α_p se također mora uzeti u obzir kod vrlo kratkih štapova, kao što je pokazano u tablicama 3.7 do 3.9. Kako su u tom slučaju procjene kuta uvijanja kod predloženog postupka lošije od procjena Vlasovljevog modela, potrebna su daljnja istraživanja i poboljšanja predloženog modela.

Bez obzira na razmatranu fizikalnu veličinu prikazanu u tablicama 3.1 do 3.9, s porastom odnosa L/h se smanjuje utjecaj smicanja, što je također slučaj kod ravnih štapova. Vlasovljeve procjene obodnog normalnog naprezanja σ_ϕ (tablica 3.2) i kuta uvijanja α_p (tablica 3.8) su vrlo dobre kod duljih štapova, za razliku od Vlasovljevih procjena progiba w_p (tablica 3.5) gdje je kod duljih štapova značajan utjecaj smicanja.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablicama 3.10 i 3.11 su prikazani faktori utjecaja zakrivljenosti, η_{σ}^{RS} na obodno naprezanje i η_w^{RS} na progib. Faktor η_{σ}^{RS} prikazan u tablici 3.10 se također odnosi na točke navedene u tablici 3.1. Kut uvijanja α_p je kod ravnog štapa i razmatranog slučaja opterećenja jednak nuli pa je prema definiciji (3.8) faktor η_{α}^{RS} beskonačan. Faktori utjecaja zakrivljenosti, koji su prikazani u tablicama 3.10 i 3.11, mogu se dobiti usporedbom rezultata Vlasovljevog modela zakrivljenog štapa i Vlasovljevog modela ravnog štapa. Faktor utjecaja smicanja i zakrivljenosti, koji predstavlja odnos između rješenja predloženog postupka i Vlasovljevog modela ravnog štapa, slijedi kada se faktor utjecaja zakrivljenosti pomnoži s faktorom utjecaja smicanja ravnog štapa iste duljine.

Tablica 3.10. Faktor η_{σ}^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

	η_{σ}^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0,9905*	0,9938*	0,9985*	0,9993*	1
$L/h = 4$	0,9668*	0,9783*	0,9944*	0,9975*	
$L/h = 5$	1,5216	1,4572	0,9855*	0,9934*	
$L/h = 6$	1,5799	1,5380	1,3453	1,2454	
$L/h = 7$	1,5894	1,5809	1,4232	1,3114	
$L/h = 8$	1,5664	1,5863	1,4909	1,3780	
Napomena: * označava faktor η_{σ}^{RS} u točki T_2 , a u suprotnom se η_{σ}^{RS} odnosi na točku T_3 .					

Tablica 3.11. Faktor η_w^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s q_z .

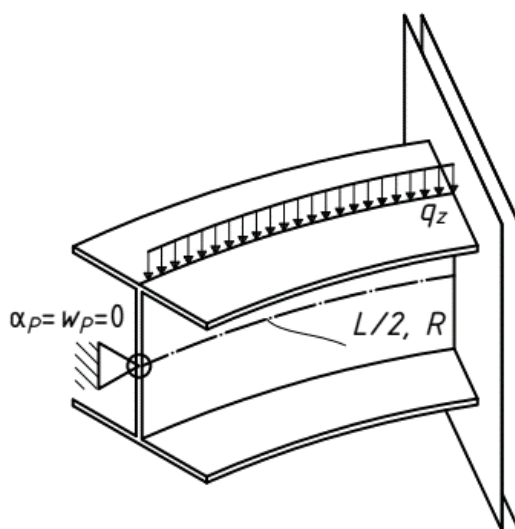
	η_w^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,0018	1,0011	1,0003	1,0001	1
$L/h = 4$	1,0073	1,0048	1,0012	1,0006	
$L/h = 5$	1,0213	1,0144	1,0039	1,0018	
$L/h = 6$	1,0472	1,0332	1,0096	1,0044	
$L/h = 7$	1,0850	1,0629	1,0200	1,0094	
$L/h = 8$	1,1316	1,1023	1,0367	1,0178	

Sukladno rezultatima koji su prikazani u tablicama 3.10 i 3.11, utjecaj zakrivljenosti je manje izražen kod progiba nego kod obodnog naprezanja. Utjecaj zakrivljenosti na progib je malo izraženiji kod duljih štapova manjeg polumjera, dok kod ostalih štapova vrijedi $\eta_w^{RS} \cong 1$. Kod vrlo kratkih štapova je utjecaj zakrivljenosti na progib i obodno naprezanje zanemariv. Kada se maksimalno obodno naprezanje u gornjem pojasu na polovici raspona štapa nalazi u točki T_2 (spoj gornjeg pojasa i struka), što je slučaj kod vrlo kratkih zakrivljenih i ravnih štapova, tada je faktor η_{σ}^{RS} malo manji od jedan. Faktor η_{σ}^{RS} , kada se maksimalno obodno naprezanje u

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

gornjem pojasu na polovici raspona štapa javlja u točki T_3 (rubna točka gornjeg pojasa), je veći od jedan. S porastom odnosa R/h svi faktori utjecaja zakrivljenosti teže prema jedinici, pri čemu je kod duljih štapova i faktora η_{σ}^{RS} ovaj prijelaz sporiji. S porastom odnosa L/h se maksimalno naprezanje javlja u točki T_3 te raste utjecaj zakrivljenosti na pripadajuće fizikalne veličine (posebno na obodno naprezanje što je vidljivo iz tablice 3.10 za $L/h \geq 5$).

Na slici 3.8 je shematski prikazana polovica I profila koji je zglobno oslonjen na oba kraja i koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z . Na slici 3.9 su prikazani deformirani i nedeformirani numerički model razmatranog I profila, gdje je $L/h = 8$ i $R/h = 10$.



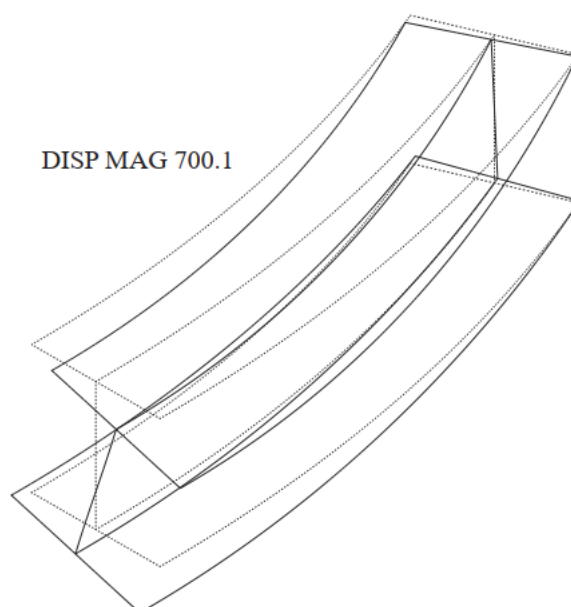
Slika 3.8. Zglobno oslonjeni I profil opterećen silom na jedinicu duljine q_z .

U tablici 3.12 je prikazan faktor η_{σ}^S , određen pomoću predloženog postupka, te faktor utjecaja smicanja ravnog štapa. Također je označena i točka razmatranog profila u kojoj se pojavljuje maksimalno obodno naprezanje u gornjem pojasu na polovici raspona štapa.

Tablica 3.12. Faktor η_{σ}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	η_{σ}^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0,9359	0,9292	0,9111	1,1704*	0,8816 1,1705*
$L/h = 4$	0,9736	0,9697	0,9581	0,9521	0,9334
$L/h = 5$	0,9875	0,9852	0,9778	0,9735	0,9574
$L/h = 6$	0,9934	0,9921	0,9873	0,9842	0,9704
$L/h = 7$	0,9963	0,9954	0,9923	0,9901	0,9782
$L/h = 8$	0,9978	0,9972	0,9950	0,9935	0,9833

Napomena: * označava faktor η_{σ}^S u točki T_2 , a u suprotnom se faktor η_{σ}^S odnosi na točku T_1 .

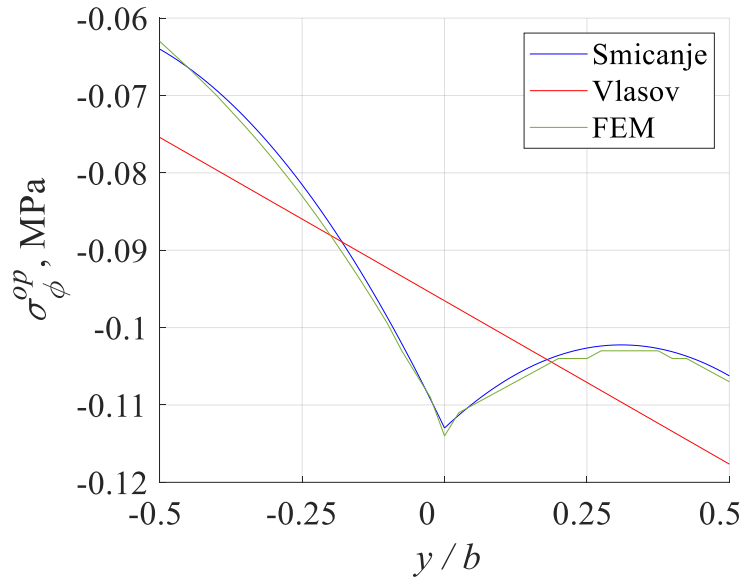


Slika 3.9. Deformirani i nedeformirani numerički model zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

Kao što je pokazano u tablici 3.12, u gornjem pojasu na polovici raspona zakrivljenog štapa je dominantno obodno naprezanje u rubnoj točki pojasa T_1 . Kod razmatranog problema se najveće obodno naprezanje također premješta s porastom odnosa R/h , ali sada iz točke T_1 u točku T_2 (spoj gornjeg pojasa i struka). Ovo premještanje maksimalnog obodnog naprezanja se pojavljuje kod velikih odnosa R/h , odnosno kod približno ravnih štapova. Kada se maksimalno obodno naprezanje na polovici raspona štapa javlja u točki T_1 , tada su vrlo male su razlike u procjenama obodnog naprezanja između predloženog postupka i Vlasovljevog postupka, kao što je pokazano u tablici 3.12. Tada su također male razlike u procjenama naprezanja između analitičkih postupaka i numeričkog modela. U tom je slučaju utjecaj smicanja na obodno naprezanje manje izražen. Kada se maksimalno obodno naprezanje na polovici raspona zakrivljenog štapa javlja u točki T_2 , što je slučaj kod štapova vrlo male zakrivljenosti i kod ravnih štapova, tada se utjecaj smicanja na obodno naprezanje mora uzeti u obzir. Sukladno navedenom te usporedbom rezultata prikazanih u tablicama 3.1 i 3.12, može se kazati da je utjecaj smicanja na maksimalno obodno naprezanje na polovici raspona zglobno oslonjenog štapa značajno manji od utjecaja smicanja na obodno naprezanje kod ukliještenog štapa. Zbog toga su u ovom radu, kod razmatranog problema, izostavljeni faktor η_{σ}^{FEM} i relativna pogreška ρ_{σ}^S .

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Kod razmatranog problema je na slici 3.10 prikazana raspodjela obodnih naprezanja u gornjem pojasu na polovici raspona vrlo kratkog štapa vrlo male zakrivljenosti ($L/h = 3$, $R/h = 30$). Iz slike je vidljivo da predloženi model jako dobro aproksimira numeričku raspodjelu naprezanja te da se utjecaj smicanja na obodno naprezanje ipak mora uzeti u obzir kod analize zglobno oslonjenog zakrivljenog štapa.



Slika 3.10. Raspodjela obodnog naprezanja σ_{ϕ}^{op} u gornjem pojasu zglobno oslonjenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z ($L/h = 3$, $R/h = 30$, $\tilde{x}/L = 0.5$).

U tablicama 3.13 i 3.14 su prikazani faktori utjecaja smicanja na progib, η_w^s i η_w^{FEM} , a u tablici 3.13 je dodatno prikazan faktor utjecaja smicanja ravnog štapa. U tablici 3.15 su prikazane relativne pogreške progiba w_p u postocima između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_w^s .

Tablica 3.13. Faktor η_w^s kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	η_w^s				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	2,4973	2,6020	2,7626	2,7954	2,8224
$L/h = 4$	1,6174	1,7245	1,9308	1,9811	2,0251
$L/h = 5$	1,2512	1,3277	1,5286	1,5929	1,6560
$L/h = 6$	1,1033	1,1473	1,3048	1,3741	1,4556
$L/h = 7$	1,0444	1,0677	1,1749	1,2390	1,3347
$L/h = 8$	1,0202	1,0324	1,1001	1,1524	1,2562

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.14. Faktor η_w^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	η_w^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	2,5857	2,6881	2,8443	2,8761
$L/h = 4$	1,6614	1,7670	1,9696	2,0188
$L/h = 5$	1,2732	1,3500	1,5504	1,6144
$L/h = 6$	1,1090	1,1545	1,3156	1,3862
$L/h = 7$	1,0360	1,0611	1,1752	1,2430
$L/h = 8$	0,9988	1,0129	1,0889	1,1474

Tablica 3.15. Relativna pogreška ρ_w^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	$\rho_w^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-3,4188	-3,2030	-2,8724	-2,8059
$L/h = 4$	-2,6484	-2,4052	-1,9699	-1,8674
$L/h = 5$	-1,7279	-1,6519	-1,4061	-1,3318
$L/h = 6$	-0,5140	-0,6236	-0,8209	-0,8729
$L/h = 7$	0,8108	0,6220	-0,0255	-0,3218
$L/h = 8$	2,1426	1,9252	1,0286	0,4358

Kod zglobno oslonjenog štapa je utjecaj smicanja na progib izraženiji od utjecaja smicanja na obodno naprezanje, kao što je pokazano u tablicama 3.12 i 3.13. Kod kratkih je štapova utjecaj smicanja na progib značajan te predloženi postupak odlično opisuje utjecaj smicanja, tablice 3.13 do 3.15. Kod duljih zglobno oslonjenih štapova su Vlasovljeve procjene progiba vrlo dobre, za razliku od Vlasovljevih procjena progiba kod uklještenog štapa (tablica 3.5).

U tablicama 3.16 i 3.17 su prikazani faktori utjecaja smicanja na kut uvijanja, η_α^S i η_α^{FEM} , pri čemu je faktor η_α^S kod ravnog štapa izostavljen u tablici 3.16, dok su u tablici 3.18 prikazane relativne pogreške kuta uvijanja α_p u postocima, ρ_α^S .

Tablica 3.16. Faktor η_α^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	η_α^S			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,0763	1,0964	1,1231	1,1280
$L/h = 4$	0,9487	0,9827	1,0280	1,0364
$L/h = 5$	0,8724	0,9248	0,9946	1,0076
$L/h = 6$	0,8002	0,8753	0,9754	0,9939
$L/h = 7$	0,7215	0,8235	0,9594	0,9846
$L/h = 8$	0,8014	0,8908	1,0132	1,0362

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.17. Faktor η_{α}^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

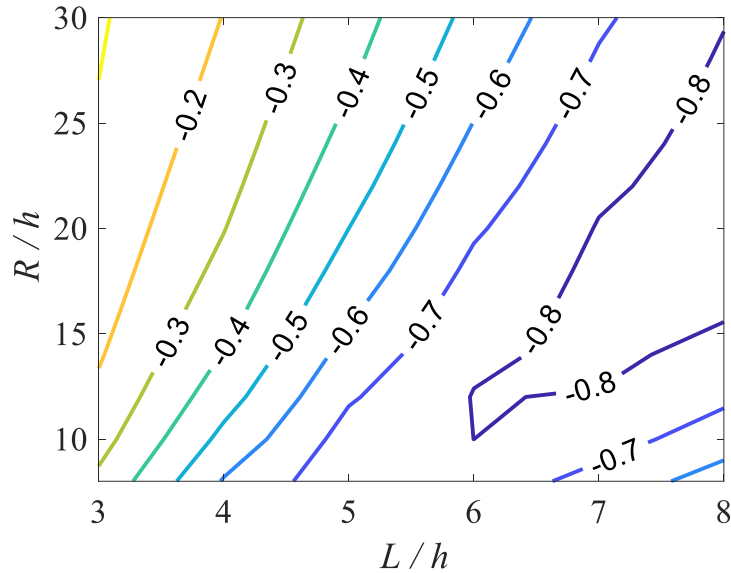
	η_{α}^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,1386	1,1394	1,1405	1,1407
$L/h = 4$	1,0717	1,0724	1,0733	1,0735
$L/h = 5$	1,0369	1,0375	1,0383	1,0385
$L/h = 6$	1,0145	1,0150	1,0157	1,0159
$L/h = 7$	0,9974	0,9979	0,9986	0,9988
$L/h = 8$	0,9828	0,9833	0,9840	0,9841

Tablica 3.18. Relativna pogreška ρ_{α}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	$\rho_{\alpha}^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-5,4716	-3,7739	-1,5256	-1,1134
$L/h = 4$	-11,4771	-8,3644	-4,2206	-3,4560
$L/h = 5$	-15,8646	-10,8627	-4,2088	-2,9754
$L/h = 6$	-21,1237	-13,7635	-3,9677	-2,1656
$L/h = 7$	-27,6619	-17,4767	-3,9255	-1,4217
$L/h = 8$	-18,4575	-9,4071	2,9675	5,2942

Kao što se može vidjeti u tablici 3.17, smicanje je preporučljivo uzeti u obzir kod vrlo kratkih štapova, a tada su procjene kuta uvijanja kod predloženog postupka općenito bolje od Vlasovljevih procjena što je vidljivo iz usporedbe rezultata prikazanih u tablicama 3.16 do 3.18. Utjecaj smicanja na kut uvijanja je zanemariv kod duljih štapova ($L/h \geq 5$), tablica 3.17, a tada su Vlasovljeve procjene kuta uvijanja bolje od tih istih procjena predloženog postupka (pogotovo kod manjih odnosa R/h) i što ukazuje na potrebu daljnjih poboljšanja u predloženom modelu. S druge strane, a prema tablici 3.18, za štapove male zakrivljenosti ($R/h \geq 20$) su relativne pogreške ρ_{α}^S manje od pet posto za sve analizirane duljine.

