



SVEUČILIŠTE U SPLITU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = -\nabla \cdot \vec{J}_s = g_{\text{st}}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Slavko Vujević

TEORIJSKA ELEKTROTEHNIKA



SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I
BRODOGRADNJE



Prof. dr. sc. Slavko Vujević

TEORIJSKA ELEKTROTEHNIKA

Split, lipanj 2024.



Nakladnik
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Urednik
Doc. dr. sc. Ivo Marinić-Kragić

Autor
Prof. dr. sc. Slavko Vujević

Recenzent
Prof. dr. sc. Rino Lucić

Crteži i tehnička obrada
Prof. dr. sc. Slavko Vujević

ISBN 978-953-290-137-5



Ovo je djelo licencirano pod međunarodnom licencom CC BY-NC-ND 4.0 koja dopušta preuzimanje djela i dijeljenje s drugima, pod uvjetom da se navedu autori, te da se djelo ne smije mijenjati ili koristiti u komercijalne svrhe.

Autori i nakladnik ove knjige uložili su sve napore u njenoj pripremi sa željom da prenesu točne i mjerodavne informacije vezane s temom knjige. Autori i izdavač ni u kojem slučaju ne odgovaraju za slučajne ili posljedične štete povezane s izvedbom ili primjenom postupaka koji se u knjizi opisuju.

Udžbenik posvećujem svojoj obitelji:

Edi, Andriji, Petru i Anđeli

Zahvaljujem se
recenzentu prof. dr. sc. Rinu Luciću na
svekolikoj podršci i razumijevanju te na
detaljnem čitanju rukopisa knjige i korisnim
primjedbama. Također se zahvaljujem prof.
dr. sc. Seadu Berberoviću i izv. prof. dr. sc.
Mati Dabri na detaljnem čitanju rukopisa
knjige i korisnim primjedbama.

PREDGOVOR

Ovaj je fakultetski udžbenik rezultat mog četrdesetogodišnjeg bavljenja elektromagnetskom teorijom i numeričkim modeliranjem elektromagnetskih pojava. Prvenstveno je namijenjen studentima elektrotehnike, smjera elektroenergetike i u cijelosti pokriva gradivo iz današnjeg kolegija Teorijska elektrotehnika, koji se prethodno izvodio pod imenima: Teorija elektromagnetskih polja i krugova i Teoretska elektrotehnika. Danas bi prikladnije ime ovog kolegija bilo npr. Elektromagnetizam.

Predavanja iz Teorijske elektrotehnike preuzeo sam od svog uvaženog mentora prof. dr. sc. Mate Kurtovića pa je logično da su mi glavno polazište za koncipiranje sadržaja kolegija i samog udžbenika bila njegova predavanja. Od velike koristi su mi bili i udžbenici iz elektromagnetizma čiji su autori bili ugledni sveučilišni profesori: Zijad Haznadar, Željko Štih, Tomo Bosanac, Jovan Surutka i Dragutin M. Veličković. Od zbirki zadataka istakao bih zbirku prof. dr. sc. Seada Berberovića.

Važno je istaknuti po čemu se ovaj udžbenik razlikuje od ostalih udžbenika iz elektromagnetizma. Posebno bih istakao da sam na izvoran način definirao Maxwellove jednadžbe u vodljivom sredstvu unutar kojeg se nalaze izvori elektromagnetskog polja, što nije na zadovoljavajući način definirano u postojećoj literaturi. Osim toga, sustavno sam razvrstao elektromagnetska polja s obzirom na brzinu njihove vremenske promjene.

Ističem i to da sam, za razliku od postojeće literature iz elektromagnetizma, izabrao da je modul fazora efektivna vrijednost pripadne sinusoidalne veličine jer se na taj način modul fazora definira u osnovama elektrotehnike, električnim mrežama i drugim kolegijima.

Split, lipanj 2024.

Autor

SADRŽAJ

1. OSNOVNI POJMOVI VEKTORSKE ANALIZE	1
1.1. Koordinatni sustavi	1
1.2. Diferencijalni vektorski element duž orijentirane 3D krivulje	2
1.3. Diferencijalni vektorski element orijentirane 3D plohe	3
1.4. Diferencijal volumena	4
1.5. Hamiltonov operator	4
1.6. Gradijent skalarnog polja	5
1.7. Usmjeren derivacija skalarnog polja	5
1.8. Usmjeren derivacija vektorskog polja	6
1.9. Divergencija vektorskog polja	6
1.10. Rotacija ili rotor vektorskog polja.....	7
1.11. Laplasijan skalarnog polja i laplasijan vektorskog polja	8
1.12. Vrste vektorskih polja	9
1.13. Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem	9
1.14. Stokesov integralni teorem	9
1.15. Zadaci	10
2. OSNOVNE ELEKTROMAGNETSKE VELIČINE	12
3. JEDNADŽBE GRAĐE.....	13
4. SASTAVNICE UKUPNE PLOŠNE GUSTOĆE ELEKTRIČNE STRUJE	15
5. FAZORSKA TRANSFORMACIJA SINUSOIDALNIH VELIČINA	17
6. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U VREMENSKOM PODRUČJU	20
6.1. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku.....	20
6.2. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku.....	22
6.3. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu	23
6.4. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu	24
6.5. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom dobrom vodiču	25
6.6. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču	26
6.7. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku	26
6.8. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku	28
6.9. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu	28
6.10. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu.....	29
6.11. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom dobrom vodiču	30
6.12. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču	30
7. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U FAZORSKOM PODRUČJU	31
7.1. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu	31
7.2. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom dobrom vodiču	31
7.3. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu	32
7.4. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču	33
7.5. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku	33
7.6. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku	34
7.7. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu	34