Prema izrazu (2.25) i slici 3.11, gdje je pokazan odnos $(ba_p^{FEM}/2)/w_p^{FEM}$ na polovici raspona numeričkog modela štapa, kod kratkih štapova je progib dominantni uzrok pomaka točaka T_1, T_3, T_5 i T_7 u smjeru osi z . U tom slučaju su procjene pomaka proizvoljne točke S u smjeru osi z kod predloženog postupka značajno bolje od procjena Vlasovljevog modela. Utjecaj kuta uvijanja na pomake u smjeru osi z raste s porastom odnosa L/h . Za duge štapove su male razlike između predloženog postupka i Vlasovljevog modela, pri čemu predloženi postupak ima malo bolje procjene pomake u smjeru osi z . Utjecaj kuta uvijanja na pomake točaka T_1, T_3, T_5 i T_7 u smjeru osi z je također značajan kod dugih štapova malog polumjera zakrivljenosti, ali tada su bolje Vlasovljeve procjene numeričkog modela.



Slika 3.11. Odnos $(ba_p^{FEM}/2)/w_p^{FEM}$ kod zglobno oslonjenog I profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_z .

U tablicama 3.19 i 3.20 su prikazani faktori zakrivljenosti η_σ^{RS} i η_w^{RS} , a u tablici 3.19 je dodatno označena točka s maksimalnom vrijednošću obodnog naprezanja u gornjem pojasu.

Tablica 3.19. Faktor η_σ^{RS} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	η_σ^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,9609	1,7620	1,3758	1,0009*	1
$L/h = 4$	2,6318	2,2887	1,6320	1,4194	
$L/h = 5$	3,6132	3,0582	2,0154	1,6816	
$L/h = 6$	4,8348	4,0004	2,4689	1,9853	
$L/h = 7$	6,3292	5,1340	2,9999	2,3372	
$L/h = 8$	8,1342	6,4774	3,6128	2,7402	

Napomena: * označava faktor η_σ^{RS} u točki T_2 , a u suprotnom se faktor η_σ^{RS} odnosi na točku T_1

Tablica 3.20. Faktor η_w^{RS} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s q_z .

	η_w^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,0770	1,0488	1,0120	1,0054	1
$L/h = 4$	1,3261	1,2049	1,0500	1,0221	
$L/h = 5$	1,9734	1,6051	1,1457	1,0643	
$L/h = 6$	3,3428	2,4368	1,3398	1,1495	
$L/h = 7$	5,8977	3,9541	1,6843	1,2999	
$L/h = 8$	10,2914	6,4938	2,2417	1,5420	

Faktor η_{σ}^{RS} (u točki T_1) i faktor η_w^{RS} se povećavaju s porastom odnosa L/h , a s porastom odnosa R/h se ovi faktori smanjuju i teže u jedinicu. Utjecaj zakrivljenosti je sada posebno značajan kod većih odnosa L/h i manjih odnosa R/h , a što je vjerojatni uzrok odstupanja relativnih pogreški kuta uvijanja prikazanih u tablici 3.18. Za razliku od ukliještenih štapova, tablice 3.10 i 3.11, kod zglobno oslonjenih štapova je utjecaj zakrivljenosti značajan skoro kod svih odnosa L/h , kao što se može vidjeti u tablicama 3.19 i 3.20.

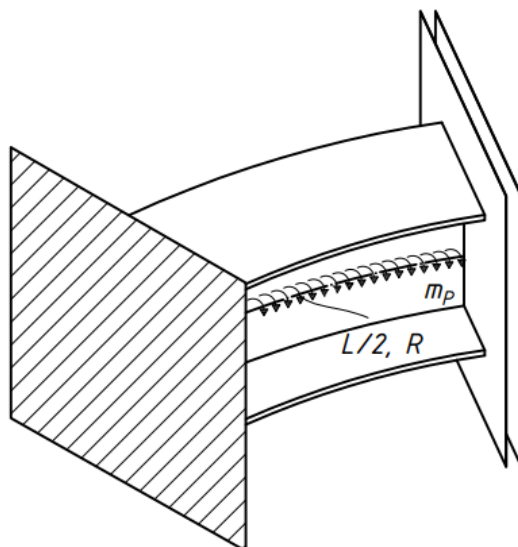
Usporedbom rezultata koji su prikazani u tablicama 3.1 do 3.20, vidljivo je da je utjecaj smicanja kod zglobno oslonjenih štapova manje izražen od utjecaja smicanja kod ukliještenih štapova. Predloženi postupak odlično predviđa progib i obodno naprezanje za razmatrani slučaj opterećenja bez obzira na oslonce. Kako su za razmatrani slučaj opterećenja i bez obzira na oslonce procjene kuta uvijanja kod predloženog postupka u određenim kombinacijama lošije od Vlasovljevihih procjena, potrebna su daljnja poboljšanja predloženog modela. Usporedbom prikazanih rezultata slijedi da je utjecaj smicanja kod kratkih zakrivljenih štapova više izražen od utjecaja zakrivljenosti.

3.1.2. Utjecaj raspodijeljenog opterećenja m_p na I profil

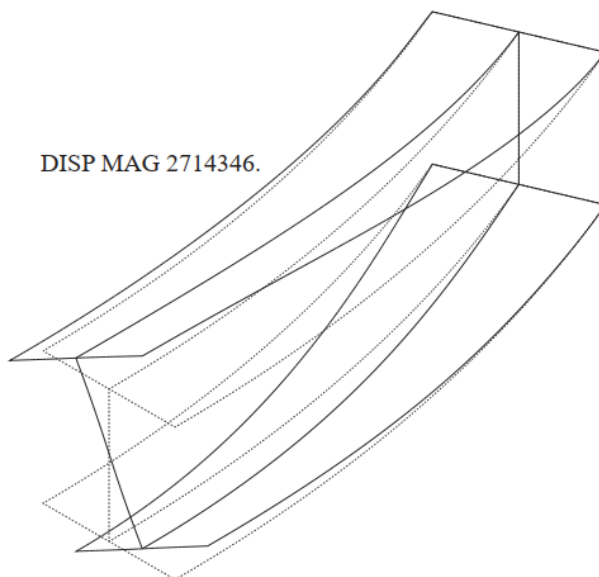
Na slici 3.12 je shematski prikazana polovica I profila ukliještenog na oba kraja i opterećenog momentom uvijanja na jedinicu duljine m_p . Na slici 3.13 su prikazani deformirani i nedeformirani numerički model razmatranog I profila, gdje je $L/h = 8$ i $R/h = 10$.

U tablicama 3.21 i 3.22 su prikazani faktori utjecaja smicanja na obodno naprezanje, η_{σ}^S i η_{σ}^{FEM} , za razmatrani problem. U tablici 3.21 su također prikazani faktori utjecaja smicanja na normalno naprezanje kod ravnog štapa te je označena točka srednje linije gornjeg pojasa s maksimalnom vrijednošću obodnog naprezanja. Rezultati prikazani u tablicama 3.22 i 3.23 se također odnose na tu točku, pri čemu je u tablici 3.23 prikazana relativna pogreška obodnog naprezanja u postocima između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_{σ}^S .

Usporedbom tablica 3.1 i 3.21, utjecaj smicanja na maksimalno naprezanje u gornjem pojasu na polovici raspona zakrivljenog štapa je manje izražen kod ovog opterećenja, a faktor η_{σ}^S je približno jednak faktoru utjecaja smicanja ravnog štapa, bez obzira na odnos R/h .

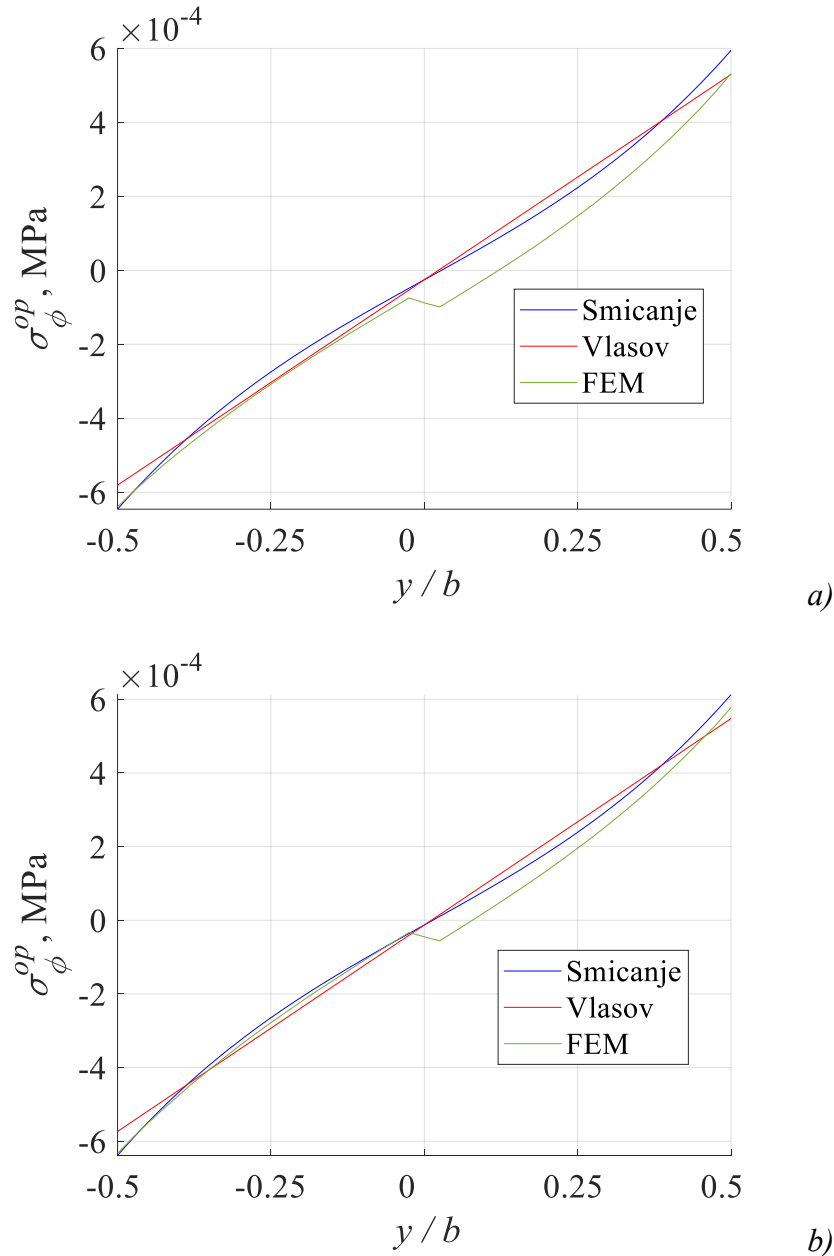


Slika 3.12. Uklješteni I profil opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .



Slika 3.13. Deformirani i nedeformirani numerički model uklještenog I profila opterećenog s m_p .

Kod razmatranog problema se maksimalno naprezanje u gornjem pojasu na polovici raspona vrlo kratkog štapa javlja u točki T_1 (rub gornjeg pojasa), kao što je prikazano na slici 3.14 (ali i u tablicama 3.21 do 3.23). Na slici 3.14 je također vidljiva nagla promjena naprezanja oko točke T_2 u prikazu raspodjele obodnog naprezanja numeričkog modela, a koja je uzrokovana djelovanjem zadanog opterećenja na spoju struka i pojasa (slika 3.2).



Slika 3.14. Raspodjela obodnog naprezanja σ_ϕ^{op} u gornjem pojasu ukliještenog I profila koji je opterećen s m_p ($L/h = 3$, $\tilde{x}/L = 0.5$): a) $R/h = 10$; b) $R/h = 20$.

U predloženom modelu je raspodjela obodnog naprezanja u gornjem pojasu blago nelinearna, za razliku od Vlasovljevog modela gdje je ta raspodjela linearna, slika 3.14. Kod razmatranog problema i štapova manjeg odnosa R/h vrijedi $\sigma_\phi^{T_2} \neq 0$ i $|\sigma_\phi^{T_1}| \neq |\sigma_\phi^{T_3}|$, slika 3.14.a. Kod štapa većeg odnosa R/h vrijedi $\sigma_\phi^{T_2} \approx 0$ i $|\sigma_\phi^{T_1}| \approx |\sigma_\phi^{T_3}|$, slika 3.14.b. S daljnjim porastom polumjera zakrivljenosti zakrivljeni štap prelazi u ravni štap, a kod kojega vrijedi $\sigma_x^{T_2} = 0$ i $\sigma_x^{T_1} = -\sigma_x^{T_3}$.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.21. Faktor η_{σ}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	η_{σ}^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,1115	1,1119	1,1133	1,1139	1,1155
$L/h = 4$	1,0623	1,0621	1,0628	1,0633	1,065
$L/h = 5$	1,0411	1,0402	1,0397	1,0400	1,0416
$L/h = 6$	1,0310	1,0292	1,0275	1,0275	1,0288
$L/h = 7$	1	1,0235	1,0204	1,0201	1,0212
$L/h = 8$	1	1	1,0160	1,0155	1,0162

Napomena: faktor η_{σ}^S se odnosi na točku T_1 .

Tablica 3.22. Faktor η_{σ}^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	η_{σ}^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,0913	1,0997	1,1041	1,1014
$L/h = 4$	1,0217	1,0388	1,0572	1,0574
$L/h = 5$	0,9729	0,9969	1,0303	1,0343
$L/h = 6$	0,9388	0,9653	1,0108	1,0187
$L/h = 7$	1,2092	0,9430	0,9947	1,0065
$L/h = 8$	1,1314	1,1542	0,9813	0,9961

Napomena: faktor η_{σ}^S se odnosi na točku T_1 .

Tablica 3.23. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	$\rho_{\sigma}^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,8510	1,1094	0,8333	1,1349
$L/h = 4$	3,9738	2,2430	0,5297	0,5580
$L/h = 5$	7,0100	4,3435	0,9124	0,5511
$L/h = 6$	9,8210	6,6197	1,6522	0,8638
$L/h = 7$	-17,3007	8,5366	2,5837	1,3512
$L/h = 8$	-11,6139	-13,3599	3,5361	1,9476

Napomena: faktor ρ_{σ}^S se odnosi na točku T_1 .

Usporedbom tablica 3.21 do 3.23, kod vrlo kratkih štapova je uočljiv mali utjecaj smicanja na obodno naprezanje, a procjene obodnog naprezanja kod predloženog postupka su bolje od procjena Vlasovljevog postupka. Kod duljih štapova manjeg odnosa R/h su rješenja predloženog postupka jednaka Vlasovljevim rješenjima ($\eta_{\sigma}^S = 1$), ali tada su odstupanja između analitičkih postupaka i numeričkog modela značajna. Upravo zbog navedenih odstupanja predloženog postupka u procjeni obodnog naprezanja su potrebna daljnja

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

istraživanja i poboljšanja predloženog modela. Vjerojatni uzrok ovih odstupanja je pojednostavljenje utjecaja zakrivljenosti. Kod ostalih štapova su male razlike u rezultatima između Vlasovljevog modela i predloženog postupka, pri čemu su Vlasovljeve procjene bolje kod štapova manjih polumjera.

U tablicama 3.24 i 3.25 su prikazani faktori utjecaja smicanja na kut uvijanja poprečnog presjeka α_p , η_α^S i η_α^{FEM} . U tablici 3.24 je također prikazan faktor utjecaja smicanja ravnog štapa, dok su u tablici 3.26 prikazane relativne pogreške kuta uvijanja u postotcima između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_α^S .

Tablica 3.24. Faktor η_α^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	η_α^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	2,3626	2,3712	2,3828	2,3849	2,3866
$L/h = 4$	1,7466	1,7586	1,7746	1,7776	1.78
$L/h = 5$	1,4533	1,4698	1,4918	1,4959	1,4992
$L/h = 6$	1,2854	1,3074	1,3368	1,3423	1,3466
$L/h = 7$	1,1750	1,2037	1,2419	1,2490	1,2546
$L/h = 8$	1,0941	1,1304	1,1788	1,1878	1.195

Tablica 3.25. Faktor η_α^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	η_α^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	2,1615	2,1941	2,2402	2,2491
$L/h = 4$	1,5938	1,6307	1,6865	1,6978
$L/h = 5$	1,3205	1,3590	1,4237	1,4378
$L/h = 6$	1,1712	1,2070	1,2765	1,2935
$L/h = 7$	1,0868	1,1161	1,1847	1,2042
$L/h = 8$	1,0399	1,0613	1,1232	1,1442

Usporedbom rezultata koji su prikazani u tablicama 3.24 do 3.26, utjecaj smicanja na kut uvijanja je posebno izražen kod kraćih štapova, a procjene kuta uvijanja kod predloženog postupka su u općem slučaju značajno bolje od Vlasovljevih procjena. Naime, kod duljih štapova malog polumjera je utjecaj zakrivljenosti posebno izražen, a tada su Vlasovljeve procjene kuta uvijanja neznatno bolje od istih procjena predloženog postupka.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.26. Relativna pogreška ρ_α^S kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	$\rho_\alpha^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	9,3037	8,0716	6,3655	6,0380
$L/h = 4$	9,5872	7,8433	5,2238	4,7002
$L/h = 5$	10,0568	8,1531	4,7833	4,0409
$L/h = 6$	9,7507	8,3181	4,7239	3,7727
$L/h = 7$	8,1156	7,8488	4,8282	3,7203
$L/h = 8$	5,2120	6,5109	4,9501	3,8105

Kao što se može vidjeti u tablici 3.24, faktor η_α^S blago raste s porastom odnosa R/h i male su razlike između faktora η_α^S kod zakrivljenog štapa i ravnog štapa. Kao kod zakrivljenog štapa opterećenog silom na jedinicu duljine q_z , i kod ovog opterećenja se utjecaj smicanja raspodjeljuje na pomake α_p i w_p . Kod ravnog štapa koji je opterećen s m_p , smicanje utječe samo na kut uvijanja α_p . Zbog toga su kod razmatranog slučaja opterećenja, i bez obzira na oslonce, faktori utjecaja smicanja na kut uvijanja kod zakrivljenog štapa manji od faktora utjecaja smicanja na kut uvijanja kod ravnog štapa.

Za razmatrani problem je faktor η_w^{FEM} za numerički model prikazan u tablici 3.27.