7.8. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom dobrom vodiču	35
7.9. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu.....	35
7.10. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču.....	36
7.11. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku	36
7.12. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku	36
8. LORENTZOVA SILA	38
9. ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI.....	39
9.1. Elektromagnetski potencijali u mirujućem savršenom dielektriku	39
9.2. Elektromagnetski potencijali u mirujućem vodljivom sredstvu	41
10. VALNE JEDNADŽBE POLJA U LIH SREDSTVU BEZ IZVORA	43
11. UVJETI NA GRANICI DVAJU MIRUJUĆIH SREDSTAVA.....	44
11.1. Uvjeti na granici dvaju vodljivih sredstava	45
11.2. Uvjeti na granici vodljivog sredstva i savršenog dielektrika	45
11.3. Uvjeti na granici dvaju savršenih dielektrika	46
11.4. Uvjeti na granici supravodiča i savršenog dielektrika.....	46
11.5. Uvjeti na granici dvaju sredstava u fazorskom području	47
12. ELEKTROMAGNETSKA ENERGIJA I POYNTINGOV TEOREM	48
12.1. Energija pohranjena u elektromagnetskom polju.....	48
12.2. Poyntingov teorem u vremenskom području.....	50
12.3. Kompleksni Poyntingov teorem	52
12.4. Kompleksna prividna snaga u sinusoidalnim strujnim krugovima	54
12.5. Prijenos elektromagnetske energije od izvora do trošila	56
12.6. Punjenje i pražnjenje pločastog električnog kondenzatora.....	57
13. RAZVRSTAVANJE ELEKTROMAGNETSKIH POLJA S OBZIROM NA BRZINU VREMENSKE PROMJENE.....	58
14. ELEKTROSTATIČKO POLJE	59
14.1. Skalarni električni potencijal točkastog električnog naboja	60
14.2. Opća integralna jednađba skalarnog električnog potencijala	61
14.3. Vodič u elektrostatičkom polju	61
14.4. Coulombov zakon	61
14.5. Jakost električnog polja	62
14.6. Izračun jakosti električnog polja pomoću Gaussovog zakona	64
14.6.1. Jakost električnog polja osamljenog točkastog električnog naboja	64
14.6.2. Jakost električnog polja osamljene vodljive kugle	65
14.6.3. Jakost električnog polja beskonačno dugog pravocrtnog vodiča.....	65
14.6.4. Jakost električnog polja beskonačno dugog pravocrtnog vodljivog cilindra	66
14.6.5. Jakost električnog polja naelektrizirane ravnine.....	67
14.7. Električni napon i skalarni električni potencijal	69
14.7.1. Skalarni električni potencijal osamljenog točkastog električnog naboja.....	69
14.7.2. Skalarni električni potencijal osamljene vodljive kugle	70
14.7.3. Skalarni električni potencijal beskonačno dugog pravocrtnog vodiča	70
14.7.4. Skalarni električni potencijal beskonačno dugog vodljivog cilindra	70
14.7.5. Skalarni električni potencijal naelektrizirane ravnine	71

14.8. Kapacitet vodljivog tijela	71
14.9. Kapacitet električnog kondenzatora	72
14.9.1. Kapacitet pločastog električnog kondenzatora	72
14.9.2. Kapacitet cilindričnog električnog kondenzatora	73
14.9.3. Kapacitet kuglastog električnog kondenzatora	74
14.9.4. Izračun kapaciteta električnog kondenzatora iz pohranjene energije	75
14.9.5. Energija izoliranog sustava dvaju električnih kondenzatora	76
14.10. Skalarni električni potencijal i polje električnog dipola	76
14.11. Energija pohranjena u elektrostatičkom polju	78
14.12. Sila u elektrostatičkom polju izoliranog sustava	79
14.12.1. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz energije	79
14.12.2. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz kapaciteta	80
14.12.3. Sila na oblogu cilindričnog i kuglastog električnog kondenzatora	80
14.13. Sila u elektrostatičkom polju neizoliranog sustava	80
14.13.1. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz energije	80
14.13.2. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz kapaciteta	81
14.14. Sile i naprezanja u elektrostatičkom polju	81
14.15. Odslikavanje električnog naboja na granici dvaju dielektrika	82
14.16. Razgradnja električnog naboja u nesavršenom dielektriku	85
14.17. Partikularna i opća rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe	86
14.17.1. Rješenja Laplaceove jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu	86
14.17.2. Rješenja Laplaceove jednadžbe u cilindričnom koordinatnom sustavu	88
14.17.3. Rješenja Laplaceove jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu	91
14.18. Dielektrična kugla u homogenom električnom polju	93
14.19. Vodljiva kugla u homogenom električnom polju	98
14.20. Dva beskonačno duga pravocrtna vodiča	100
14.21. Kapacitet ekscentričnih vodljivih cilindara	103
14.22. Kapacitet voda kojemu su vodiči različitog polumjera	104
14.23. Kapacitet cilindričnog vodiča ispred vodljive ravnine	106
14.24. Tankožičani vodiči i metoda srednjeg potencijala	107
14.25. Parcijalni kapaciteti	112
14.25.1. Parcijalni kapaciteti dvožičnog električnog voda	114
14.25.2. Parcijalni kapaciteti međusobno paralelnih odsječaka vodiča	116
14.26. Sila na granici dvaju dielektrika i sila na električni naboj	118
14.27. Zadaci	121
15. STACIONARNO STRUJNO POLJE	169
15.1. Nepokretni naboj na granici dvaju sredstava	170
15.2. Maxwelllove jednadžbe stacionarnog strujnog polja	171
15.3. Analogija između statičkih polja	171
15.4. Točkasti izvor vremenski konstantne električne struje	173
15.5. Otpor uzemljenja vodljive kugle u neograničenom LIH tlu	173
15.6. Odslikavanje vremenski konstantne električne struje	174
15.7. Otpor uzemljenja kugle na površini tla i raspodjela potencijala u zraku	176
15.8. Otpor uzemljenja kugle ukopane u tlo i raspodjela potencijala u zraku	179

15.9. Cilindrični vodič u homogenom stacionarnom strujnom polju	182
15.10. Cilindrični dielektrik u homogenom stacionarnom strujnom polju.....	186
15.11. Supravodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju	187
15.12. Vodljiva kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju	189
15.13. Dielektrična kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju.....	191
15.14. Supravodljiva kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju	192
15.15. Tankožičani vodič u vodljivom sredstvu i metoda srednjeg potencijala	194
15.16. Otpor uzemljenja vodoravnog odsječaka vodiča u LIH tlu	196
15.17. Otpor uzemljenja dvaju paralelnih odsječaka vodiča u LIH tlu	197
15.18. Otpor između dvaju paralelnih odsječaka vodiča u LIH tlu	199
15.19. Otpor uzemljenja okomitog odsječaka vodiča u LIH tlu.....	200
15.20. Numeričko modeliranje ekvipotencijalnih mrežastih uzemljivača.....	201
15.21. Ekvivalentni polumjer pravokutnog vodiča	203
15.22. Kružna vodljiva ploča u neograničenom tlu	203
15.23. Kružna vodljiva ploča na površini tla	207
15.24. Zadaci	209
16. MAGNETOSTATIČKO POLJE.....	227
16.1. Maxwellove jednačbe magnetostatičkog polja	227
16.2. Magnetska svojstva sredstva	228
16.3. Prirodni magnet i elektromagnet.....	229
16.4. Feromagnetizam	231
16.5. Magnetska histereza	232
16.6. Magnetostatičko polje u bestrujnom području.....	233
16.7. Biot-Savartov zakon	235
16.8. Magnetsko polje tankožičanog vodiča	236
16.8.1. Jakost magnetskog polja pravocrtnog tankožičanog vodiča	236
16.8.2. Jakost magnetskog polja duž osi kružne tankožičane petlje.....	238
16.9. Odslikavanje odsječaka tankožičanog vodiča	240
16.9.1. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča paralelan graničnoj ravnini.....	240
16.9.2. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča okomit na graničnu ravninu	242
16.9.3. Odslikavanje tankožičanog vodiča proizvoljnog oblika	244
16.10. Energija pohranjena u magnetostatičkom polju	246
16.10.1. Izračun induktiviteta iz energije pohranjene u magnetostatičkom polju.....	246
16.10.2. Induktiviteti i međuinduktiviteti sustava tankožičanih petlji	247
16.11. Magnetski dipol.....	247
16.12. Cilindrično sredstvo u homogenom magnetostatičkom polju	251
16.13. Kugla u homogenom magnetostatičkom polju	254
16.14. Magnetska sila na tankožičani vodič	257
16.15. Magnetska sila između dva beskonačno duga međusobno paralelna vodiča	257
16.16. Sila u magnetostatičkom polju izoliranog sustava	259
16.17. Sila u magnetostatičkom polju neizoliranog sustava	259
16.18. Sile i naprezanja u magnetostatičkom polju.....	260
16.19. Vektorski magnetski potencijal odsječaka tankožičanog vodiča	261
16.20. Neumannova formula	262

16.21. Induktiviteti odsječaka tankožičanih cilindričnih vodiča.....	264
16.22. Veza između magnetskih silnica i vektorskog magnetskog potencijala	267
16.23. Zadaci	269
17. VREMENSKI PROMJENJIVO ELEKTROMAGNETSKO POLJE.....	299
17.1. Maxwellove diferencijalne jednačbe u pokretnom sredstvu.....	299
17.2. Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem sredstvu.....	301
17.3. Maxwellove integralne jednačbe u pokretnom sredstvu	302
17.4. Maxwellove integralne jednačbe u mirujućem sredstvu	304
17.5. Sastavnice jakosti električnog polja i napon između dviju točaka	305
17.6. Lorenzovi potencijali u mirujućem LIH sredstvu	308
17.7. Darwinovo elektromagnetsko polje u savršenom dielektriku	311
17.8. Magnetodinamičko elektromagnetsko polje u vodljivom sredstvu.....	312
17.9. Kvazistatičko elektromagnetsko polje.....	313
17.10. Magnetokvazistatičko elektromagnetsko polje u savršenom dielektriku.....	314
17.11. Elektrokvazistatičko elektromagnetsko polje u mirujućem sredstvu.....	316
17.12. Potpunokvazistatičko elektromagnetsko polje u mirujućem sredstvu	318
17.13. Usporedba aproksimacija elektromagnetskih polja	319
17.14. Partikularna rješenja Helmholtzovih diferencijalnih jednačbi	320
17.15. Fazna brzina elektromagnetskog vala	322
17.16. Fourierova transformacija i inverzna Fourierova transformacija	323
17.17. Retardirani potencijali u neograničenom savršenom LIH dielektriku	324
17.18. Lorenzovi potencijali tankožičanog vodiča u vodljivom LIH sredstvu	326
17.19. Elektrokvazistatičko i potpunokvazistatičko sinusoidalno strujno polje.....	327
17.20. Helmholtzove jednačbe polja u mirujućem LIH sredstvu bez izvora	328
17.21. Dubina prodiranja elektromagnetskog vala.....	329
17.22. Impedancija vodiča i unutarnja impedancija vodiča.....	330
17.23. Unutarnja impedancija višeslojnog cilindričnog vodiča	332
17.24. Unutarnja impedancija jednoslojnog punog cilindričnog LIH vodiča	336
17.25. Unutarnja impedancija jednoslojnog šupljeg cilindričnog LIH vodiča.....	337
17.26. Zadaci	341
18. TEORIJA ELEKTRIČNIH MREŽA I NJENA OGRANIČENJA.....	351
19. RAVNI ELEKTROMAGNETSKI VAL	354
19.1. Linearno polarizirani ravni val u vodljivom LIH sredstvu.....	354
19.2. Linearno polarizirani ravni val u dobrom LIH vodiču	357
19.3. Linearno polarizirani ravni val u savršenom LIH dielektriku.....	358
19.4. Zadaci	359
20. SINUSOIDALNI RAVNI VAL NA GRANICI DVAJU SREDSTAVA.....	391
20.1. Snellovi zakoni	391
20.2. Fresnelove jednačbe	394
20.3. Vektor jakosti električnog polja okomit na upadnu ravninu.....	394
20.4. Vektor jakosti električnog polja leži u upadnoj ravnini	396
20.5. Okomiti upad sinusoidalnog ravnog vala	398
20.6. Upad ravnog vala na granicu savršenog dielektrika i dobrog vodiča.....	399
20.7. Zadaci	400

21. ELEKTROENERGETSKI PRIJENOSNI VODOVI	402
21.1. Jednadžbe dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda	402
21.2. Dvožični elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka.....	408
21.3. Električni napon i električna struja duž dvožičnog prijenosnog voda.....	409
21.4. Izražavanje električnih struja u rubnim točkama prijenosnog voda preko električnih napona	411
21.5. TKE – sustav jednadžbi dionice dvožičnog prijenosnog voda	412
21.6. Opterećeni dvožični prijenosni vod	413
21.7. Mjerenje valne impedancije dvožičnog prijenosnog voda	414
21.8. Val na granici dvaju prijenosnih vodova bez gubitaka	415
21.9. Petersenovo pravilo.....	416
21.10. Koncentrirani otpor između dva dvožična prijenosna voda bez gubitaka	417
21.11. Grananje dvožičnih prijenosnih vodova bez gubitaka	418
21.12. Serijsko povezivanje dionica dvožičnog prijenosnog voda.....	419
21.13. Zadaci	421
LITERATURA.....	429