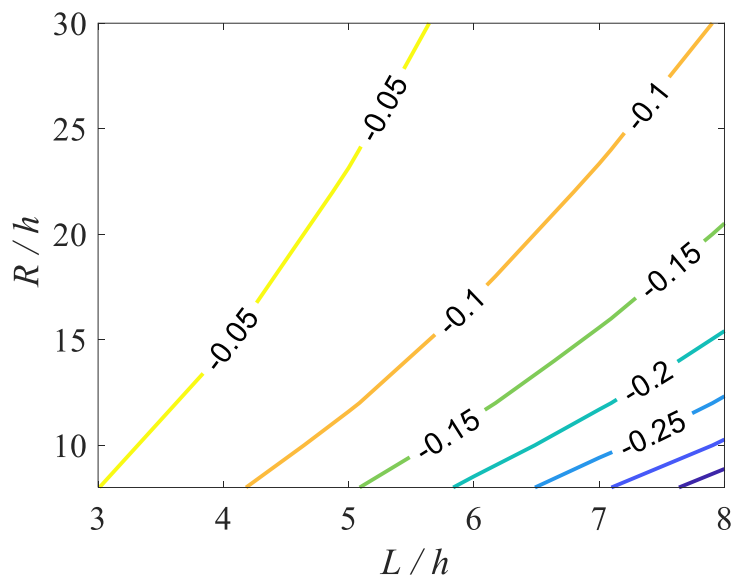
Tablica 3.27. Faktor η_w^{FEM} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_p .

	η_w^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,4476	1,4693	1,5003	1,5064
$L/h = 4$	1,2215	1,2503	1,2940	1,3029
$L/h = 5$	1,0939	1,1263	1,1808	1,1927
$L/h = 6$	1,0187	1,0501	1,1113	1,1262
$L/h = 7$	0,9763	1,0028	1,0648	1,0825
$L/h = 8$	0,9554	0,9750	1,0322	1,0516

U rezultatima prikazanim u tablici 3.27 vidljiv je značajan utjecaj smicanja koje se mora uzeti u obzir prilikom određivanja progiba w_p za razmatrani slučaj opterećenja. Faktor η_w^S je kod predloženog postupka za razmatrani slučaj opterećenja jednak jedinici za sve kombinacije L/h i R/h , a što znači da su rješenja predloženog modela jednaka Vlasovljevim rješenjima. Slijedom navedenog, kod razmatranog problema za relativne pogreške definirane izrazima (3.7) vrijedi $\rho_w^S = \rho_{w,VL}^S$ i zbog toga su ove relativne pogreške izostavljene u ovom radu. Ovaj

nedostatak predloženog modela je vjerojatno posljedica pojednostavljenja temeljnih jednadžbi zbog smicanja, te su i zbog ovoga potrebna daljnja istraživanja i poboljšanja predloženog modela. Kako su procjene kuta uvijanja kod predloženog postupka u općem slučaju bolje od Vlasovljevih procjena kuta uvijanja, te uzevši u obzir izraz (2.25), procjene pomaka proizvoljne točke S u smjeru osi z kod predloženog postupka su također bolje od Vlasovljevih procjena.

Na slici 3.15 je prikazan odnos pomaka $w_p^{FEM}/(b\alpha_p^{FEM}/2)$ kod numeričkih modela na polovici raspona štapa kod razmatranog problema. Sukladno izrazu (2.25) i rezultatima koji su prikazani na slici 3.15, kut uvijanja α_p je dominantna veličina kod pomaka točaka T_1 , T_3 , T_4 i T_6 u smjeru osi z na polovici raspona štapa.



Slika 3.15. Odnos $w_p^{FEM}/(b\alpha_p^{FEM}/2)$ kod ukliještenog I profila koji je opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .

Sukladno rezultatima koji su prikazani u tablicama 3.21 do 3.26, predloženi postupak dobro predviđa razmatrani kut uvijanja, pri čemu je utjecaj smicanja izraženiji kod kuta uvijanja nego kod obodnog naprežanja. U ovom slučaju faktori η_σ^S , η_σ^{FEM} , η_α^S i η_α^{FEM} također prelaze u faktore utjecaja smicanja kod ravnog štapa s porastom odnosa R/h . Faktori η_σ^S i η_α^S se smanjuju s porastom odnosa L/h , kao kod ravnih štapova.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablicama 3.28 i 3.29 su prikazani faktori utjecaja zakrivljenosti na obodno naprezanje i na kut uvijanja, redom η_{σ}^{RS} i η_{α}^{RS} , a gdje se faktor η_{σ}^{RS} u tablici 3.28 također odnosi na točke navedene u tablici 3.21. Kod ravnog štapa koji je opterećen s m_P je progib w_P na polovici raspona štapa jednak nuli, a tada je faktor η_w^{RS} beskonačan.

Tablica 3.28. Faktor η_{σ}^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_P .

	η_{σ}^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,0324	1,0290	1,0175	1,0124	1
$L/h = 4$	1,0397	1,0426	1,0324	1,0240	
$L/h = 5$	1,0098	1,0330	1,0445	1,0361	
$L/h = 6$	0,9323	0,9877	1,0482	1,0459	
$L/h = 7$	0,2261	0,9048	1,0379	1,0502	
$L/h = 8$	0,2311	0,2299	1,0097	1,0463	

Napomena: faktor η_{σ}^{RS} se odnosi na točku T₁.

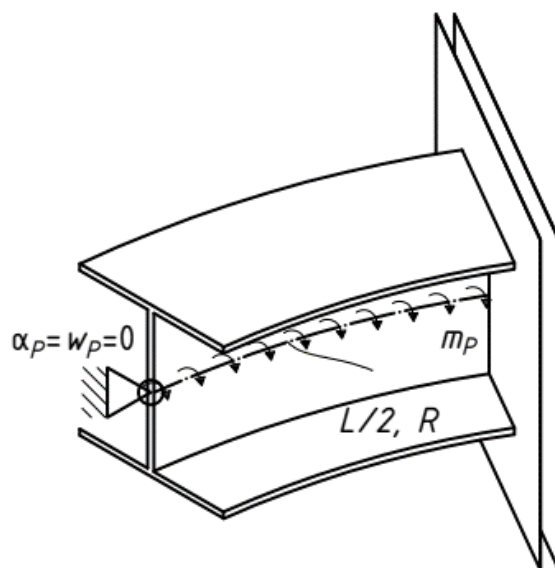
Tablica 3.29. Faktor η_{α}^{RS} kod ukliještenog I profila opterećenog s m_P .

	η_{α}^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0,9739	0,9832	0,9958	0,9981	1
$L/h = 4$	0,9221	0,9490	0,9869	0,9941	
$L/h = 5$	0,8291	0,8846	0,9689	0,9859	
$L/h = 6$	0,6997	0,7873	0,9380	0,9716	
$L/h = 7$	0,5544	0,6656	0,8914	0,9490	
$L/h = 8$	0,4178	0,5366	0,8284	0,9162	

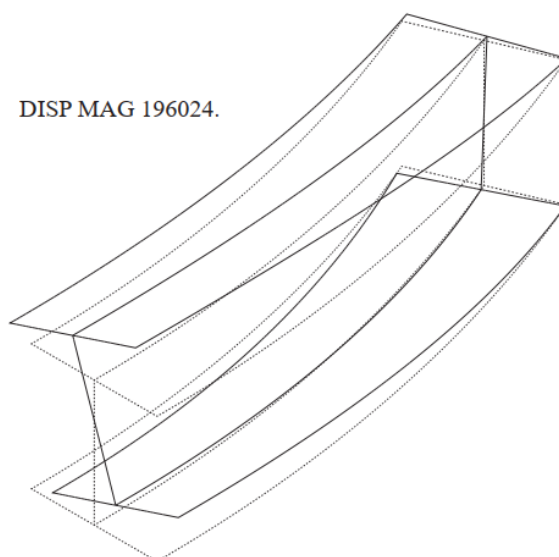
Kao što je pokazano u tablicama 3.28 i 3.29, kod kraćih štapova je zanemariv utjecaj zakrivljenosti. Faktor η_{α}^{RS} raste s porastom odnosa R/h (smanjuje se utjecaj zakrivljenosti), a smanjuje s porastom odnosa L/h (povećava se utjecaj zakrivljenosti). Kod kratkih se štapova faktor η_{σ}^{RS} smanjuje s porastom odnosa R/h , a kod duljih štapova se povećava iznad jedinice za velike odnose R/h . Faktor η_{σ}^{RS} se u općem slučaju smanjuje s porastom odnosa L/h , čime se povećava utjecaj zakrivljenosti.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Na slici 3.16 je prikazana polovica I profila zglobno oslonjenog na oba kraja i opterećenog momentom uvijanja na jedinicu duljine m_p . Na slici 3.17 su prikazani deformirani i nedeformirani numerički model razmatranog I profila, gdje je $L/h = 8$ i $R/h = 10$.



Slika 3.16. Zglobno oslonjeni I profil opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .



Slika 3.17. Deformirani i nedeformirani numerički model zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablici 3.30 je prikazan faktor η_{σ}^S uz faktor utjecaja smicanja ravnog štapa, a također je označena i točka razmatranog profila kod koje se javlja maksimalna vrijednost obodnog naprezanja u gornjem pojasu na polovici raspona štapa. U tablici 3.31 je pokazana relativna pogreška obodnog naprezanja u postotcima za predloženi postupak, ρ_{σ}^S , koja je za sve odnose L/h i R/h manja od pet posto. U ovom je slučaju obodno naprezanje u rubnoj točki T_3 dominantno. Kao što se može vidjeti iz tablica 3.30 i 3.31, vrlo male su razlike u procjenama naprezanja između predloženog postupka, Vlasovljevog postupka i numeričkog modela. Zbog toga su u ovom radu, kod razmatranog problema, izostavljeni faktor utjecaja smicanja η_{σ}^{FEM} , faktor utjecaja zakrivljenosti η_{σ}^{RS} te raspodjela obodnog naprezanja u srednjoj liniji.

Tablica 3.30. Faktor η_{σ}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	η_{σ}^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,0373	1,0376	1,0382	1,0383	1,0385
$L/h = 4$	1,0207	1,0210	1,0214	1,0215	1,0217
$L/h = 5$	1,0131	1,0133	1,0137	1,0138	1,0139
$L/h = 6$	1,0089	1,0091	1,0095	1,0095	1,0096
$L/h = 7$	1,0064	1,0066	1,0069	1,0070	1,0071
$L/h = 8$	1,0048	1,0050	1,0053	1,0054	1,0054

Napomena: faktor η_{σ}^S se odnosi na točku T_3 .

Tablica 3.31. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	$\rho_{\sigma}^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-4,7535	-3,7820	-1,8151	-1,1508
$L/h = 4$	-4,1786	-3,2204	-1,2806	-0,6250
$L/h = 5$	-3,5880	-2,6347	-0,6988	-0,0445
$L/h = 6$	-2,9262	-1,9695	-0,0272	0,6280
$L/h = 7$	-2,1745	-1,2120	0,7449	1,4051
$L/h = 8$	-1,3204	-0,3482	1,6259	2,2926

Napomena: faktor ρ_{σ}^S se odnosi na točku T_3 .

U tablicama 3.32 i 3.33 su prikazani faktori utjecaja smicanja na kut uvijanja α_p , η_{α}^S i η_{α}^{FEM} , pri čemu je faktor utjecaja smicanja na kut uvijanja ravnog štapa također prikazan u tablici 3.32. U tablici 3.34 su prikazane relativne pogreške u postotcima kuta uvijanja α_p između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_{α}^S .

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.32. Faktor η_{α}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	η_{α}^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,2171	1,2387	1,2676	1,2730	1,2773
$L/h = 4$	1,0555	1,0916	1,1399	1,1488	1,156
$L/h = 5$	0,9474	1,0022	1,0754	1,0889	1,0998
$L/h = 6$	0,8534	0,9311	1,0347	1,0539	1,0693
$L/h = 7$	0,7600	0,8646	1,0043	1,0302	1,0509
$L/h = 8$	0,6615	0,7973	0,9785	1,0121	1,039

Tablica 3.33. Faktor η_{α}^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	η_{α}^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,2384	1,2395	1,2411	1,2414
$L/h = 4$	1,1265	1,1275	1,1289	1,1292
$L/h = 5$	1,0710	1,0720	1,0733	1,0736
$L/h = 6$	1,0374	1,0383	1,0396	1,0398
$L/h = 7$	1,0136	1,0145	1,0158	1,0160
$L/h = 8$	0,9946	0,9956	0,9968	0,9970

Tablica 3.34. Relativna pogreška ρ_{α}^S kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	$\rho_{\alpha}^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-1,7200	-0,0645	2,1352	2,5455
$L/h = 4$	-6,3027	-3,1840	0,9744	1,7357
$L/h = 5$	-11,5406	-6,5112	0,1957	1,4251
$L/h = 6$	-17,7366	-10,3246	-0,4713	1,3560
$L/h = 7$	-25,0197	-14,7758	-1,1321	1,3976
$L/h = 8$	-33,4909	-19,9176	-1,8359	1,5145

Iz rezultata prikazanih u tablicama 3.32 do 3.34 je vidljivo da predloženi postupak dobro procjenjuje kut uvijanja kod vrlo kratkih štapova, te da se kod njih utjecaj smicanja mora uzeti u obzir. Kod duljih štapova manjeg polumjera je faktor η_{α}^S manji od jedinice, tablica 3.32. Tada su bolja predviđanja kuta uvijanja kod Vlasovljevog modela, a što je posljedica dodatnog pojednostavljenja utjecaja zakrivljenosti u temeljnim jednadžbama zbog smicanja. Kod duljih štapova većeg polumjera je faktor η_{α}^S približno jednak faktoru utjecaja smicanja ravnog štapa. Tada su bolja predviđanja kuta uvijanja kod predloženog postupka, te se ona vrlo malo razlikuju od procjene kuta uvijanja Vlasovljevog modela.

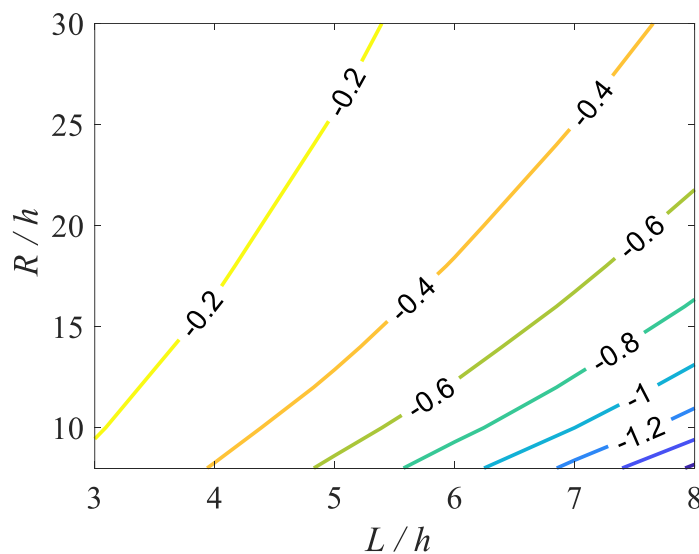
3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablici 3.35 je prikazan faktor η_w^{FEM} za numerički model, pri čemu je faktor η_w^{FEM} manji od faktora za slučaj ukliještenog profila prikazanog u tablici 3.27. Faktor η_w^S je kod razmatranog problema također jednak jedinici (predloženi model daje rješenja jednaka Vlasovljevom modelu). Zbog toga su relativne pogreške progiba Vlasovljevog modela jednake relativnim pogreškama predloženog postupka, a njihov tablični zapis je izostavljen u ovom radu jer su relativne pogreške manje od deset posto za štapove kod kojih vrijedi $L/h \geq 4$.

Tablica 3.35. Faktor η_w^{FEM} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	η_w^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,1752	1,1763	1,1779	1,1782
$L/h = 4$	1,0926	1,0935	1,0948	1,095
$L/h = 5$	1,0502	1,0511	1,0522	1,0524
$L/h = 6$	1,0236	1,0244	1,0254	1,0256
$L/h = 7$	1,0039	1,0047	1,0057	1,0059
$L/h = 8$	0,9877	0,9884	0,9894	0,9895

Na slici 3.18 je prikazan odnos $w_p^{FEM}/(b\alpha_p^{FEM}/2)$ kod razmatranog problema na polovici raspona štapa, a iz koje slijedi da su i progib i kut uvijanja utjecajne veličine na pomake točaka T_1 , T_3 , T_4 i T_6 u smjeru osi z na polovici raspona duljih štapova manjeg polumjera. Upravo kod ovih su štapova bolje Vlasovljeve procjene pomake proizvoljne točaka S u smjeru osi z , dok su kod ostalih štapova bolje procjene predloženog postupka.



Slika 3.18. Odnos $w_p^{FEM}/(b\alpha_p^{FEM}/2)$ kod zglobno oslonjenog I profila koji je opterećen momentom na jedinicu duljine m_p .

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablici 3.36 je prikazan faktor utjecaja zakrivljenosti na kut uvijanja, η_{α}^{RS} .

Tablica 3.36. Faktor η_{α}^{RS} kod zglobno oslonjenog I profila opterećenog s m_p .

	η_{α}^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0,9818	0,9885	0,9972	0,9987	1
$L/h = 4$	0,9624	0,9765	0,9943	0,9975	
$L/h = 5$	0,9352	0,9601	0,9905	0,9958	
$L/h = 6$	0,8988	0,9388	0,9858	0,9937	
$L/h = 7$	0,8514	0,9119	0,9801	0,9913	
$L/h = 8$	0,7898	0,8784	0,9733	0,9884	

Kao što se može vidjeti u tablici 3.36, faktor η_{α}^{RS} se smanjuje s porastom odnosa L/h , a raste s porastom odnosa R/h . Za razliku od ukliještenih štapova, tablica 3.29, kod zglobno oslonjenih štapova utjecaj zakrivljenosti na kut uvijanja α_p je manje izražen.

Iako su Vlasovljevi model zakrivljenog štapa i predloženi postupak ograničeni na štapove male zakrivljenosti, prvi stupac u prethodno danim tablicama se odnosi na štapove srednje zakrivljenosti ($R/h = 8$). Iz prikazanih rezultata slijedi da se smicanje mora uzeti u obzir i kod štapova srednje zakrivljenosti, pri čemu se točnost predloženog modela smanjuje kod duljih štapova srednje zakrivljenosti (pogotovo kod štapova koji su opterećeni s momentom na jedinicu duljine m_p). Ovo je posljedica pojednostavljenja utjecaja zakrivljenosti u temeljnim jednadžbama smicanja.