1. OSNOVNI POJMOVI VEKTORSKE ANALIZE

Vektorska algebra jest grana matematike koja omogućuje algebarski prikaz vektora u trodimenzionalnom (3D) prostoru i izvođenje algebarskih operacija nad vektorima, dok se *vektorska analiza* bavi diferenciranjem i integriranjem vektorskih i skalarnih polja. Linearna algebra je grana matematike koja se bavi proučavanjem vektora, vektorskih prostora, matrica, linearnih transformacija, linearnih operatora i sustava linearnih jednadžbi.

Skalar je veličina određena brojčanim iznosom. *Skalarna funkcija* jedne ili više varijabli jest funkcija koja uređenim n -torkama brojeva pridružuje brojeve. U užem smislu skalari su realni brojevi, ali se i kompleksni brojevi nazivaju skalarima, odnosno kompleksnim skalarima. Sukladno tome, *kompleksna skalarna funkcija* jedne ili više varijabli jest funkcija koja uređenim n -torkama brojeva pridružuje kompleksne brojeve.

Neka je *vektor* usmjerena dužina određena *duljinom* (*modulom*, *iznosom*) i *smjerom**. Vektor se često, iz praktičnih razloga, opisuje pomoću zbroya umnožaka skalarnih komponenti i pripadnih jediničnih vektora odabranog koordinatnog sustava. Skalarni komponente vektora mogu biti realni ili kompleksni brojevi. Vektorska funkcija jest funkcija koja realnim brojevima pridružuje vektore.

Skalarno polje jest skalarna funkcija koja svakoj točki prostora pridružuje realni ili kompleksni broj. *Vektorsko polje* jest vektorska funkcija koja svakoj točki prostora pridružuje vektor, a komponente tog vektora mogu biti realni ili kompleksni brojevi.

1.1. Koordinatni sustavi

Osnovni koordinatni sustavi su trodimenzionalni (3D) koordinatni sustavi, dok su dvodimenzionalni (2D) i jednodimenzionalni (1D) koordinatni sustavi podskupovi pripadnih 3D koordinatnih sustava. Stoga je dovoljno ukratko opisati, u udžbeniku korištene, 3D koordinatne sustave.

3D koordinatni sustavi mogu se podijeliti na:

- ortogonalne pravocrtne,
- ortogonalne krivocrtne,
- neortogonalne pravocrtne,
- neortogonalne krivocrtne.

3D ortogonalni koordinatni sustavi su oni koordinatni sustavi kojima su pripadni jedinični vektori u svakoj točki prostora ortogonalni, odnosno međusobno okomiti.

U ovom se udžbeniku koriste samo sljedeća tri 3D ortogonalna koordinatna sustava:

- pravokutni (Kartezijev; Descartesov) koordinatni sustav (x, y, z) ,
- cilindrični (kružni cilindrični) koordinatni sustav (r, φ, z) ili (r, ϕ, z) ,
- sferni koordinatni sustav (r, ϑ, φ) ili (r, ϑ, ϕ) .

U cilindričnom koordinatnom sustavu r je najkraća udaljenost promatrane točke od osi z , dok je u sfernom koordinatnom sustavu r udaljenost promatrane točke od ishodišta koordinatnog sustava. Polarni koordinatni sustav (r, φ) ili (r, ϕ) je 2D koordinatni sustav i on je podskup cilindričnog koordinatnog sustava (r, φ, z) ili (r, ϕ, z) .

* U hrvatskom jeziku postoji mnoštvo međusobno kontradiktornih definicija vektora. Po danas najčešće korištenoj matematičarskoj definiciji, vektor je određen *duljinom* (modulom, iznosom), *smjerom* (pravcem nositeljem) i *orijentacijom* (usmjerenjem), što znači da po toj definiciji vektori imaju isti smjer ako su im pravci nositelji kolinearni. Međutim, ova matematičarska definicija uzrokuje terminološku zbrku, pa se u fizici i tehnici koristi praktična definicija po kojoj je vektor određen *duljinom* i *smjerom*, gdje pojam smjera objedinjuje pojmove: pravac nositelj i orijentacija vektora. U ovom će se udžbeniku, koristiti ta praktična definicija, koju koristi i Encyclopaedia Britannica kao i mnogi matematički udžbenici napisani na engleskom jeziku. Literatura na engleskom jeziku, pa i ona iz područja elektromagnetizma, vektor definira iznosom (engl. *magnitude*) i smjerom (engl. *direction*).

Pravokutni koordinatni sustav je ortogonalni pravocrtni koordinatni sustav, dok su cilindrični i sferni koordinatni sustav ortogonalni krivocrtni koordinatni sustavi. Pravokutni, cilindrični i sferni koordinatni sustav su takozvani desni ortogonalni koordinatni sustavi jer vrijedi da je:

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \quad (1.1)$$

gdje su \vec{e}_1 , \vec{e}_2 i \vec{e}_3 jedinični vektori pojedinog koordinatnog sustava.

1.2. Diferencijalni vektorski element duž orijentirane 3D krivulje

Diferencijalni vektorski element duž orijentirane (usmjerene) krivulje u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) , poznat i pod imenom vektor infinitezimalnog pomaka, opisan je sljedećim izrazom:

$$d\vec{\ell} = h_1 \cdot du_1 \cdot \vec{e}_1 + h_2 \cdot du_2 \cdot \vec{e}_2 + h_3 \cdot du_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (1.2)$$

gdje za pravokutni koordinatni sustav vrijedi da je:

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (x, y, z) \quad ; \quad h_1 = h_2 = h_3 = 1 \quad (1.3)$$

dok za cilindrični koordinatni sustav vrijedi da je:

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (r, \varphi, z) \quad ; \quad h_1 = 1 \quad ; \quad h_2 = r \quad ; \quad h_3 = 1 \quad (1.4)$$

a za sferni koordinatni sustav vrijedi da je:

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi) \quad ; \quad h_1 = 1 \quad ; \quad h_2 = r \quad ; \quad h_3 = r \cdot \sin \vartheta \quad (1.5)$$

Iz izraza (1.2) - (1.5), lako se dobije da je diferencijalni vektorski element duž orijentirane 3D krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisan sljedećim izrazom:

$$d\vec{\ell} = \vec{\ell}_0 \cdot d\ell = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k} \quad (1.6)$$

dok je diferencijalni vektorski element duž orijentirane 3D krivulje u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisan izrazom:

$$d\vec{\ell} = \vec{\ell}_0 \cdot d\ell = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z \quad (1.7)$$

a diferencijalni vektorski element duž orijentirane 3D krivulje u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisan je izrazom:

$$d\vec{\ell} = \vec{\ell}_0 \cdot d\ell = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad (1.8)$$

gdje je $\vec{\ell}_0$ jedinični vektor tangente na orijentiranu 3D krivulju u promatranoj točki.

Neka parametarski zapis 3D krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) glasi:

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t) \quad (1.9)$$

te neka parametarski zapis 3D krivulje u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) glasi:

$$r = r(t) \quad ; \quad \varphi = \varphi(t) \quad ; \quad z = z(t) \quad (1.10)$$

a neka parametarski zapis 3D krivulje u sfernom koordinatnom sustavu glasi (r, ϑ, φ) :

$$r = r(t) \quad ; \quad \vartheta = \vartheta(t) \quad ; \quad \varphi = \varphi(t) \quad (1.11)$$

Ako je krivulja orijentirana u skladu s porastom parametra t , tada se kaže da je krivulja pozitivno orijentirana. U protivnom je krivulja negativno orijentirana.

Iz izraza (1.6) i (1.9), lako se dobije sljedeći izraz za diferencijal duljine luka krivulje $d\ell$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) :

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \cdot dt \quad (1.12)$$

dok se iz izraza (1.7) i (1.10), lako dobije sljedeći izraz za diferencijal duljine luka krivulje $d\ell$ u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) :

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \cdot dt \quad (1.13)$$

a iz izraza (1.8) i (1.11), lako se dobije sljedeći izraz za diferencijal duljine luka krivulje $d\ell$ u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) :

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2 + \left(r \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2} \cdot dt \quad (1.14)$$

Ako je 3D krivulja u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) parametarski opisana jednadžbama $y = y(x)$ i $z = z(x)$, onda je diferencijal duljine luka krivulje $d\ell$ opisan sljedećim izrazom:

$$d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \cdot dx \quad (1.15)$$

1.3. Diferencijalni vektorski element orijentirane 3D plohe

Diferencijalni vektorski element orijentirane (usmjerene) plohe u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisan je izrazom:

$$d\vec{S} = h_2 \cdot h_3 \cdot du_2 \cdot du_3 \cdot \vec{e}_1 + h_1 \cdot h_3 \cdot du_1 \cdot du_3 \cdot \vec{e}_2 + h_1 \cdot h_2 \cdot du_1 \cdot du_2 \cdot \vec{e}_3 \quad (1.16)$$

Iz izraza (1.16) i (1.3), lako se dobije da je diferencijalni vektorski element orijentirane 3D plohe u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisan sljedećim izrazom:

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS = dy \cdot dz \cdot \vec{i} + dx \cdot dz \cdot \vec{j} + dx \cdot dy \cdot \vec{k} \quad (1.17)$$

dok iz izraza (1.16) i (1.4), slijedi da je diferencijalni vektorski element orijentirane 3D plohe u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisan izrazom:

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS = r \cdot d\varphi \cdot dz \cdot \vec{e}_r + dr \cdot dz \cdot \vec{e}_\varphi + r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_z \quad (1.18)$$

a iz izraza (1.16) i (1.5), slijedi da je diferencijalni vektorski element orijentirane 3D plohe u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisan izrazom:

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS = r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot d\vartheta \cdot \vec{e}_r + r \cdot \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta + r \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \quad (1.19)$$

gdje je \vec{n} vektor jedinične normale na diferencijal površine plohe dS , odnosno vektor jedinične normale na orijentiranu ploh u promatranoj točki.

Neka parametarski zapis 3D plohe u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) glasi:

$$x = x(u, v) ; \quad y = y(u, v) ; \quad z = z(u, v) \quad (1.20)$$

Iz izraza (1.20) i (1.16), slijedi da je operativni zapis diferencijala površine plohe dS u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$dS = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \cdot du \cdot dv \quad (1.21)$$

gdje je:

$$\bar{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

Ako je 3D ploha u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisana jednadžbom $z = z(x, y)$, onda je diferencijal površine plohe dS opisan sljedećim izrazom:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot dx \cdot dy \quad (1.23)$$

1.4. Diferencijal volumena

Diferencijal volumena u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisan je izrazom:

$$dV = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot du_1 \cdot du_2 \cdot du_3 \quad (1.24)$$

Iz izraza (1.24) i (1.3), lako se dobije da je diferencijal volumena u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisan sljedećim izrazom:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (1.25)$$

dok iz izraza (1.24) i (1.4), slijedi da je diferencijal volumena u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisan izrazom:

$$dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad (1.26)$$

a iz izraza (1.24) i (1.5), slijedi da je diferencijal volumena u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisan izrazom:

$$dV = r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \quad (1.27)$$

1.5. Hamiltonov operator

Hamiltonov operator (nabla operator) je vektorski diferencijalni operator koji je u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisan sljedećim izrazom:

$$\nabla \equiv \bar{\nabla} = \bar{e}_1 \cdot \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} + \bar{e}_2 \cdot \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial u_2} + \bar{e}_3 \cdot \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial u_3} \quad (1.28)$$

Iz izraza (1.28) i (1.3), lako se dobije da je nabla operator u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisan sljedećim izrazom:

$$\nabla \equiv \bar{\nabla} = \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.29)$$

dok iz izraza (1.28) i (1.4), slijedi da je nabla operator u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisan izrazom:

$$\nabla \equiv \bar{\nabla} = \bar{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \bar{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.30)$$

a iz izraza (1.28) i (1.5), slijedi da je nabla operator u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisan izrazom:

$$\nabla \equiv \vec{\nabla} = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.31)$$

1.6. Gradijent skalarnog polja

Gradijent skalarnog polja jest vektorsko polje koje je kolinearano s normalom na nivo-plohu skalarnog polja, a usmjereno je u smjeru najbržeg porasta skalarnog polja. Nivo-ploha jest ploha na kojoj skalarna funkcija poprima istu vrijednost.