Sukladno navedenom, može se kazati da je utjecaj smicanja značajan kada je I profil opterećen silom na jedinicu duljine q_z , bez obzira na rubne uvjete, a manje je značajan kod I profila koji je opterećen momentom na jedinicu duljine m_p . Također se može kazati da je utjecaj smicanja izraženiji kod ukliještenog I profila, u odnosu na zglobno oslonjeni I profil. Kada je ukliješteni I profil opterećen momentom na jedinicu duljine m_p , tada je utjecaj smicanja značajan kod kuta uvijanja, a manje je značajan kod obodnog naprezanja. S druge strane, utjecaj smicanja kod zglobno oslonjenog I profila za taj slučaj opterećenja je značajan samo kod kuta uvijanja. Bitno je naglasiti da, iako su pomaci α_p i w_p spregnuti, poprečni pomaci proizvoljne točke srednje linije poprečnog presjeka najčešće ovise ili o kutu uvijanja α_p , kada je štap opterećen s m_p , ili o progibu w_p , kada je štap opterećen s q_z .

3.2. H profil s dvije osi simetrije uslijed djelovanja opterećenja u ravnini zakrivljenosti

U ovom potpoglavlju je ispitan utjecaj radijalnog opterećenja q_y na H profil s dvije osi simetrije, slika 3.1.b, a koji je vezan za podlogu ili uklještenjem ili nepomičnim zglobnim osloncem na oba kraja. Utjecaj obodne sile na jedinicu duljine q_x , kao još jedne komponente opterećenja u ravnini zakrivljenosti, nije ispitan u ovom radu.

Faktori utjecaja smicanja na progib v_P , obodni pomak u_M i obodno naprezanje σ_ϕ^{ip} za pristup predstavljen u ovom radu (η_v^s , η_u^s i η_σ^s) te za numerički model (η_v^{FEM} , η_u^{FEM} i η_σ^{FEM}) glase

$$\begin{aligned}\eta_v^s &= \frac{v_P}{v_{P,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) = \frac{v_{P,VL} + v_{P,S}}{v_{P,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) = 1 + \frac{v_{P,S}}{v_{P,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \\ \eta_u^s &= \frac{u_M}{u_{M,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{4} \right) = \frac{u_{M,VL} + u_{M,S}}{u_{M,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{4} \right) = 1 + \frac{u_{M,S}}{u_{M,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{4} \right) \\ \eta_\sigma^s &= \frac{\sigma_\phi^{ip}}{\sigma_{\phi,VL}^{ip}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \\ \eta_v^{FEM} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) &= \frac{v_P^{FEM}}{v_{P,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) \\ \eta_u^{FEM} \left(\tilde{x} = \frac{L}{4} \right) &= \frac{u_M^{FEM}}{u_{M,VL}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{4} \right) \\ \eta_\sigma^{FEM} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right) &= \frac{\sigma_\phi^{FEM}}{\sigma_{\phi,VL}^{ip}} \left(\tilde{x} = \frac{L}{2} \right)\end{aligned}\tag{3.9}$$

gdje se faktori η_u^s i η_u^{FEM} odnose na presjek $\tilde{x} = L/4$. Naime, u ovom radu je analiziran štap istovjetnih rubnih uvjeta na svojim krajevima i za koji vrijedi $u_M|_{\tilde{x}=0} = u_M|_{\tilde{x}=L/2} = 0$.

Vlasovljevi izrazi za obodno naprezanje kod opterećenja u ravnini zakrivljenosti slijedi iz izraza (2.47) te glasi

$$\sigma_{\phi,VL}^{in} = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y.\tag{3.10}$$

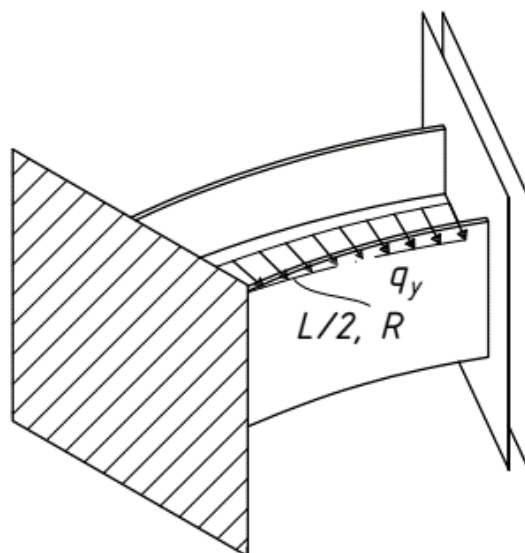
Faktori η_σ^s i η_σ^{FEM} su računati za točku s maksimalnom vrijednošću obodnog naprezanja u srednjoj liniji u presjeku $\tilde{x} = L/2$ (točke T₁, T₂, T₄ ili T₅ sa slike 3.1.b). Položaj ekstremne

vrijednosti obodnog naprezanja na polovici raspona H profila, kod razmatranog problema, također ovisi o odnosima L/h i R/h te vrijedi: $\sigma_{\phi}^{T_1} = \sigma_{\phi}^{T_3}$, $\sigma_{\phi}^{T_2} \neq \sigma_{\phi}^{T_5}$, $\sigma_{\phi}^{T_4} = \sigma_{\phi}^{T_6}$. Zato je kod svakog numeričkog modela određena točka s ekstremnom vrijednošću obodnog naprezanja na polovici raspona štapa, a zatim su određeni faktori utjecaja smicanja na naprezanje u toj točki. Relativne pogreške te faktori utjecaja zakrivljenosti, kod predloženog postupka i Vlasovljevog modela, su definirani kao u izrazima (3.7) i (3.8).

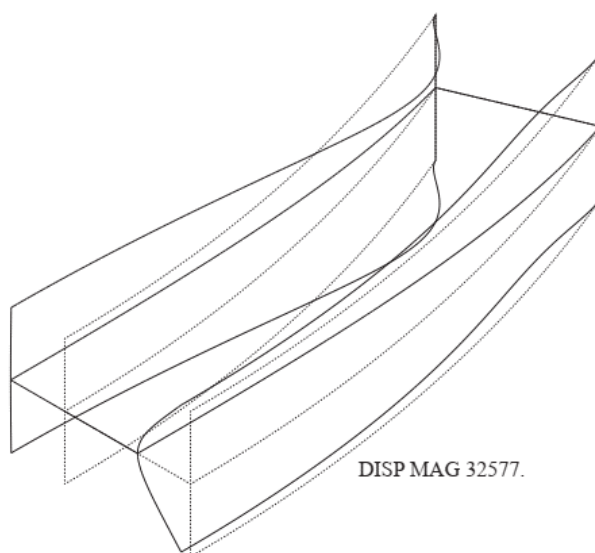
Kao što je spomenuto, predloženi postupak je temeljen na Vlasovljevom modelu štapa male zakrivljenosti, pri čemu je utjecaj zakrivljenosti pojednostavljen. Kod I profila je struk zakrivljen i tada je utjecaj Vlasovljevog pojednostavljenja zakrivljenosti manje značajan. S druge strane, kod H profila su oba pojasa zakrivljena i tada je utjecaj Vlasovljevog pojednostavljenja zakrivljenosti značajan (pogotovo kod izračuna obodnog naprezanja te kod štapova manjih odnosa R/h). Zato se odstupanja predloženog postupka, u odnosu na numeričke modele i bez obzira na razmatranu fizikalnu veličinu, smanjuju s porastom odnosa R/h . Kod H profila su odstupanja između predloženog postupka i numeričkog modela, zbog prethodno navedenog razloga, veća nego ta ista odstupanja kod I profila.

Kod kratkih i relativno kratkih I profila s dvije osi simetrije, koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti, nema distorzije poprečnog presjeka. S druge strane, kod kratkih i relativno kratkih H profila s dvije osi simetrije koji su opterećeni u ravnini zakrivljenosti postoji promjena oblika poprečnog presjeka i što je pokazano u nastavku teksta. Distorzija se pojavljuje i kod dugih H profila s dvije osi simetrije koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti [38]. Utjecaj distorzije kod razmatranog problema postaje izraženiji s porastom odnosa L/h , a smanjuje se s porastom odnosa R/h . Vjerojatni uzrok distorzije kod H profila je razlika u duljinama unutarnjeg i vanjskog pojasa (vanjski pojas je dulji od unutarnjeg pojasa za iznos $h\Phi$, gdje je Φ ukupni obuhvatni kut štapa). Distorzija poprečnog presjeka također predstavlja dodatni razlog zašto je analiza u ovom radu ograničena na štapove kod kojih je maksimalan odnos $L/h = 8$.

Na slici 3.19 je shematski prikazana polovica H profila koji je uklješten na oba kraja i koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y duž težišne linije. Na slici 3.20 su prikazani deformirani i nedeformirani numerički model razmatranog H profila, gdje je $L/h = 8$ i $R/h = 10$.



Slika 3.19. Uklješteni H profil opterećen silom na jedinicu duljine q_y .



Slika 3.20. Deformirani i nedeformirani numerički model uklještenog H profila opterećenog s q_y .

Na slici 3.20 je također vidljiva distorzija poprečnog presjeka, a koja je posebno izražena u vanjskom pojasu. Cijelom duljinom štapa je unutarnji pojas približno okomit na struk, pri čemu su zanemarivi pomaci H profila u smjeru koji je okomit na ravninu zakrivljenosti i što dodatno potvrđuje raspregnutost opterećenja koja djeluju u ravnini i izvan ravnine zakrivljenosti kod poprečnih presjeka s dvije osi simetrije.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablicama 3.37 i 3.38 su prikazani faktor utjecaja smicanja na obodno naprezanje σ_{ϕ}^{ip} , η_{σ}^s za predloženi model te η_{σ}^{FEM} za numerički model. U tablici 3.39 je prikazana relativna pogreška obodnog naprezanja u postotcima, ρ_{σ}^s , a u tablici 3.37 je označena točka u kojoj je maksimalna vrijednost obodnog naprezanja. Rezultati prikazani u tablicama 3.38 i 3.39 te faktor utjecaja smicanja ravnog štapa, tablica 3.37, se također odnose na tu točku.

Tablica 3.37. Faktor η_{σ}^s kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_{σ}^s				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,5032	1,5041	1,5071	1,5085	1,5117
$L/h = 4$	1,2730	1,2745	1,2797	1,2820	1,2878
$L/h = 5$	1,1699	1,1706	1,1751	1,1775	1,1842
$L/h = 6$	1,1169	1,1163	1,1189	1,1211	1,1279
$L/h = 7$	1,0876	1,0854	1,0856	1,0874	1,0939
$L/h = 8$	1,0707	1,0670	1,0646	1,0657	1,0719

Napomena: Faktor η_{σ}^s se odnosi na točku T₂.

Tablica 3.38. Faktor η_{σ}^{FEM} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_{σ}^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	2,1078	1,9955	1,7417	1,6524
$L/h = 4$	1,8725	1,7821	1,5461	1,4559
$L/h = 5$	1,6975	1,6364	1,4417	1,3579
$L/h = 6$	1,5521	1,5158	1,3705	1,2978
$L/h = 7$	1,4356	1,4138	1,3135	1,2547
$L/h = 8$	1,3491	1,3310	1,2642	1,2199

Napomena: Faktor η_{σ}^s se odnosi na točku T₂.

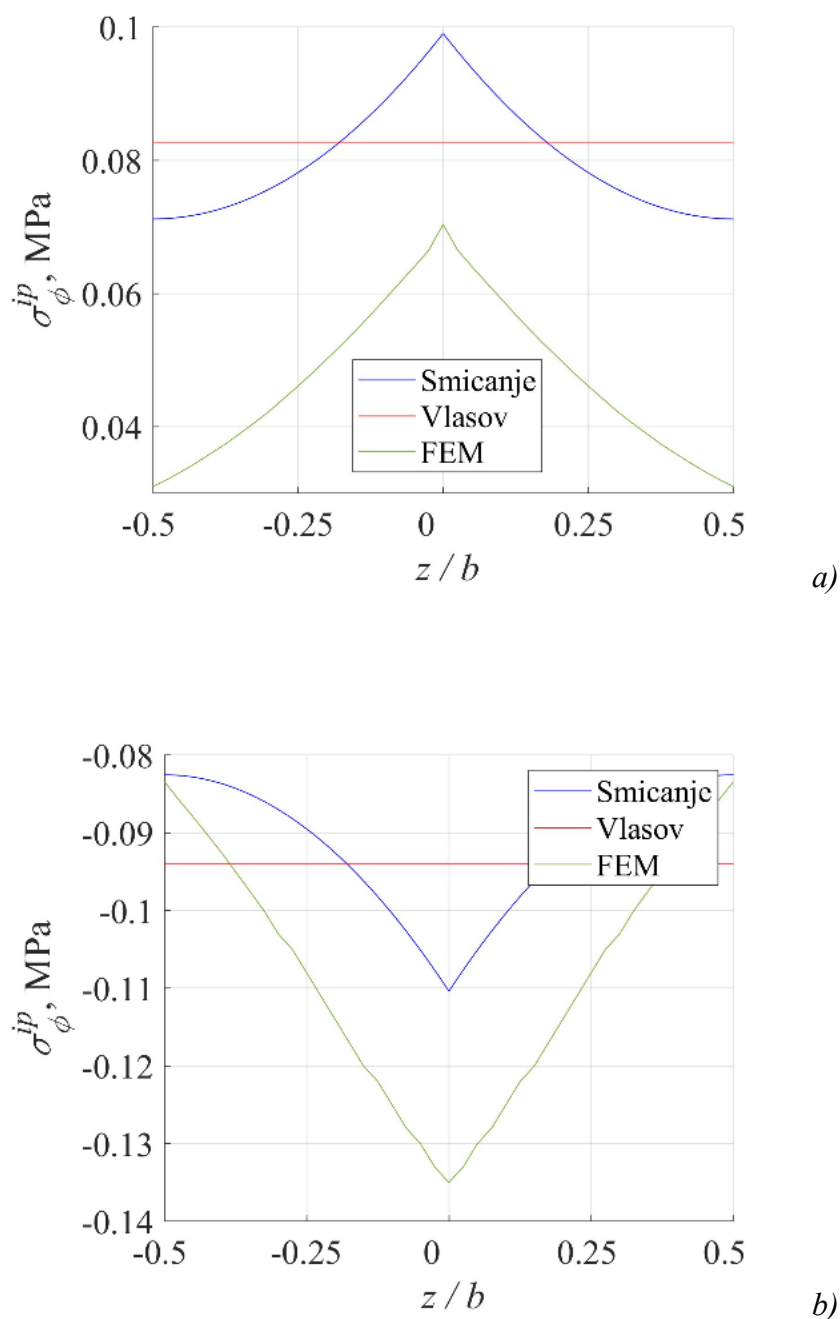
Tablica 3.39. Relativna pogreška ρ_{σ}^s kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .

	$\rho_{\sigma}^s, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-28,6839	-24,6254	-13,4696	-8,7085
$L/h = 4$	-32,0160	-28,4833	-17,2305	-11,9445
$L/h = 5$	-31,0810	-28,4649	-18,4921	-13,2852
$L/h = 6$	-28,0394	-26,3557	-18,3583	-13,6153
$L/h = 7$	-24,2407	-23,2282	-17,3506	-13,3339
$L/h = 8$	-20,6360	-19,8347	-15,7886	-12,6404

Napomena: Relativna pogreška ρ_{σ}^s se odnosi na točku T₂.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Na slici 3.21 su prikazane raspodjele obodnog naprezanja u unutarnjem i vanjskom pojasu na polovici raspona štapa za razmatrani problem.



Slika 3.21. Raspodjela obodnog naprezanja σ_{ϕ}^{ip} kod uklještenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y ($L/h = 5$, $R/h = 20$): a) unutarnji pojas; b) vanjski pojas.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Analiza rezultata prikazanih u tablicama 3.37 do 3.39 pokazuje značajan utjecaj zakrivljenosti štapa na obodno naprezanje, s tim da predloženi postupak bolje predviđa maksimalno obodno naprezanje na polovici raspona štapa nego Vlasovljev postupak. Kod razmatranog problema je faktor η_σ^S malo manji od faktora utjecaja smicanja ravnog štapa te se povećava s porastom odnosa R/h , a smanjuje se s porastom odnosa L/h .

Odstupanja u iznosima obodnog naprezanja između predloženog postupka i numeričkog modela, kao što je pokazano na slici 3.21 i u tablici 3.39, su posljedica pojednostavljenja utjecaja i smicanja i zakrivljenosti, a koja su korištena u predloženom modelu. Iako su procjene obodnog naprezanja u predloženom postupku bolje od Vlasovljevih procjena, potrebna su daljnja istraživanja i poboljšanja predloženog modela.

U Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa je obodno naprezanje u pojasu konstanto, za razliku od predloženog postupka i numeričkog modela gdje je obodno naprezanje promjenjivo po visini pojasa. Predloženi postupak dobro opisuje karakter raspodjele obodnog naprezanja, što se može vidjeti na slici 3.21, no procjene iznosa obodnog naprezanja odstupaju od rezultata numeričkog modela.

U tablicama 3.40 i 3.41 su prikazani faktori utjecaja smicanja na progib v_p na polovici raspona štapa, η_v^S i η_v^{FEM} . U tablici 3.40 je također prikazan faktor utjecaja smicanja ravnog štapa, dok je u tablici 3.42 prikazana relativna pogreška progiba v_p u postotcima između predloženog postupka i numeričkog modela, ρ_v^S .

Faktor η_v^S blago raste s porastom odnosa R/h i manji je od faktora utjecaja smicanja za ravne štapove, tablica 3.40. Razlog tome je činjenica što se u razmatranom problemu utjecaj smicanja dijeli na pomake u_M i v_p , za razliku od istovjetno oslonjenih i opterećenih ravnih štapova kod kojih smicanje utječe samo na progib v_p .

Tablica 3.40. Faktor η_v^S kod uklještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_v^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	10,0750	10,0884	10,1064	10,1097	10,1123
$L/h = 4$	6,0883	6,1018	6,1197	6,1230	6,1257
$L/h = 5$	4,2431	4,2565	4,2744	4,2778	4,2804
$L/h = 6$	3,2407	3,2541	3,2721	3,2754	3,2780
$L/h = 7$	2,6364	2,6498	2,6677	2,6710	2,6737
$L/h = 8$	2,2441	2,2575	2,2754	2,2787	2,2814

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.41. Faktor η_v^{FEM} kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_v^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	9,3920	9,5908	9,9007	9,9674
$L/h = 4$	5,4752	5,6527	5,9450	6,0113
$L/h = 5$	3,6863	3,8417	4,1176	4,1846
$L/h = 6$	2,7310	2,8620	3,1209	3,1899
$L/h = 7$	2,1742	2,2776	2,5153	2,5867
$L/h = 8$	1,8347	1,9085	2,1183	2,1919

Tablica 3.42. Relativna pogreška ρ_v^s kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .

	$\rho_v^s, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	7,2721	5,1883	2,0776	1,4277
$L/h = 4$	11,1978	7,9449	2,9386	1,8582
$L/h = 5$	15,1046	10,7973	3,8080	2,2272
$L/h = 6$	18,6635	13,7002	4,8448	2,6803
$L/h = 7$	21,2584	16,3418	6,0589	3,2590
$L/h = 8$	22,3143	18,2866	7,4163	3,9600

Porast relativne pogreške ρ_v^s kod duljih štapova manjeg polumjera je posljedica pojednostavljenja utjecaja zakrivljenosti u predloženom modelu, ali i tada su procjene ovog modela značajno bolje od procjena Vlasovljevog modela (tablice 3.40 do 3.42).

U tablicama 3.43 i 3.44 su prikazani faktori utjecaja smicanja na obodni pomak u_M , η_u^s i η_u^{FEM} , u presjeku $\tilde{x} = L/4$, a u tablici 3.45 je prikazana relativna pogreška ρ_u^s u postocima. U tablici 3.43 je izostavljen faktor utjecaja smicanja ravnog štapa zato što je kod ravnog štapa i razmatranog problema obodni pomak u_M jednak nuli, bez obzira na poprečni presjek.

Tablica 3.43. Faktor η_u^s kod ukliještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_u^s			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	4,9913	4,9888	4,9854	4,9848
$L/h = 4$	3,8022	3,7999	3,7968	3,7962
$L/h = 5$	3,0263	3,0243	3,0216	3,0212
$L/h = 6$	2,5140	2,5124	2,5101	2,5097
$L/h = 7$	2,1659	2,1644	2,1625	2,1621
$L/h = 8$	1,9215	1,9202	1,9186	1,9182

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.44. Faktor η_u^{FEM} kod uklještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_u^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	4,3861	4,5108	4,7354	4,7904
$L/h = 4$	3,1058	3,2388	3,5015	3,5709
$L/h = 5$	2,3543	2,4745	2,7267	2,7970
$L/h = 6$	1,8979	1,9998	2,2308	2,2993
$L/h = 7$	1,6118	1,6927	1,9002	1,9675
$L/h = 8$	1,4308	1,4886	1,6699	1,7369

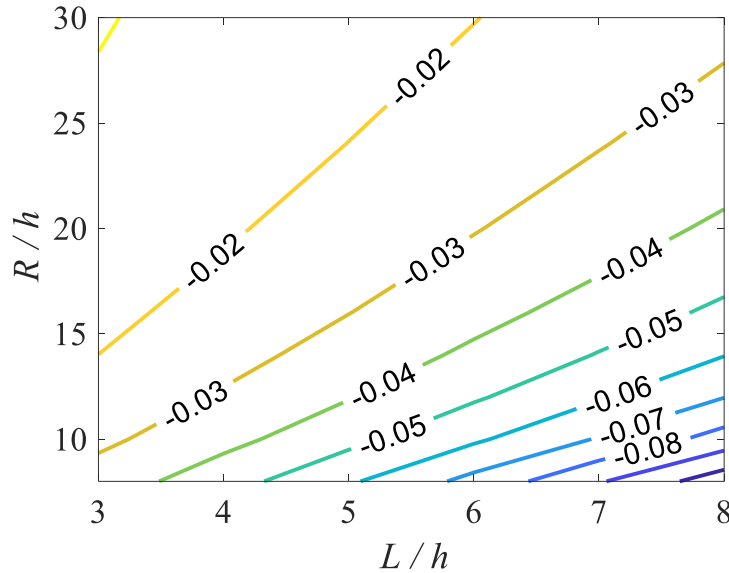
Tablica 3.45. Relativna pogreška ρ_u^s kod uklještenog H profila opterećenog s q_y .

	$\rho_u^s, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	13,7981	10,5968	5,2794	4,0581
$L/h = 4$	22,4226	17,3243	8,4335	6,3093
$L/h = 5$	28,5435	22,2186	10,8153	8,0157
$L/h = 6$	32,4622	25,6326	12,5202	9,1506
$L/h = 7$	34,3777	27,8667	13,8038	9,8907
$L/h = 8$	34,2955	28,9937	14,8931	10,4381

Kao što je pokazano u tablicama 3.43 do 3.45, utjecaj smicanja na obodni pomak je značajan, pri čemu su procjene predloženog postupka bolje od procjena Vlasovljevog modela. Iako su relativne pogreške predloženog postupka ρ_u^{FEM} velike kod štapova manjeg odnosa R/h (posljedica pojednostavljenja korištenih u ovom radu), ove relativne pogreške su manje od Vlasovljevih relativnih pogreški.

Faktori η_σ^s i η_v^s su približno jednaki faktorima utjecaja smicanja kod ravnog štapa, a s porastom odnosa R/h prelaze u faktore utjecaja smicanja za ravni štap. S porastom odnosa L/h se smanjuju faktori η_σ^s , η_v^s i η_u^s , odnosno smanjuje se utjecaj smicanja, kao što je pokazano u tablicama 3.37, 3.40 i 3.43. Utjecaj odnosa L/h je više izražen nego utjecaj odnosa R/h , pri čemu treba imati na umu da je utjecaj R/h na faktore η_σ^s , η_v^s i η_u^s zanemariv.

U razmatranom problemu je obodni pomak u_M^{FEM} , u presjeku $\tilde{x} = L/4$, u prosjeku tridesetak puta manji od progiba v_p^{FEM} , slika 3.22.



Slika 3.22. Odnos u_M^{FEM}/v_p^{FEM} kod uklještenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y za $\tilde{x} = L/4$.

U tablicama 3.46 i 3.47 su prikazani faktori utjecaja zakrivljenosti, η_σ^{RS} za obodno naprezanje i η_v^{RS} za progib, pri čemu se faktor η_σ^{RS} u tablici 3.46 također odnosi na točku u kojoj je maksimalna vrijednost obodnog naprezanja. Obodni pomak u_M je kod ravnog štapa jednak nuli, a tada slijedi da je faktor η_u^{RS} beskonačan.

Tablica 3.46. Faktor η_σ^{RS} kod uklještenog H profila opterećenog s q_y .

	η_σ^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,0111	1,0099	1,0060	1,0042	1
$L/h = 4$	1,0422	1,0376	1,0226	1,0159	
$L/h = 5$	1,0712	1,0672	1,0439	1,0316	
$L/h = 6$	1,0830	1,0884	1,0670	1,0497	
$L/h = 7$	1,0660	1,0911	1,0887	1,0690	
$L/h = 8$	1,0157	1,0686	1,1051	1,0875	
Napomena: Faktor η_σ^{RS} se odnosi na točku T_2 .					

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.47. Faktor η_v^{RS} kod uklještenog H profila opterećenog s q_y .

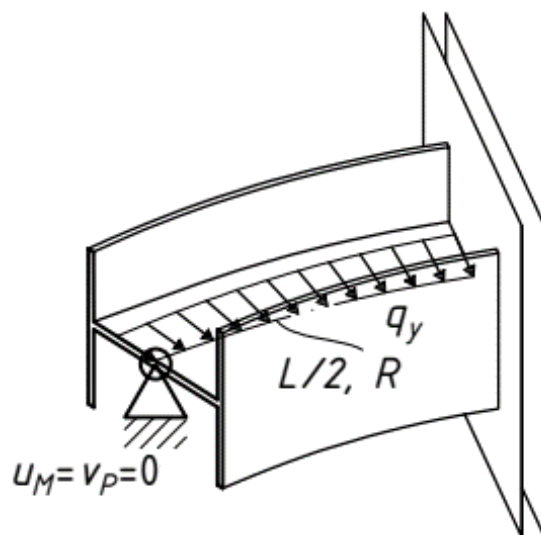
	η_v^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0,9943	0,9964	0,9991	0,9996	1
$L/h = 4$	0,9782	0,9859	0,9965	0,9984	
$L/h = 5$	0,9439	0,9634	0,9907	0,9958	
$L/h = 6$	0,8854	0,9238	0,9799	0,9910	
$L/h = 7$	0,8019	0,8641	0,9624	0,9829	
$L/h = 8$	0,6993	0,7851	0,9364	0,9707	

Sukladno rezultatima koji su prikazani u tablicama 3.46 i 3.47 te u općem slučaju, s porastom odnosa L/h raste faktor η_σ^{RS} , dok se faktor η_v^{RS} smanjuje. Tada se kod oba faktora blago povećava utjecaj zakrivljenosti. S porastom odnosa R/h raste faktor η_v^{RS} ; faktor η_σ^{RS} kod kratkih štapova se smanjuje, a faktor η_σ^{RS} kod relativno kratkih štapova prvo raste pa se smanjuje. Prethodno spomenuti faktori utjecaja zakrivljenosti s porastom odnosa R/h teže prema jedinici, pri čemu je utjecaj zakrivljenosti na faktor η_v^{RS} posebno izražen kod dugih štapova malog polumjera zakrivljenosti.

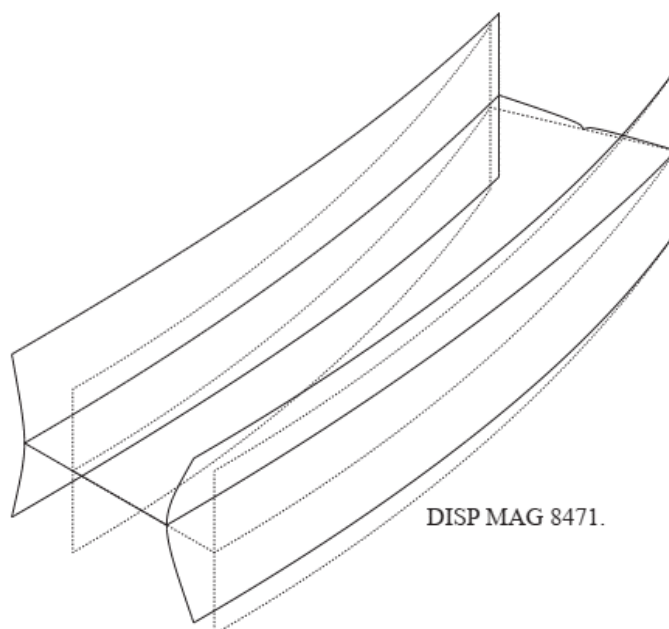
Kao što je pokazano u tablicama 3.37 do 3.45, u općem su slučaju značajna odstupanja predloženog postupka u odnosu na numeričke modele. To je posljedica pojednostavljenog opisa utjecaja smicanja i zakrivljenosti u predloženom postupku, pri čemu pojednostavljenje utjecaja zakrivljenosti vjerojatno ima veći utjecaj na ova odstupanja. Iz priloženih rezultata slijedi da se smicanje mora uzeti u obzir kod razmatranog problema, kao što je slučaj kod opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti. Za razmatrane parametre su predviđanja predloženog postupka značajno bolja od Vlasovljevih predviđanja, no potrebna su daljnja poboljšanja predloženog modela upravo zbog spomenutih odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model.

Na slici 3.23 shematski prikazana polovica H profila koji je zglobno oslonjen na oba kraja i koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y . Na slici 3.24 su prikazani deformirani i nedeformirani numerički model razmatranog H profila, gdje je $L/h = 8$ i $R/h = 10$.

U tablicama 3.48 i 3.49 su prikazani faktor utjecaja smicanja na obodno naprezanje σ_ϕ^{ip} , η_σ^S i η_σ^{FEM} , dok je u tablici 3.50 prikazana relativna pogreška ρ_σ^S . Osim toga, u tablici 3.48 je prikazan faktor utjecaja smicanja ravnog štapa. Rezultati prikazani u tablicama odnose se točku u kojoj se javlja maksimalna vrijednost obodnog naprezanja.



Slika 3.23. Zglobno oslonjeni H profil opterećen silom na jedinicu duljine q_y .



Slika 3.24. Deformirani i nedeformirani numerički model zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

Kod ovog problema je utjecaj distorzije izraženiji nego kod jednako opterećenog uklještenog profila, pogotovo kod unutarnjeg pojasa profila, kao što je vidljivo iz slike 3.24.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Tablica 3.48. Faktor η_{σ}^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_{σ}^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	1,2077*	1,1976*	1,1817*	1,1775*	1,1706*
$L/h = 4$	1,0893	1,0883	1,0895	1,0910	1,0960
$L/h = 5$	1,0618	1,0587	1,0564	1,0571	1,0614
$L/h = 6$	1,0502	1,0450	1,0393	1,0391	1,0426
$L/h = 7$	1,0457	1,0388	1,0298	1,0287	1,0313
$L/h = 8$	1,0445	1,0362	1,0242	1,0224	1,0240

Napomena: * označava faktor η_{σ}^S u točki T_5 , a u suprotnom se η_{σ}^S odnosi na točku T_2

Tablica 3.49. Faktor η_{σ}^{FEM} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_{σ}^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	1,8990*	1,6921*	1,3522*	1,2723*
$L/h = 4$	1,3703	1,2735	1,1162	1,0886
$L/h = 5$	1,4156	1,2867	1,0801	1,0454
$L/h = 6$	1,4985	1,3426	1,0710	1,0229
$L/h = 7$	1,5754	1,4163	1,0842	1,0155
$L/h = 8$	1,6157	1,4788	1,1153	1,0216

Napomena: * označava faktor η_{σ}^{FEM} u točki T_5 , a u suprotnom se η_{σ}^{FEM} odnosi na točku T_2

Tablica 3.50. Relativna pogreška ρ_{σ}^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

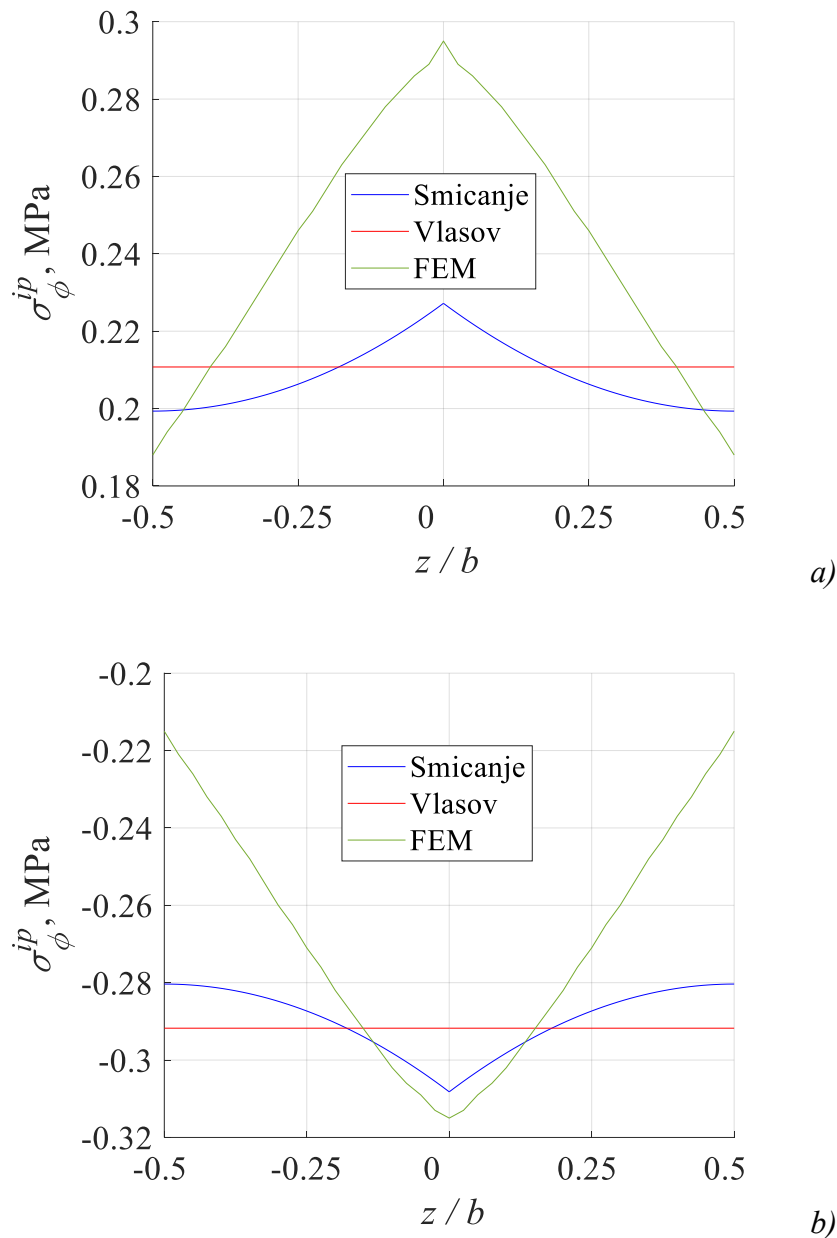
	$\rho_{\sigma}^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-36,4053*	-29,2245*	-12,6092*	-7,4486*
$L/h = 4$	-20,5039	-14,5423	-2,3890	0,2186
$L/h = 5$	-24,9904	-17,7197	-2,1948	1,1143
$L/h = 6$	-29,9125	-22,1634	-2,9607	1,5906
$L/h = 7$	-33,6238	-26,6535	-5,0191	1,3005
$L/h = 8$	-35,3518	-29,9319	-8,1658	0,0775

Napomena: * označava relativnu pogrešku ρ_{σ}^S u točki T_5 , a u suprotnom se ρ_{σ}^S odnosi na točku T_2

Kao što je pokazano u tablicama 3.48 do 3.50, utjecaj smicanja na obodno naprezanje se mora uzeti u obzir kod razmatranog problema, pri čemu su procjene predloženog postupka dobre za štapove velikog polumjera zakrivljenosti. Kod štapova malog polumjera zakrivljenosti su odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model značajna, ali su također i manja od Vlasovljevih odstupanja.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Na slici 3.25 su prikazane raspodjele obodnog naprezanja u unutarnjem i vanjskom pojasu na polovici raspona štapa kod razmatranog problema.



Slika 3.25. Raspodjela obodnog naprezanja σ_{ϕ}^{ip} kod zglobno oslonjenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y ($L/h = 5$, $R/h = 20$): a) unutarnji pojas; b) vanjski pojas.