Gradijent skalarnog polja Ψ je u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisan sljedećim izrazom:

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u_3} \cdot \vec{e}_3 \quad (1.32)$$

Iz izraza (1.32) i (1.3), lako se dobije da je gradijent skalarnog polja $\Psi(x, y, z)$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisan sljedećim izrazom:

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (1.33)$$

dok iz izraza (1.32) i (1.4), slijedi da je gradijent skalarnog polja $\Psi(r, \varphi, z)$ u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisan izrazom:

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \quad (1.34)$$

a iz izraza (1.32) i (1.5), slijedi da je gradijent skalarnog polja $\Psi(r, \vartheta, \varphi)$ u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisan izrazom:

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (1.35)$$

1.7. Usmjerena derivacija skalarnog polja

Usmjerena derivacija skalarnog polja Ψ u smjeru vektora \vec{s} opisana je sljedećim izrazom:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{s}} = \vec{s}_0 \cdot \nabla \Psi = \vec{s}_0 \cdot \text{grad } \Psi \quad (1.36)$$

gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor vektora \vec{s} , dok je gradijent skalarnog polja Ψ opisan izrazima (1.32) – (1.35).

Iz izraza (1.36) slijedi da je usmjerena derivacija skalarnog polja Ψ u smjeru vektora \vec{s} jednaka skalarnoj projekciji gradijenta skalarnog polja Ψ na vektor \vec{s} .

Iz izraza (1.36) slijedi da se gradijent skalarnog polja Ψ može opisati i sljedećim izrazom:

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \cdot \vec{n} \quad (1.37)$$

gdje je:

\vec{n} - vektor jedinične normale na nivo-plohu skalarnog polja Ψ , usmjerene u smjeru najbržeg porasta skalarnog polja Ψ ,

$\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ - usmjerena derivacija skalarnog polja Ψ u smjeru vektora \vec{n} .

1.8. Usmjerenja derivacija vektorskog polja

Usmjerenja derivacija vektorskog polja \vec{a} u smjeru vektora \vec{s} opisana je sljedećim izrazom:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial s} \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}} = (\vec{s}_0 \cdot \nabla) \vec{a} \quad (1.38)$$

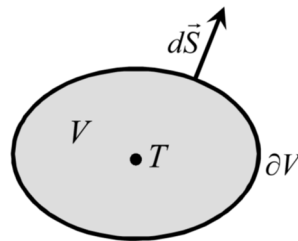
gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor vektora \vec{s} . Iz izraza (1.38) slijedi da je:

$$(\vec{s} \cdot \nabla) \vec{a} = s \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial s} \quad (1.39)$$

gdje je s modul vektora \vec{s} .

1.9. Divergencija vektorskog polja

Divergencija vektorskog polja \vec{a} jest volumna gustoća izvora vektorskog polja koje se od izvora širi radijalno. U točkama u kojima je divergencija vektorskog polja jednaka nuli nema izvora polja, dok su točke u kojima je divergencija vektorskog polja pozitivna nalaze izvori radijalnog vektorskog polja, a u točkama u kojima je divergencija vektorskog polja negativna nalaze ponori radijalnog vektorskog polja.



Slika 1.1. Volumen V oko točke T omeđen orijentiranom zatvorenom plohom ∂V

Neka se točka T nalazi u volumenu V koji je omeđen orijentiranom zatvorenom plohom ∂V (Slika 1.1). Divergencija vektorskog polja \vec{a} u točki T jednaka je graničnoj vrijednosti kvocijenta toka vektorskog polja \vec{a} i volumena V koji obuhvaća točku T , a koji izlazi iz volumena V kroz zatvorenu plohu ∂V , što se iskazuje sljedećim izrazom:

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} \cdot d\vec{S}}{V} \quad (1.40)$$

Dakle, divergencija vektorskog polja \vec{a} jednaka je skalarnom produktu nabra operatora i vektora \vec{a} . Ako vektorsko polje \vec{a} predstavlja površinsku gustoću neke fizikalne veličine, onda $\nabla \cdot \vec{a}$ predstavlja volumsku gustoću te iste fizikalne veličine.

Iz definicije divergencije slijedi da je divergencija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisana sljedećim izrazom:

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left[\frac{\partial (h_2 \cdot h_3 \cdot a_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_1 \cdot h_3 \cdot a_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 \cdot h_2 \cdot a_3)}{\partial u_3} \right] \quad (1.41)$$

Iz izraza (1.41) i (1.3), lako se dobije da je divergencija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisana izrazom:

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.42)$$

dok iz izraza (1.41) i (1.4), slijedi da je divergencija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_r, a_\varphi, a_z\}$ u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisana izrazom:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.43)$$

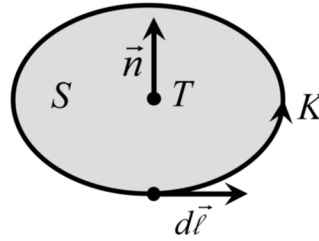
a iz izraza (1.41) i (1.5), slijedi da je divergencija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_r, a_\vartheta, a_\varphi\}$ u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisana izrazom:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial(\sin \vartheta \cdot a_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.44)$$

1.10. Rotacija ili rotor vektorskog polja

Rotacija ili rotor (engl. *curl – circulation density*) vektorskog polja \vec{a} jest plošna gustoća izvora vrtložnog vektorskog polja koje se zatvara oko izvora.

Neka se točka T nalazi na plohi S koja je omeđena orijentiranom zatvorenom krivuljom K (Slika 1.2). Neka su orijentacija plohe S i orijentacija krivulje K usklađene po pravilu desne ruke.



Slika 1.2. Ploha S na kojoj leži točka T omeđena zatvorenom krivuljom K

Rotacija ili rotor vektorskog polja \vec{a} u točki T koja se nalazi na plohi S definirana je sljedećim izrazima:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} \quad ; \quad \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_K \vec{a} \cdot d\vec{l}}{S} \quad (1.45)$$

gdje je \vec{n} vektor jedinične normale na orijentiranu plohu S u promatranoj točki T . Dakle, rotacija vektorskog polja \vec{a} jednaka je vektorskom produktu nabla operatora i vektora \vec{a} .