Kod razmatranog problema je kod kraćih štapova ($L/h \leq 3$) najveće obodno naprezanje na polovici raspona štapa u srednjoj točki unutarnjeg pojasa T_5 , tablica 3.48, a kod duljih štapova je u srednjoj točki T_2 vanjskog pojasa, slika 3.25.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablicama 3.51 i 3.52 su prikazani faktori utjecaja smicanja na progib v_P , η_v^S i η_v^{FEM} , pri čemu je faktor utjecaja smicanja kod ravnog štapa prikazan u tablici 3.51. U tablici 3.53 je prikazana relativna pogreška progiba ρ_v^S u postocima.

Tablica 3.51. Faktor η_v^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_v^S				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	2,7970	2,8062	2,8184	2,8206	2,8224
$L/h = 4$	1,9997	2,0088	2,0210	2,0233	2,0251
$L/h = 5$	1,6306	1,6398	1,6520	1,6542	1,6560
$L/h = 6$	1,4301	1,4393	1,4515	1,4538	1,4556
$L/h = 7$	1,3092	1,3184	1,3306	1,3329	1,3347
$L/h = 8$	1,2308	1,2400	1,2522	1,2544	1,2562

Tablica 3.52. Faktor η_v^{RS} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_v^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	3,3878	3,2431	3,0016	2,9479
$L/h = 4$	2,7300	2,5255	2,1945	2,1226
$L/h = 5$	2,5782	2,3009	1,8529	1,7572
$L/h = 6$	2,6314	2,2919	1,7051	1,5767
$L/h = 7$	2,7351	2,3755	1,6603	1,4897
$L/h = 8$	2,8028	2,4712	1,6775	1,4589

Tablica 3.53. Relativna pogreška ρ_v^S kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	$\rho_v^S, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-17,4390	-13,4717	-6,1034	-4,3183
$L/h = 4$	-26,7509	-20,4593	-7,9061	-4,6782
$L/h = 5$	-36,7543	-28,7322	-10,8425	-5,8616
$L/h = 6$	-45,6525	-37,2006	-14,8730	-7,7948
$L/h = 7$	-52,1334	-44,5001	-19,8579	-10,5256
$L/h = 8$	-56,0868	-49,8219	-25,3532	-14,0174

Prema tablicama 3.51 do 3.53, utjecaj smicanja na progib se mora uzeti u obzir, pri čemu su procjene predloženog postupka prihvatljive kod kratkih štapova velikog polumjera zakrivljenosti. Odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model se povećavaju

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

s porastom duljine štapa i sa smanjivanjem polumjera štapa, tablica 3.53. Važno je naglasiti da su tada odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model manja od Vlasovljevih odstupanja, pogotovo kod kratkih štapova.

U tablicama 3.54 i 3.55 su prikazani faktori utjecaja smicanja na obodni pomak u_M , η_u^s i η_u^{FEM} u presjeku $\tilde{x} = L/4$, dok je u tablici 3.56 prikazana relativna pogreška ρ_u^s .

Tablica 3.54. Faktor η_u^s kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_u^s			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	6,3268	6,3223	6,3164	6,3153
$L/h = 4$	4,2302	4,2272	4,2232	4,2224
$L/h = 5$	3,1450	3,1428	3,1399	3,1394
$L/h = 6$	2,5207	2,5191	2,5169	2,5165
$L/h = 7$	2,1316	2,1303	2,1285	2,1282
$L/h = 8$	1,8738	1,8727	1,8712	1,8709

Tablica 3.55. Faktor η_u^{FEM} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_u^{FEM}			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	7,9195	7,6162	7,0919	6,9706
$L/h = 4$	6,8058	6,3408	5,5692	5,3962
$L/h = 5$	6,5122	5,8678	4,8036	4,5705
$L/h = 6$	6,5919	5,8092	4,4170	4,1041
$L/h = 7$	6,7336	5,9276	4,2534	3,8404
$L/h = 8$	6,7557	6,0461	4,2294	3,7055

Tablica 3.56. Relativna pogreška ρ_u^s kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

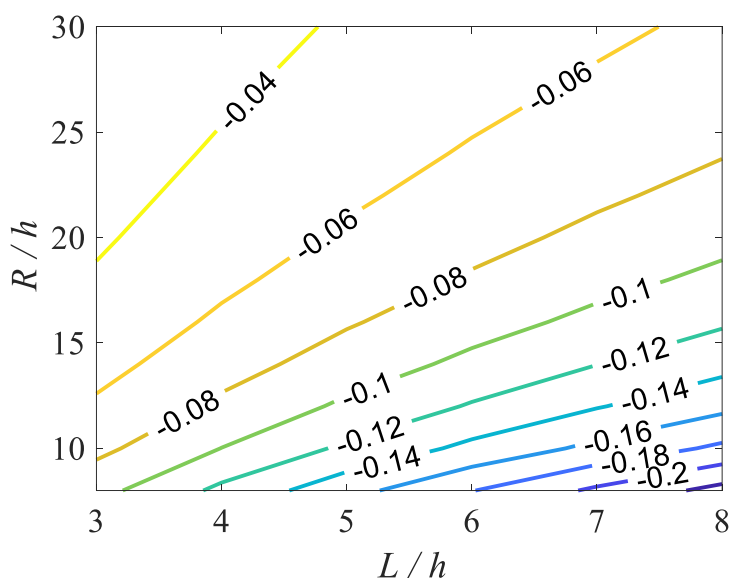
	$\rho_u^s, [\%]$			
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$
$L/h = 3$	-20,1111	-16,9888	-10,9350	-9,4009
$L/h = 4$	-37,8442	-33,3333	-24,1686	-21,7523
$L/h = 5$	-51,7060	-46,4399	-34,6344	-31,3117
$L/h = 6$	-61,7606	-56,6360	-43,0179	-38,6833
$L/h = 7$	-68,3438	-64,0613	-49,9577	-44,5839
$L/h = 8$	-72,2634	-69,0263	-55,7573	-49,5102

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

Kao što je pokazano u tablicama 3.54 do 3.56, utjecaj smicanja na obodni pomak se također mora uzeti u obzir. Odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model su značajna, ali su i manja od Vlasovljevih odstupanja u odnosu na numerički model (pogotovo kod vrlo kratkih štapova).

Za ovaj problem, procjene progiba i obodnog pomaka prema predloženom postupku su bolje od Vlasovljevih procjena, tablice 3.51 do 3.56. Iz rezultata koji su priloženi za analizirani H profil, utjecaj smicanja na obodno naprezanje i progib kod zglobno oslonjenih štapova je manji od utjecaja smicanja kod ukliještenih štapova. Odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model su dosta izražena, no i dalje su manja od Vlasovljevih odstupanja. Ovo je posljedica pojednostavljenja utjecaja zakrivljenosti, kako u temeljnim jednadžbama bez utjecaja smicanja, tako i u temeljnim jednadžbama s utjecajem smicanja. Slijedom navedenog, potreba su daljnja istraživanja i razvoj sustavnog modela tankostjenog zakrivljenog štapa u kojem je smicanje uzeto u obzir.

Kod zglobno oslonjenih štapova je obodni pomak u_M^{FEM} , u presjeku $\tilde{x} = L/4$, u prosjeku desetak puta manji od progiba v_P^{FEM} , slika 3.26.



Slika 3.26. Odnos u_M^{FEM}/v_P^{FEM} kod zglobno oslonjenog H profila koji je opterećen silom na jedinicu duljine q_y za $\tilde{x} = L/4$.

3. Štapovi male i srednje zakrivljenosti s otvorenim dvoosno simetričnim poprečnim presjecima

U tablici 3.57 je prikazan faktor utjecaja zakrivljenosti na obodno naprezanje, η_{σ}^{RS} , dok je u tablici 3.58 prikazan faktor utjecaja zakrivljenosti na progib v_P , η_v^{RS} .

Tablica 3.57. Faktor η_{σ}^{RS} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_{σ}^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0.8474*	0.8832*	0.9476*	0.9665*	1
$L/h = 4$	1.0675	1.0787	1.0657	1.0497	
$L/h = 5$	0.9934	1.0440	1.0841	1.0712	
$L/h = 6$	0.8551	0.9488	1.0821	1.0860	
$L/h = 7$	0.6952	0.8139	1.0511	1.0878	
$L/h = 8$	0.5496	0.6714	0.9895	1.0713	

Napomena: * označava faktor η_{σ}^{RS} u točki T_5 , a u suprotnom se η_{σ}^{RS} odnosi na točku T_2

Tablica 3.58. Faktor η_v^{RS} kod zglobno oslonjenog H profila opterećenog s q_y .

	η_v^{RS}				
	$R/h = 8$	$R/h = 10$	$R/h = 20$	$R/h = 30$	$R/h = \infty$
$L/h = 3$	0.9761	0.9819	0.9920	0.9949	1
$L/h = 4$	1.0422	1.0376	1.0226	1.0159	
$L/h = 5$	1.0712	1.0672	1.0440	1.0316	
$L/h = 6$	1.0830	1.0884	1.0671	1.0498	
$L/h = 7$	1.0660	1.0911	1.0886	1.0689	
$L/h = 8$	1.0157	1.0685	1.1052	1.0874	

Utjecaj zakrivljenosti je izraženiji kod obodnog naprezanja nego kod progiba, pogotovo kod dugih štapova malog polumjera zakrivljenosti, a što je vidljivo u tablicama 3.57 i 3.58. Faktor η_v^{RS} raste u općem slučaju, a faktor η_{σ}^{RS} u točki T_2 (sredina pojasa) se smanjuje s porastom odnosa L/h . U općem slučaju, faktor η_{σ}^{RS} raste pa se smanjuje s porastom odnosa R/h .

Usporedbom rezultata prikazanih za I i H profile, odstupanja predloženog postupka za H profile su značajno veća od odstupanja predloženog postupka za I profile, a što je posljedica pojednostavljenja zakrivljenosti težišne linije. Kod oba su profila predviđanja predloženog postupka, u općem slučaju, bolja od Vlasovljevih predviđanja.

4. ZAKLJUČAK

U ovoj disertaciji je predložen postupak za analizu tankostjenih izotropnih štapova male zakrivljenosti, čiji poprečni presjek je I ili H profil s dvije osi simetrije, a u kojem je kutna deformacija srednje plohe uzeta u obzir.

Jednadžbe ravnoteže zakrivljenog štapa korištene u doktorskoj disertaciji istovjetne su Vlasovljevim jednadžbama, pri čemu je Vlasov prilikom njihovog izvoda zanemario relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište poprečnog presjeka. Moment čistog uvijanja nije uključen u analizu pa je zbog toga predloženi postupak ograničen na kratke štapove.

Temeljne jednadžbe s utjecajem smicanja predstavljaju sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima, a koje su u ovoj disertaciji dodatno pojednostavljene kako bi se dobio jednostavni model za analizu zakrivljenog štapa u kojem je smicanje uzeto u obzir. Predloženi model predstavlja kompromis između jednostavnosti analitičkog rješenja u zatvorenom obliku te njegove točnosti u odnosu na numeričke modele, a pri čemu se koriste geometrijske značajke poprečnog presjeka ravnog štapa (uključujući faktore smicanja). Nadalje, Vlasovljev model zakrivljenog štapa slijedi iz predloženog postupka kada se zanemari utjecaj smicanja. Analiza ravnog tankostjenog izotropnog štapa prema teoriji savijanja i teoriji uvijanja s utjecajem smicanja se dobiva kada se u predloženom postupku zanemari utjecaj zakrivljenosti. Ako se u predloženom modelu zanemare utjecaji i smicanja i zakrivljenosti štapa, tada predloženi model prelazi u Vlasovljev model ravnog izotropnog štapa.

U ovom radu su analizirani I profili s dvije osi simetrije koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti: (i) silom na jedinicu duljine duž težišne linije čiji je pravac djelovanja okomit na ravninu zakrivljenosti te (ii) momentom uvijanja oko glavnog pola na jedinicu duljine duž težišne linije. Također su analizirani H profili s dvije osi simetrije koji su opterećeni u ravnini zakrivljenosti radijalnom silom na jedinicu duljine težišne linije. U ovom je radu također analiziran utjecaj oslonaca (uklještenje ili nepomični zglobni oslonac), pri čemu svi štapovi imaju istovjetne oslonce na krajevima.

Ravni štap opterećen silom po jedinici duljine u ravnini struka imat će istovjetan odgovor kod I i H poprečnih presjeka, odnosno profila. Za zakrivljeni I profil opterećen u ravnini struka silama po jedinici duljine koja djeluju okomito na ravninu zakrivljenosti te za zakrivljeni H profil opterećen silama po jedinici duljine u ravnini zakrivljenosti odgovor sustava neće biti

isti. Kod ovih štapova javljaju se dodatne komponente pomaka (kutovi uvijanja kod I profila, odnosno obodni pomaci kod H profila) u odnosu na ravne štapove.

U ovom je radu, prilikom parametarske analize i verifikacije predloženog analitičkog modela, korišten faktor utjecaja smicanja koji predstavlja odnos rezultata između predloženog modela te Vlasovljevog modela zakrivljenog štapa. Pokazano da su faktori utjecaja smicanja na pomake i obodno normalno naprezanje zakrivljenog štapa približno jednaki faktorima utjecaja smicanja odgovarajućeg ravnog štapa. Upravo zbog toga su potreba daljnja istraživanja o utjecaju zakrivljenosti, pogotovo na dodatne pomake zbog smicanja, a koji se ne javljaju u analizi ravnih tankostjenih štapova prema teoriji savijanja i teoriji uvijanja s utjecajem smicanja.

U ovoj disertaciji je također pokazano da se smicanje mora uzeti u obzir kod kratkih štapova, bez obzira na oslonce i vrstu opterećenja. Kod kratkih štapova male zakrivljenosti, a za čiju je analizu predloženi postupak i namijenjen, relativne pogreške predloženog postupka su u općem slučaju značajno manje od relativnih pogreški Vlasovljevog modela. Međutim, kod zakrivljenih se štapova zbog spregnutosti pomaka i unutarnjih sila pojavljuju dodatni pomaci, pri čemu su u nekim slučajevima bolje Vlasovljeve procjene dodatnih pomaka. Tada najčešće dodatni pomak ili nije utjecajan kod razmatranog problema ili su male razlike u procjenama dodatnog pomaka između predloženog postupka i Vlasovljevog modela zakrivljenog štapa. Ipak, ovo ukazuje na potrebu daljnjih istraživanja i poboljšanja predloženog modela.

Analizom utjecaja zakrivljenosti i duljine zakrivljenih štapova na rješenja predloženog postupka može se uočiti da se s porastom odnosa R/h (smanjenje zakrivljenosti) smanjuju odstupanja predloženog postupka u odnosu na numerički model, a s porastom odnosa L/h (povećanje duljine) se smanjuje razlika između predloženog postupka i Vlasovljevog postupka. Dakle, s povećanjem duljine štapa se smanjuje utjecaj smicanja, kao i kod ravnih štapova. Također, smicanje ima veći utjecaj na pomake nego na obodna normalna naprezanje, pri čemu je taj utjecaj kod ukliještenih štapova izraženiji nego kod zglobno oslonjenih štapova.

Utjecaj zakrivljenosti je pojednostavljen u Vlasovljevom modelu zakrivljenog štapa pa time i u predloženom postupku. Zbog ove činjenice se kod duljih štapova manjih polumjera zakrivljenosti u nekim slučajevima povećava odstupanje analitičkih postupaka u odnosu na numerički model. Kod I profila je samo struk zakrivljen, a tada je utjecaj pojednostavljenja zakrivljenosti manje značajan. Kao što je pokazano u ovom radu, predloženi postupak dobro

opisuje utjecaj smicanja kod analiziranih I profila koji su opterećeni izvan ravnine zakrivljenosti, a kod kojih je izvitoperenje poprečnog presjeka ograničeno (bez obzira na razmatrana opterećenja i oslonce).

Kod H profila su oba pojasa zakrivljena pa je utjecaj pojednostavljenja zakrivljenosti izražen. U određenim slučajevima se javljaju značajna odstupanja u rezultatima između predloženog postupka u odnosu na numeričke modele. Drugi razlog ovih odstupanja je uočena distorzija H profila koji su opterećeni u ravnini zakrivljenosti, a što je vjerojatno posljedica različitih duljina pojaseva kod H profila. Ove činjenice ukazuju na potrebu daljnjih istraživanja i poboljšanja predloženog modela. Međutim, važno je naglasiti kako predloženi postupak daje bolje rezultate od Vlasovljevog modela kod kratkih H profila, iako su relativne pogreške predloženog postupka u odnosu na numerički model značajne (posebno kod štapova manjeg polumjera zakrivljenosti).

Iz priloženih rezultata slijedi da se utjecaj kutne deformacije srednje plohe mora uzeti u obzir kod kratkih izotropnih zakrivljenih tankostjenih I i H profila s dvije osi simetrije, bez obzira na razmatrani problem. Za očekivati je da će utjecaj smicanja biti još izraženiji kod ortotropnih materijala i monosimetričnih, to jest asimetričnih profila, kao što je to slučaj kod ravnih štapova.

U nastavku istraživanja se planira proširenje predloženog postupka na ortotropne materijale te na poprečne presjeke proizvoljnog oblika. U tom slučaju su svi pomaci (s i bez utjecaja smicanja) spregnuti i potrebno je uzeti u obzir relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište presjeka. Očekuje se razvoj sustavnog modela tankostjenog zakrivljenog štapa s utjecajem smicanja. U takvom modelu bi kutna deformacija srednje plohe bila dosljedno uključena u izraz za obodni pomak, a posljedično i u izraze za: duljinsku deformaciju, obodno normalno naprezanje, veze unutarnja sila – pomak i jednadžbe ravnoteže. Na ovaj način bi se trebala otkloniti ograničenja i nedostaci uočeni kod predloženog modela u ovoj doktorskoj disertaciji.

LITERATURA

- [1] Yanze, L. i dr.: "Theoretical and experimental analysis of thin-walled curved rectangular box beam under in-plane bending", Scanning, Vol. 2021, pp. 1-19, 2021.
- [2] Tong, G.: "Linearna i nelinearna analiza tankostjenih zakrivljenih gređa, kineski: 薄壁曲梁线性和非线性分析理论", Science Press, 2004.
- [3] Tong, G.; Xu, Q.: "An Exact Theory for Curved Beams with Any Thin-Walled Open Sections", Advances in Structural Engineering, Vol. 5, No. 4, pp. 195-209, 2002.
- [4] Pavazza, R.: "Uvod u analizu tankostjenih štapova", Sveučilišni udžbenik, Kigen, Zagreb, 2007.
- [5] Vlasov, V. Z.: "Thin-Walled Elastic Beams, Second Edition", Israel Program for Scientific Translations, Jeruzalem, 1963.
- [6] Tsiptsis, I. N.; Sapountzakis, E. J.: "Generalized warping and distortional analysis of curved beams with isogeometric methods", Computers & Structures, Vol. 191, pp. 33-50, 2017.
- [7] Cárdenas, D. i dr.: "Unified theory for curved composite thin-walled beams and its isogeometrical analysis", Thin-Walled Structures, Vol. 131, pp. 838-854, 2018.
- [8] Peres, N.; Gonçalves R.; Turco E.: "First-order generalised beam theory for curved thin walled members with circular axis", Thin-Walled Structures, Vol. 107, pp. 345-361, 2016.
- [9] Peres, N.; Gonçalves R.; Camotim D.: "GBT-based cross-section deformation modes for curved thin-walled members with circular axis", Thin-Walled Structures, Vol. 127, pp. 769-780, 2018.
- [10] Carrera, E.; Giunta, G.; Petrolo, M.: "Beam Structures: Classical and Advanced Theories", Wiley, 2011.
- [11] De Pietro, G. i dr.: "Strong and weak form solutions of curved beams via Carrera's unified formulation", Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 27, No. 15, pp. 1342-1353, 2018.
- [12] Afnani, A.; Erkmén, R.E.; Niki, V.: "An efficient formulation for thin-walled beams curved in plan", International Journal of Steel Structures, Vol. 17, No. 3, pp. 1087-1102, 2017.

- [13] Kim, N. I.; Kim, M. Y.: “Thin-walled curved beam theory based on centroid-shear center formulation“, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 19, No. 2, pp. 589–604, 2005.
- [14] Piovan, M. T.; Cortínez, V. H.: “Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability“, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 9, pp. 759-789, 2007.
- [15] Šimić, D.: “Teorija tankostijenih nosača otvorenog poprečnog presjeka“, *Građevinski fakultet, Zagreb*, 2008.
- [16] Latalski, J.; Zulli, D.: “Generalized Beam Theory for Thin-Walled Beams with Curvilinear Open Cross-Sections“, *Applied Sciences*, Vol. 10, No. 21, pp. 7802-7820, 2020.
- [17] Matoković, A.: “Savijanje i uvijanje štapova otvorenog tankostjenog presjeka s utjecajem smicanja“, doktorska disertacija, *Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogranje, Sveučilište u Splitu*, 2012.
- [18] Vukasović, M.: “Savijanje i uvijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka“, doktorska disertacija, *Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogranje, Sveučilište u Splitu*, 2014.
- [19] Pavazza, R.: “Energijske metode: uvod u strukturnu analizu“, *Element, Zagreb*, 2018.
- [20] Pavazza, P.; Matoković, A.; Plazibat, B.: “Bending of thin-walled beams of symmetrical open cross-sections with influence of shear“, *Transactions of Famena*, Vol. 37, No. 3, pp. 17–30. 2013.
- [21] Pavazza, P.; Matoković, A.; Plazibat, B.: “Torsion of thin-walled beams of symmetrical open cross-sections with influence of shear“, *Transactions of Famena*, Vol. 37, No. 2, pp. 1–14. 2013.
- [22] Timoshenko, S. P.; Gere, J. M.: “Theory of elastic stability (2nd ed.)“, *McGraw-Hill*, 1961.
- [23] Yoo, C.H.: “Flexural-torsional stability of curved beams“, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 108, No. 6, pp. 1351–1369, 1982.
- [24] Flüge W.: “Stresses in Shells“, *Springer – Verlag, Berlin*, 1973.
- [25] Yang, Y.; Kuo, S.: “Static Stability of Curved Thin-Walled Beams“, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 112, No. 8, pp. 821-841, 1986.

- [26] Usami, T.; Koh, S.Y.: "Large displacement theory of thin-walled curved members and its application to lateral-torsional buckling analysis of circular arches", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 16, No. 1, pp. 71–95, 1980.
- [27] Nishino, F.; Fukasawa, Y.: "Formulation of static behavior of thin-walled curved beams under assumptions of strain field", *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, Vol. 1976, No. 247, pp. 9–19, 1976.
- [28] Rajasekaran, S.; Sundararajan, T.; Srinivasa Rao, K.: Discussion of "Static Stability of Curved Thin-Walled Beams" by Yeong-Bin Yang and Shyh-Rong Kuo (Vol. 112, No. 8, 1986.), 1988.
- [29] Kang, Y.J.; Yoo, C.H.: "Thin-walled curved beams. II: Analytical Solutions for Buckling of Arches ", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 10, pp. 2102–2125, 1994.
- [30] Kang Y.J., Yoo C.H.: "Thin walled curved beams. I: Formulation of nonlinear equations", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, pp. 2072-2101, 1994.
- [31] Zeybek, Z.; Topkaya, C.; Rotter, J. M.: "Analysis of silo supporting ring beams resting on discrete supports", *Thin-Walled Structures*, Vol. 135, pp. 285-296, 2019.
- [32] Zeybek, Z.; Seçer, M.: "A design approach for the ring girder in elevated steel silos", *Thin-Walled Structures*, Vol. 157, 2020.
- [33] Tong, G.: "An exact theory of curved beams with open folded plated profiles", *Engineering Mechanics*, Vol. 14, No. 4, 1997.
- [34] Huang, S.; Qiao, P.: "Buckling of thin-walled I-section laminated composite curved beams", *Thin-Walled Structures*, Vol. 154, p. 106843, 2020.
- [35] Yang, Y. B.; Kuo, S. R.: "Theory and analysis of nonlinear framed structures", Prentice-Hall, New York, 1994.
- [36] Yang, Y.B.; Kuo, S.R.: "Effect of curvature on stability of curved beams", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 6, pp. 1185–1202, 1987.
- [37] Kustura D.; Vlak F.; Matić T.; Vukasović M.: "In-plane Displacements of Thin-walled Curved Beams", 2022 7th International Conference on Smart and Sustainable Technologies (SpliTech), Split / Bol, Croatia, 2022, pp. 1-5.

- [38] Kustura D.; Vlak F.; Matić T.; Vukasović M.: “The Out-of-plane Static Analysis of Thin-walled Curved H Beams“, Transactions of FAMENA, u postupku objave
- [39] Rajasekaran, S.; Padmanabhan, S.: “Equations of curved beams”, Journal of Engineering Mechanics, Vol 115, No. 5, pp. 1094–1111, 1989.
- [40] Kano, T.; Usuki, S.; Hasebe, K.: “Theory of thin-walled curved members with shear deformation“, Ingenieur-Archiv, Vol. 51, No. 5, pp. 325-336, 1982.
- [41] Slivker, V.: “ Mechanics of Structural Elements: Theory and Applications“, Springer Science & Business Media, 2006.
- [42] ADINA 9.3.3.: “Theory and Modeling Guide“, ADINA R&D Inc, Watertown, 2017.

PRILOZI

PRILOG A

Jednadžbe ravnoteže tankostjenog zakrivljenog štapa, čiji poprečni presjek ima dvije osi simetrije, dobiju se temeljen geometrijske analize infinitezimalnog odsječka štapa koji je prikazan na slici 2.3.

Suma svih sila i momenata oko lokalnih koordinatnih osi lijevog poprečnog presjeka na slici 2.3, kod opterećenja koje djeluje u ravnini zakrivljenosti, glase

$$\begin{aligned}
 \sum F_{Tx} &= -N + (N + dN) \cos d\phi - (Q_y + dQ_y) \sin d\phi + \\
 &\quad + q_x R d\phi \cos \frac{d\phi}{2} - q_y R d\phi \sin \frac{d\phi}{2} = 0 \\
 \sum F_{Ty} &= -Q_y + (Q_y + dQ_y) \cos d\phi + (N + dN) \sin d\phi + \\
 &\quad + q_y R d\phi \cos \frac{d\phi}{2} + q_x R d\phi \sin \frac{d\phi}{2} = 0 \\
 \sum M_{Tz} &= -M_z + (M_z + dM_z) + (Q_y + dQ_y) R d\phi \cos d\phi + \\
 &\quad + (N + dN) R d\phi \sin d\phi = 0.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Suma svih sila i momenata oko lokalnih koordinatnih osi lijevog poprečnog presjeka, kod opterećenja koje djeluje izvan ravnine zakrivljenosti, glase

$$\begin{aligned}
 \sum M_{Tx} &= -M_p + (M_p + dM_p) \cos d\phi - (M_y + dM_y) \sin d\phi + \\
 &\quad + m_p R d\phi \cos \frac{d\phi}{2} + (Q_z + dQ_z) R d\phi \sin d\phi = 0 \\
 \sum M_{Ty} &= -M_y + (M_y + dM_y) \cos d\phi + (M_p + dM_p) \sin d\phi - \\
 &\quad - (Q_z + dQ_z) R d\phi \cos d\phi = 0 \\
 \sum F_{Tz} &= -Q_z + (Q_z + dQ_z) + q_z R d\phi = 0.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

U momentnim jednadžbama u izrazima (A.1) i (A.2) su izostavljeni članovi koji se odnose na sile po jedinici duljine jer predstavljaju diferencijalne veličine višeg reda.

Prethodno prikazani izrazi uz preuređivanje te aproksimacijama $\sin(d\phi) \approx d\phi$, $\cos(d\phi) \approx 1$ i $\cos(d\phi/2) \approx 1$ prelaze u

$$\begin{aligned} dN - (Q_y + dQ_y)d\phi + q_x R d\phi - q_y R d\phi \frac{d\phi}{2} &= 0 \\ dQ_y + (N + dN)d\phi + q_y R d\phi + q_x R d\phi \frac{d\phi}{2} &= 0 \\ dM_z + (Q_y + dQ_y)R d\phi + (N + dN)R d\phi d\phi &= 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

i

$$\begin{aligned} dM_P - (M_y + dM_y)d\phi + m_P R d\phi + (Q_z + dQ_z)R d\phi d\phi &= 0 \\ dM_y + (M_P + dM_P)d\phi - (Q_z + dQ_z)R d\phi &= 0 \\ dQ_z + q_z R d\phi &= 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Zanemarivanjem diferencijalnih veličina višeg reda, izrazi (A.3) i (A.4) prelaze u

$$\begin{aligned} dN - Q_y d\phi + q_x R d\phi &= 0 \\ dQ_y + N d\phi + q_y R d\phi &= 0 \\ dM_z + Q_y R d\phi &= 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

i

$$\begin{aligned} dM_P - M_y d\phi + m_P R d\phi &= 0 \\ dM_y + M_P d\phi - Q_z R d\phi &= 0 \\ dQ_z + q_z R d\phi &= 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Izrazi (A.5) i (A.6) primjenom odnosa $\phi = \tilde{x}/R$ i $d\tilde{x} = R d\phi$ prelaze u izraze (2.7) i (2.8), tim redosljedom.

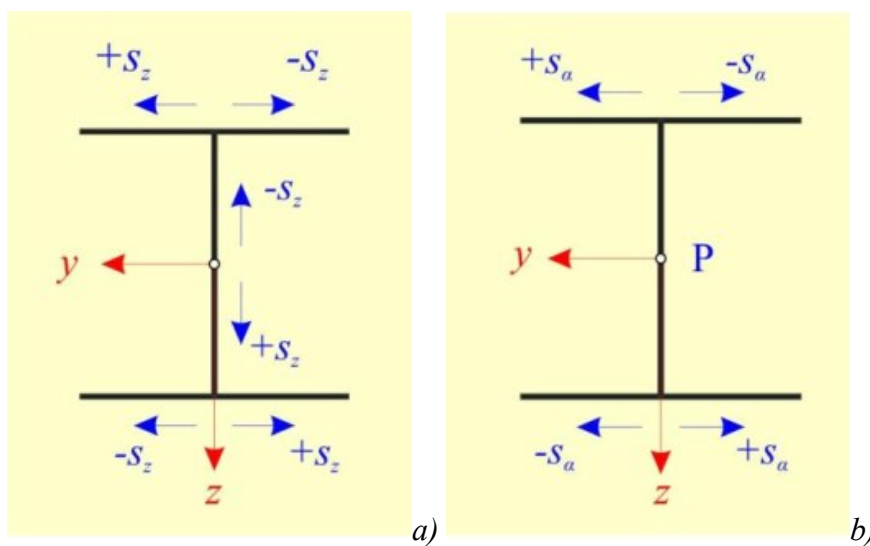
PRILOG B

Geometrijske značajke I i H profila s dvije osi simetrije, gdje je $\psi = ht_0/(bt_1)$ i $\rho = b/h$, slijede iz teorije savijanja i teorije uvijanja ravnog tankostjenog izotropnog štapa s utjecajem smicanja [4, 17-21] i prikazane su u tablici B.1.

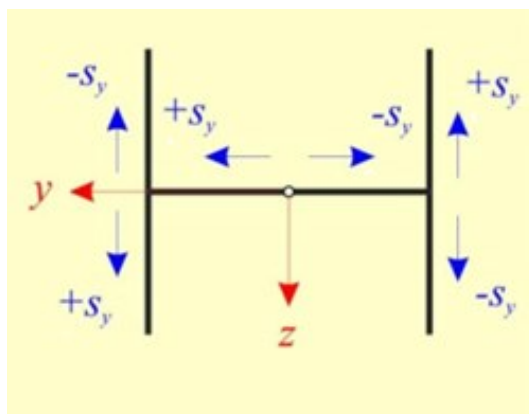
Tablica B.1. Geometrijske značajke kod I i H profila s dvije osi simetrije [17].

	I profil	H profil
A	$ht_0 + 2bt_1$	$ht_0 + 2bt_1$
I_y	$t_0h^3/12 + 2bt_1(h/2)^2$	$\frac{bt_1h^2\rho^2}{6}$
I_z	$\frac{bt_1h^2\rho^2}{6}$	$t_0h^3/12 + 2bt_1(h/2)^2$
I_ω	$t_1b^3h^2/24$	$t_1b^3h^2/24$
I_t	$(ht_0^3 + 2bt_1^3)/3$	$(ht_0^3 + 2bt_1^3)/3$
I_p	$t_1bh^2/2$	$t_1bh^2/2$
κ_{yy}	$\frac{3}{5}(2 + \psi)$	$\frac{6(2 + \psi)^3(30 + 10\psi + \psi^2 + 5\psi\rho^2)}{5\psi[12 + \psi(8 + \psi)^2]}$
κ_{zz}	$\frac{6(2 + \psi)^3(30 + 10\psi + \psi^2 + 5\psi\rho^2)}{5\psi[12 + \psi(8 + \psi)^2]}$	$\frac{3}{5}(2 + \psi)$
$\kappa_{\omega\omega}$	$6/5$	$6/5$

Definiranje predznaka krivocrtnih koordinata s_z i s_α je prikazano na slici B.1 kod I profila s dvije osi simetrije, dok je na slici B.2 prikazano definiranje predznaka krivocrtne koordinate s_y kod H profila s dvije osi simetrije. Raspodjele $\int_0^{s_z} S_y^*/t ds$ i $\int_0^{s_\alpha} S_\omega^*/t ds$ kod I profila s dvije osi simetrije su prikazane na slici B.3, gdje je $A_0 = ht_0$ i $A_1 = bt_1$, dok je raspodjela $\int_0^{s_y} S_z^*/t ds$ kod H profila s dvije osi simetrije prikazana na slici B.4.



Slika B.1. I profil s dvije osi simetrije, definiranje predznaka koordinata a) s_z ; b) s_α [17].



Slika B.2. H profil s dvije osi simetrije, definiranje predznaka koordinate s_y [17].

a)

Gornji pojas	$0 \leq s_z \leq \frac{b}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = -\frac{h}{4} s_z (b - s_z) - \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$	
	$0 \geq s_z \geq -\frac{b}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = \frac{h}{4} s_z (b + s_z) - \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$	
Struk	$-\frac{h}{2} \leq s_z \leq \frac{h}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = \frac{s_z}{t_0} \left[\frac{hA_1}{2} + \frac{t_0}{24} (3h^2 - 4s_z^2) \right]$	
	$0 \leq s_z \leq \frac{b}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = \frac{h}{4} s_z (b - s_z) + \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$	
Donji pojas	$0 \geq s_z \geq -\frac{b}{2}$	$\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds = -\frac{h}{4} s_z (b + s_z) + \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$	

Raspodjela $\int_0^{s_z} \frac{S_y^*}{t} ds$

b)

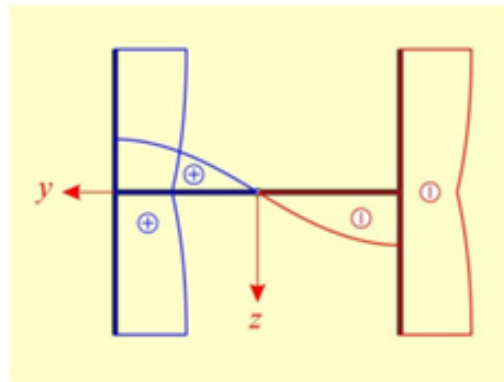
Gornji pojas	$-\frac{b}{2} \leq s_\alpha \leq \frac{b}{2}$	$\int_0^{s_\alpha} \frac{S_\omega^*}{t} ds = \frac{h}{4} s_\alpha \left(\frac{b^2}{4} - \frac{s_\alpha^2}{3} \right)$	
Struk	$s_\alpha = 0$	$\int_0^{s_\alpha} \frac{S_\omega^*}{t} ds = 0$	
Donji pojas	$-\frac{b}{2} \leq s_\alpha \leq \frac{b}{2}$	$\int_0^{s_\alpha} \frac{S_\omega^*}{t} ds = \frac{h}{4} s_\alpha \left(\frac{b^2}{4} - \frac{s_\alpha^2}{3} \right)$	

Raspodjela $\int_0^{s_\alpha} \frac{S_\omega^*}{t} ds$

Slika B.3. I profil s dvije osi simetrije, raspodjele: a) $\int_0^{s_z} S_y^*/t ds$; b) $\int_0^{s_\alpha} S_\omega^*/t ds$ [17].