Iz definicije rotacije vektorskog polja slijedi da je rotacija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisana sljedećim izrazom:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot \begin{vmatrix} h_1 \cdot \vec{e}_1 & h_2 \cdot \vec{e}_2 & h_3 \cdot \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 \cdot a_1 & h_2 \cdot a_2 & h_3 \cdot a_3 \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

Iz izraza (1.46) i (1.3), lako se dobije da je rotacija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisana sljedećim izrazom:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (1.47)$$

dok iz izraza (1.47) i (1.4), slijedi da je rotacija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_r, a_\varphi, a_z\}$ u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisana izrazom:

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cdot \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r \cdot a_\varphi & a_z \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

a iz izraza (1.47) i (1.5), slijedi da je rotacija vektorskog polja $\vec{a} = \{a_r, a_\vartheta, a_\varphi\}$ u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisana izrazom:

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cdot \vec{e}_\vartheta & r \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r \cdot a_\vartheta & r \cdot \sin \vartheta \cdot a_\varphi \end{vmatrix} \quad (1.49)$$

1.11. Laplasijan skalarnog polja i laplasijan vektorskog polja

Laplasijan skalarnog polja Ψ opisan je sljedećim izrazom:

$$\Delta \Psi = \nabla^2 \Psi = (\nabla \cdot \nabla) \Psi = \nabla \cdot (\nabla \Psi) = \text{div} (\text{grad } \Psi) \quad (1.50)$$

gdje je Δ Laplaceov diferencijalni operator.

Laplasijan skalarnog polja Ψ u ortogonalnom 3D koordinatnom sustavu (u_1, u_2, u_3) opisan je sljedećim izrazom:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(p_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(p_2 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(p_3 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1.51)$$

gdje je:

$$p_1 = \frac{h_2 \cdot h_3}{h_1} ; \quad p_2 = \frac{h_1 \cdot h_3}{h_2} ; \quad p_3 = \frac{h_1 \cdot h_2}{h_3} \quad (1.52)$$

Iz izraza (1.51), (1.52) i (1.3), lako se dobije da je laplasijan skalarnog polja Ψ u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) opisan sljedećim izrazom:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (1.53)$$

dok iz izraza (1.51), (1.52) i (1.4), slijedi da je laplasijan skalarnog polja Ψ u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) opisan izrazom:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (1.54)$$

a iz izraza (1.51), (1.52) i (1.5), slijedi da je laplasijan skalarnog polja Ψ u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) opisan izrazom:

$$\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad (1.55)$$

Za laplasijan vektorskog polja \vec{a} vrijedi sljedeći izraz:

$$\Delta \vec{a} = (\nabla \cdot \nabla) \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{a}) \quad (1.56)$$

1.12. Vrste vektorskih polja

Vektorsko polje \vec{a} je *potencijalno* ili *konzervativno* vektorsko polje ako postoji skalarno polje Ψ takvo da vrijedi izraz:

$$\vec{a} = -\nabla \Psi = -\text{grad} \Psi \quad (1.57)$$

gdje je skalarno polje Ψ potencijal vektorskog polja \vec{a} .

Potencijalno vektorsko polje je uvijek bezvrtložno vektorsko polje, a vektorsko polje \vec{a} je *bezvrtložno* vektorsko polje ako za njega u svim točkama prostora vrijedi izraz:

$$\nabla \times \vec{a} = 0 \quad (1.58)$$

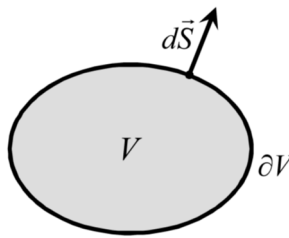
Vektorsko polje \vec{a} je *solenoidalno* ili *bezizvorno* vektorsko polje ako za njega u svim točkama prostora vrijedi izraz:

$$\nabla \cdot \vec{a} = 0 \quad (1.59)$$

1.13. Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem

Ostrogradski-Green-Gaussov teorem jest prvi važni integralni teorem vektorske analize koji ima i druge nazive kao što su: Ostrogradski-Gaussov teorem, Green-Gaussov teorem, Gaussov teorem i teorem o divergenciji. Ovaj teorem povezuje volumni integral divergencije vektorskog polja \vec{a} po volumenu V i plošni integral druge vrste vektorskog polja \vec{a} po zatvorenoj plohi ∂V koja omeđuje volumen V (Slika 1.3) i glasi:

$$\oint_{\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{a}) \cdot dV = \int_V \text{div} \vec{a} \cdot dV \quad (1.60)$$



Slika 1.3. Volumen V omeđen orijentiranom zatvorenom plohom ∂V

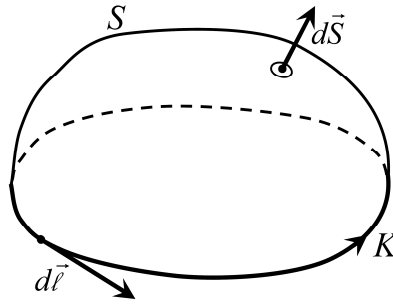
Izraz (1.60) se čita: Tok vektorskog polja \vec{a} koji izlazi iz volumena V kroz zatvorenu plohu ∂V jednak je integralu divergencije vektorskog polja \vec{a} po volumenu V .

Ako volumen V teži prema nuli oko točke T (Slika 1.1), onda Ostrogradski-Green-Gaussov teorem poprima diferencijalni oblik opisan izrazom (1.40), a to je definicija divergencije vektorskog polja.

1.14. Stokesov integralni teorem

Stokesov teorem jest drugi važni integralni teorem vektorske analize. Ovaj teorem povezuje plošni integral rotacije vektorskog polja \vec{a} po plohi S i krivuljni integral druge vrste vektorskog polja \vec{a} po zatvorenoj krivulji K koja omeđuje plohu S (Slika 1.4) i glasi:

$$\oint_K \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad (1.61)$$



Slika 1.4. Orijentirana ploha S omeđena orijentiranom zatvorenom krivuljom K

Izraz (1.61) se čita: Cirkulacija vektorskog polja \vec{a} po zatvorenoj orijentiranoj krivulji K koja omeđuje proizvoljno orijentiranu plohu S jednaka je toku vektorskog polja $\text{rot } \vec{a}$ kroz plohu S , uz zadovoljenje pravila desne ruke.