Unutarnji pojas	$0 \leq s_y \leq \frac{b}{2}$	$\int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds = \frac{h}{4} s_y (b - s_y) + \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$
	$0 \geq s_y \geq -\frac{b}{2}$	$\int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds = -\frac{h}{4} s_y (b + s_y) + \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$
Struk	$-\frac{h}{2} \leq s_y \leq \frac{h}{2}$	$\int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds = \frac{s_y}{t_0} \left[\frac{hA_1}{2} + \frac{t_0}{24} (3h^2 - 4s_y^2) \right]$
	$0 \leq s_y \leq \frac{b}{2}$	$\int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds = -\frac{h}{4} s_y (b - s_y) - \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$
Vanjski pojas	$0 \geq s_y \geq -\frac{b}{2}$	$\int_0^{s_y} \frac{S_z^*}{t} ds = \frac{h}{4} s_y (b + s_y) - \frac{h^2(6A_1 + A_0)}{24t_0}$

a)



b)

Slika B.4. Raspodjela $\int_0^{s_y} S_z^*/t ds$ kod H profila s dvije osi simetrije: a) izrazi;

b) grafički prikaz [17].

PRILOG C

Temeljne jednadžbe Vlasovljevog modela uslijed djelovanja opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti slijede iz izraza (2.10), (2.37) i (2.41) te glase

$$\begin{aligned}
 & EI_y \left(\frac{\alpha_{P,VL}''}{R} - w_{P,VL}'''' \right) + \frac{GI_t}{R} \left(\alpha_{P,VL}'' + \frac{w_{P,VL}''}{R} \right) - \\
 & \quad - \frac{EI_\omega}{R} \left(\alpha_{P,VL}'''' + \frac{w_{P,VL}''''}{R} \right) + q_z = 0 \\
 & - \frac{EI_y}{R} \left(\frac{\alpha_{P,VL}}{R} - w_{P,VL}'' \right) + GI_t \left(\alpha_{P,VL}'' + \frac{w_{P,VL}''}{R} \right) - \\
 & \quad - EI_\omega \left(\alpha_{P,VL}'''' + \frac{w_{P,VL}''''}{R} \right) + m_p = 0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

a čije rješenje u zatvorenom obliku glasi [38]

$$\begin{aligned}
 w_{P,VL}(x) &= C_1 + C_2\phi + D_3[C_3 \cosh(D_1\phi) + C_4 \sinh(D_1\phi)] + \\
 & + (C_5 + C_6 D_2\phi) \cos \phi + (C_7 + C_8 D_2\phi) \sin \phi + R D_5 - q_z \frac{R^4 n^2 \phi^2}{EI_y k^2 2} \\
 \alpha_{VL}(x) &= D_4[C_3 \cosh(D_1\phi) + C_4 \sinh(D_1\phi)] - \frac{1}{R}(C_8 R^2 + C_5 + C_6 D_2\phi) \cos \phi \\
 & + \frac{1}{R}(C_6 R^2 - C_7 - C_8 D_2\phi) \sin \phi - D_5
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

gdje su $k^2 = R^2 GI_t / (EI_\omega)$ i $n^2 = R^2 I_y / I_\omega$ savojno – torzijske konstante i gdje su

$$\begin{aligned}
 D_1 &= k \\
 D_2 &= -\frac{R^2 k^2 + n^2 + 1}{2 n^2 + 1} \\
 D_3 &= -\frac{R^2}{k(k^2 + 1)} \\
 D_4 &= -\frac{Rk}{k^2 + 1} \\
 D_5 &= \frac{R^2}{EI_y} \left(q_z R \frac{k^2 + n^2}{k^2} - m_x \right).
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

C_1, \dots, C_8 su konstante integracije koje je također potrebno odrediti iz rubnih uvjeta, izraz (2.75), i glase [38]

$$\begin{aligned}
C_1 &= w_{C0} + R\alpha_0 + \frac{R}{GI_t} \left(M_{y0}R + B_0 - m_x R^2 - q_z R^3 \frac{1-k^2}{k^2} \right) \\
C_2 &= \frac{R^3}{GI_t} Q_{z0} \\
C_3 &= \frac{R}{EI_\omega} \frac{1}{k(k^2+1)} \left[(k^2+1)B_0 + M_{y0}R - \frac{q_z R^3}{k^2} - m_x R^2 \right] \\
C_4 &= \vartheta_0 + \frac{R^2}{EI_\omega} \frac{1}{1+k^2} \left(\frac{1}{k^2} Q_{z0}R + M_{x0} \right) \\
C_5 &= -R\alpha_0 - \frac{R^3}{EI_\omega} \left(\frac{k^2+2}{(k^2+1)^2} M_{y0}R + \frac{B_0}{k^2+1} \right) + \\
&+ \frac{R^3}{EI_y} \left[m_x \left(1 + \frac{n^2(2k^2+3)}{(k^2+1)^2} - \frac{n^2}{k^2+1} \right) - q_z R \left(1 + \frac{n^2(k^2+2)}{(k^2+1)^2} + \frac{n^2}{k^2+1} \right) \right] \\
C_6 &= \frac{R^2}{EI_\omega} \frac{1}{k^2+1} (-Q_{z0}R + M_{x0}) \\
C_7 &= -R\beta_0 + \frac{R^2}{k^2+1} \vartheta_0 - \frac{R^2}{2EI_y} \left[\left(1 + \frac{3n^2}{k^2+1} + \frac{2n^2}{(k^2+1)^2} \right) Q_{z0}R - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 + \frac{n^2}{k^2+1} + \frac{2n^2}{(k^2+1)^2} \right) M_{x0} \right] \\
C_8 &= \frac{R^2}{EI_\omega} \frac{1}{1+k^2} (M_{y0} + q_z R^2 - m_x R).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

PRILOG D

Uvođenjem diferencijalnog operatora $D(\) = d(\)/d\tilde{x}$, izraz (2.51) prelazi u

$$EI_z \left(D^5(v_{P,VL}) + \frac{2}{R^2} D^3(v_{P,VL}) + \frac{1}{R^4} D(v_{P,VL}) \right) = D(q_y) - \frac{q_x}{R}. \quad (D.1)$$

Rješenja karakteristične jednadžbe koja slijedi iz izraza (D.1) su definirana kao

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = i/R \text{ i } \lambda_{4,5} = -i/R \quad (D.2)$$

pa rješenje pripadne homogene jednadžbe tada glasi

$$v_{P,VL,hom} = B_1 + (B_2 + \tilde{x}B_3) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + (B_4 + \tilde{x}B_5) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \quad (D.3)$$

gdje su B_1, \dots, B_5 konstante integracije. Partikularno rješenje izraza (D.1) slijedi primjenom izraza (D.3) i metode varijacije konstanti, pri čemu je usvojeno $q_x = const.$ i $q_y = const.$

Ukupno rješenje diferencijalne jednadžbe definirane izrazom (D.1) tada glasi

$$v_{P,VL} = B_1 + (B_2 + \tilde{x}B_3) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + (B_4 + \tilde{x}B_5) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) - \frac{q_x R^3}{EI_z} \tilde{x}. \quad (D.4)$$

Izraz (D.4) se može zapisati na sljedeći način

$$v_{P,VL} = B_1 + \left(B_2 + \frac{\tilde{x}}{R} B_3\right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \left(B_4 + \frac{\tilde{x}}{R} B_5\right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) - \frac{q_x R^4}{EI_z} \frac{\tilde{x}}{R}. \quad (D.5)$$

Primjenom konstanti integracije C_1, \dots, C_5 , izraz (D.5) prelazi u

$$v_{P,VL} = C_1 + \left(C_2 + \frac{\tilde{x}}{R} C_3\right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \left(C_4 + \frac{\tilde{x}}{R} C_5\right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) - \frac{q_x R^4}{EI_z} \frac{\tilde{x}}{R}. \quad (D.6)$$

Kada se uzme u obzir da vrijedi $\phi = \tilde{x}/R$, izraz (D.6) prelazi u izraz (2.52).

PRILOG E

Uz diferencijalni operator $D(\) = d(\)/d\tilde{x}$, izraz (2.46) prelazi u

$$\begin{aligned} m_p + (A_1 D^4 + A_2 1)\alpha_{P,VL} + (A_3 D^4 + A_4 D^2)w_{P,VL} &= 0 \\ q_z + (A_5 D^4 + A_6 D^2)\alpha_{P,VL} + (A_7 + A_8)D^4 w_{P,VL} &= 0 \end{aligned} \quad (E.1)$$

uz $q_z = const.$ i $m_p = const.$, a gdje su A_1, \dots, A_8 konstante definirane kao

$$\begin{aligned} A_1 &= -EI_\omega, & A_2 &= -EI_y/R^2, & A_3 &= -EI_\omega/R, & A_4 &= EI_y/R \\ A_5 &= -EI_\omega/R, & A_6 &= EI_y/R, & A_7 &= -EI_y, & A_8 &= -EI_\omega/R^2. \end{aligned} \quad (E.2)$$

Nehomogena diferencijalna jednadžba osmog reda s konstantnim koeficijentima, koja je funkcija samo varijable $w_{P,VL}$, slijedi eliminiranjem varijable $\alpha_{P,VL}$ u izrazu (E.2) te glasi

$$\left[D^8 + \frac{2D^6}{R^2} + \frac{D^4}{R^4} \right] w_{P,VL} = \frac{1}{EI_\omega R^2} q_z. \quad (E.3)$$

Kako su rješenja karakteristične jednadžbe koja slijedi iz izraza (E.3) definirana kao

$$\lambda_{1,2,3,4} = 0, \lambda_{5,6} = i/R \text{ i } \lambda_{7,8} = -i/R \quad (E.4)$$

pripadno rješenje homogene jednadžbe glasi

$$\begin{aligned} w_{P,VL,hom} &= B_1 + B_2 \tilde{x} + B_3 \tilde{x}^2 + B_4 \tilde{x}^3 + (B_5 + \tilde{x}B_6) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \\ &+ (B_7 + \tilde{x}B_8) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \end{aligned} \quad (E.5)$$

gdje su B_1, \dots, B_8 konstante integracije. Partikularno rješenje slijedi primjenom metode varijacije konstanti, a ukupno rješenje diferencijalne jednadžbe definirane izrazom (E.3) tada glasi

$$\begin{aligned} w_{P,VL} &= B_1 + B_2 \tilde{x} + B_3 \tilde{x}^2 + B_4 \tilde{x}^3 + (B_5 + \tilde{x}B_6) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + (B_7 + \tilde{x}B_8) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \\ &+ \frac{R^2 q_z}{EI_\omega} \left(3R^4 - R^2 \tilde{x}^2 + \frac{\tilde{x}^4}{24} \right). \end{aligned} \quad (E.6)$$

Sličnim postupkom, to jest eliminiranjem varijable $w_{P,VL}$ u izrazu (E.1) slijedi homogena diferencijalna jednadžba osmog reda s konstantnim koeficijentima

$$\left[D^8 + \frac{2D^6}{R^2} + \frac{D^4}{R^4} \right] \alpha_{P,VL} = 0. \quad (E.7)$$

Rješenja karakteristične jednadžbe koja slijedi iz izraza (E.7) jednaka su rješenjima koja se nalaze u izrazu (E.4), a tada rješenje diferencijalne jednadžbe definirane izrazom (E.7) glasi

$$\alpha_{p,VL} = B_9 + B_{10}\tilde{x} + B_{11}\tilde{x}^2 + B_{12}\tilde{x}^3 + (B_{13} + \tilde{x}B_{14}) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + (B_{15} + \tilde{x}B_{16}) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \quad (\text{E.8})$$

gdje su B_9, \dots, B_{16} konstante integracije.

Kada se konstante B_1, \dots, B_8 proglaše linearno nezavisnim varijablama, uvrštavanjem izraza (E.6) i (E.8) u izraz (E.1) te izjednačavanjem vodećih članova slijedi odnos

$$\begin{aligned} B_9 &= -\frac{R^3 q_z (2I_y R^2 + I_\omega)}{EI_\omega I_y} + \frac{m_p R^2}{EI_y} + 2B_3 R \\ B_{10} &= 6B_4 R \\ B_{11} &= \frac{R^3 q_z}{2EI_\omega} \\ B_{12} &= 0 \\ B_{13} &= \frac{2B_8 I_y R^2}{I_y R^2 + I_\omega} - \frac{B_5}{R} \\ B_{14} &= -B_6/R \\ B_{15} &= -B_8/R \\ B_{16} &= -\frac{2B_6 I_y R^2}{I_y R^2 + I_\omega} - \frac{B_7}{R}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Konačno rješenje varijable $\alpha_{p,VL}$ slijedi primjenom izraza (E.8) i (E.9) te glasi

$$\begin{aligned} \alpha_{p,VL} &= 2B_3 R + 6B_4 R \tilde{x} + \left(\frac{2B_8 I_y R^2}{I_y R^2 + I_\omega} - \frac{B_5}{R} - B_6 \frac{\tilde{x}}{R} \right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \\ &- \left(\frac{B_7}{R} + \frac{2B_6 I_y R^2}{I_y R^2 + I_\omega} + B_8 \frac{\tilde{x}}{R} \right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \frac{R^2 m_p}{EI_y} - \\ &- \frac{R^3 q_z (2I_y R^2 + I_\omega)}{EI_\omega I_y} + \frac{R^3 q_z \tilde{x}^2}{2EI_\omega}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Izrazi (E.6) i (E.10) se mogu zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} w_{p,VL} &= B_1 + B_2 R \frac{\tilde{x}}{R} + B_3 R^2 \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^2 + B_4 R^3 \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^3 + \left(B_5 + \frac{\tilde{x}}{R} R B_6\right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \\ &+ \left(B_7 + \frac{\tilde{x}}{R} R B_8\right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \frac{R^6 q_z}{EI_\omega} \left(3 - \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^4\right) \\ \alpha_{VL}(x) &= 2B_3 R + 6B_4 R^2 \frac{\tilde{x}}{R} + \left(\frac{2B_8 I_y R^2}{I_y R^2 + I_\omega} - \frac{B_5}{R} - B_6 \frac{\tilde{x}}{R} \right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \\ &+ \left(\frac{B_7}{R} + \frac{2B_6 I_y R^2}{I_y R^2 + I_\omega} + B_8 \frac{\tilde{x}}{R} \right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \frac{R^2 m_p}{EI_y} - \\ &- q_z \frac{R^3}{EI_\omega} \left[\frac{I_\omega}{I_y} + R^2 \left(2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Primjenom konstanti integracije C_1, \dots, C_8 , izraz (E.11) se može zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned}
 w_{P,VL} &= C_1 + C_2 \frac{\tilde{x}}{R} + C_3 \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^2 + C_4 \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^3 + \left(C_5 + \frac{\tilde{x}}{R} C_6\right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \left(C_7 + \frac{\tilde{x}}{R} C_8\right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \\
 &\quad + \frac{R^6 q_z}{EI_\omega} \left(3 - \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^4\right) \\
 \alpha_{VL}(x) &= 2 \frac{C_3}{R} + 6 \frac{C_4 \tilde{x}}{R R} + \left(\frac{2C_8 I_y R}{I_y R^2 + I_\omega} - \frac{C_5}{R} - \frac{C_6 \tilde{x}}{R R}\right) \cos\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) \\
 &\quad - \left(\frac{2C_6 I_y R}{I_y R^2 + I_\omega} + \frac{C_7}{R} + \frac{C_8 \tilde{x}}{R R}\right) \sin\left(\frac{\tilde{x}}{R}\right) + \frac{R^2 m_p}{EI_y} - \\
 &\quad - q_z \frac{R^3}{EI_\omega} \left[\frac{I_\omega}{I_y} + R^2 \left(2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{x}}{R}\right)^2\right)\right].
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

Izraz (E.12) prelazi u izraz (2.70) kada se uzme u obzir da vrijedi $\phi = \tilde{x}/R$.

Životopis

Dražen Kustura

Dražen Kustura je rođen 01.12.1991.g. u Zenici, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu Fra Pavao Vučković i srednju školu, Dinko Šimunović, je pohađao i završio u Sinju. Akademske godine 2012./2013. upisuje studij strojarstva na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu. U rujnu 2015. godine stječe zvanje sveučilišni prvostupnik inženjer strojarstva, a iste godine upisuje diplomski studij strojarstva. U srpnju 2017. godine stječe zvanje magistar inženjer strojarstva. Poslijediplomski doktorski studij strojarstva na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, pod mentorstvom prof. dr. sc. Frane Vlaka, upisuje u listopadu 2017.g. Iste godine zapošljava se na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu, kao asistent na Odjelu za politehniku. U nastavnim aktivnostima izvodi vježbe iz kolegija: Tehnička mehanika, Uvod u politehniku, Grafičko komuniciranje i dizajn II te Trodimenzionalno projektiranje fizičkih objekata.

Njegova područja znanstvenog istraživanja su mehanika krutih i deformabilnih tijela, s naglaskom na ravne i zakrivljene tankostijene štapove otvorenog poprečnog presjeka, te dinamička čvrstoća zavarenih konstrukcija. Znanstveno – istraživački rad rezultirao je objavom dva rada u znanstvenim časopisima, dva znanstvena rada i jednog stručnog rada u zbornicima skupova s međunarodnom recenzijom te jednog znanstvenog rada u zbornicima skupova s domaćom recenzijom. Aktivno se služi s engleskim jezikom, a upoznat je s nizom programa za grafičko modeliranje i numeričko simuliranje. Od 2023. g. je član Hrvatskog društva za mehaniku.

Curriculum Vitae

Dražen Kustura

Dražen Kustura was born on December 1st, 1991. in Zenica, Bosnia and Herzegovina. He attended and graduated from elementary school, Fra Pavao Vučković, and secondary school, Dinko Šimunović, in Sinj. In the academic year 2012./2013., he enrolled in the undergraduate studies of Mechanical Engineering at the Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture in Split. In September 2015, he obtained the degree of Bachelor of Science in Mechanical Engineering and in the same year he enrolled for graduate studies in Mechanical Engineering. In July 2017, he obtained the degree of Master of Mechanical Engineering.

In October 2017, he enrolled for postgraduate doctoral studies in Mechanical Engineering at the Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture in Split under the mentorship of Professor Frane Vlak, PhD. In the same year he was employed at the Faculty of Science in Split as an assistant in the Department of Polytechnics. He participated in teaching the courses: Technical Mechanics, Introduction to Polytechnics, Graphic Communication and Design II and Three-dimensional Design of Physical Objects.

His scientific research areas are the mechanics of rigid and deformable bodies, with emphasis on straight and curved thin-walled beams with open cross-sections, and the dynamic strength of welded structures. The research work resulted in the publication of two papers in scientific journals, two scientific papers and one professional paper in conference proceedings with international peer-review and one scientific paper in conference proceedings with domestic peer-review. He actively uses the English language and is familiar with a range of graphical modelling and numerical simulation software. He is a member of the Croatian Society of Mechanics since 2023.