Ako ploha S teži prema nuli oko točke T (Slika 1.2), onda Stokesov teorem poprima diferencijalni oblik opisan izrazom (1.45), a to je definicija rotacije vektorskog polja \vec{a} .

1.15. Zadaci

Zadatak 1.1. Za zadano skalarno polje $\Psi = x^3 \cdot y^2 \cdot z$ odredite iznos i smjer gradijenta u pravokutnom koordinatnom sustavu i to u točki $T(2, 3, 4)$.

Rješenje:

U pravokutnom koordinatnom sustavu gradijent skalarnе funkcije Ψ opisan je izrazom (1.33), koji glasi:

$$\text{grad } \Psi = \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (1.62)$$

Parcijalne derivacije skalarnе funkcije Ψ opisane su sljedećim izrazima:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot z \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = x^3 \cdot y^2 \quad (1.63)$$

a vrijednosti tih derivacija u zadanoj točki T su:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_T = 432 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_T = 192 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_T = 72 \quad (1.64)$$

Gradijent skalarnе funkcije Ψ u točki T je:

$$\nabla \Psi|_T = 432 \cdot \vec{i} + 192 \cdot \vec{j} + 72 \cdot \vec{k} \quad (1.65)$$

pa je iznos gradijenta:

$$|(\nabla \Psi)_T| = \sqrt{432^2 + 192^2 + 72^2} = 478,1966123 \quad (1.66)$$

Vektor smjera gradijenta može se izraziti pomoću kosinusa kutova u odnosu na koordinantne osi:

$$(\nabla \Psi)_0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (1.67)$$

a u zadanoj točki T vrijedi da je:

$$\cos \alpha = \frac{432}{478,1966123} = 0,9033941 \Rightarrow \alpha = 25,3921431^\circ \quad (1.68)$$

$$\cos \beta = \frac{192}{478,1966123} = 0,4015085 \Rightarrow \beta = 66,3274846^\circ \quad (1.69)$$

$$\cos \gamma = \frac{72}{478,1966123} = 0,1505657 \Rightarrow \gamma = 81,3402898^\circ \quad (1.70)$$

2. OSNOVNE ELEKTROMAGNETSKE VELIČINE

Radi jasnoće, dobro je na samom početku udžbenika navesti osnovne elektromagnetske veličine, njihove oznake i mjerne jedinice. To su:

- \vec{E} - vektor jakosti električnog polja, (V/m),
- \vec{J} - vektor plošne gustoće električne struje, (A/m²),
- \vec{D} - vektor električnog pomaka, (C/m²),
- \vec{P} - vektor električne polarizacije, (C/m²),
- \vec{H} - vektor jakosti magnetskog polja, (A/m),
- \vec{B} - vektor magnetske indukcije (vektor gustoće magnetskog toka), (T \equiv Vs/m²),
- \vec{M} - vektor magnetizacije, (A/m),
- \vec{J}_s - vektor plošne gustoće električne struje nezavisnog izvora, (A/m²),
- $g_{st} = -\nabla \cdot \vec{J}_s$ - volumna gustoća električne struje nezavisnog izvora*, (A/m³),
- \vec{A} - vektorski magnetski potencijal, (Tm \equiv Vs/m),
- φ - skalarni električni potencijal, (V),
- φ_m - skalarni magnetski potencijal, (A),
- ρ - volumna gustoća električnog naboja, (C/m³),
- ρ_s - volumna gustoća električnog naboja nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora, (C/m³),
- σ - plošna gustoća električnog naboja, (C/m²),
- λ - linijska gustoća električnog naboja, (C/m),
- q, Q - količina električnog naboja, (C),
- τ - linijska gustoća električne struje, (A/m),
- κ - električna provodnost (specifična električna vodljivost) sredstva[†], (S/m),
- $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ - dielektričnost (permitivnost) sredstva, (F/m),
- $\varepsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12}$ F/m - dielektričnost (permitivnost) vakuuma,
- $\varepsilon_r \geq 1$ - relativna dielektričnost (permitivnost) sredstva,
- $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ - magnetska permeabilnost sredstva, (H/m \equiv Vs/Am),
- $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m - magnetska permeabilnost vakuuma,
- μ_r - relativna magnetska permeabilnost sredstva.

Oznaka g_{st} je novouvedena u ovom udžbeniku radi ispravnog definiranja Maxwellovih jednadžbi i jednadžbi skalarnog električnog potencijala u vodljivom sredstvu u kojem postoji nezavisni izvor električne struje, koja slobodno teče u vodljivom sredstvu. Njenim se uvođenjem želi naglasiti fizikalni karakter ove veličine.

* Novouvedena veličina

† U literaturi iz područja elektromagnetizma za ovu se veličinu koristi i oznaka σ

3. JEDNADŽBE GRAĐE

Jednadžbe građe (konstitucije) su jednadžbe u kojima dva vektora elektromagnetskog polja povezuje jedna od značajki sredstva. Vrijede sljedeće tri jednadžbe građe:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad (3.1)$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (3.2)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) \quad (3.3)$$

gdje je:

\vec{J} - vektor plošne gustoće provodne (kondukcijske) električne struje,

\vec{P} - vektor električne polarizacije,

\vec{M} - vektor magnetizacije.

Dakle, u općem slučaju vrijedi da je:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad (3.4)$$

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}) \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \quad (3.6)$$

Pojedino sredstvo može biti:

- izotropno ili anizotropno,
- linearno ili nelinearno,
- homogeno ili nehomogeno (heterogeno).

Ako je sredstvo anizotropno, ono nema ista svojstva u svim smjerovima, dok izotropno sredstvo ima ista svojstva u svim smjerovima. Npr. hladno valjani lim ima različitu magnetsku permeabilnost u smjeru valjanja i okomito na smjer valjanja.

Ako je sredstvo nelinearno, onda njegova nelinearna značajka ovisi o jakosti električnog polja ili o jakosti magnetskog polja. Npr. magnetska nelinearnost feromagnetskog sredstva opisana je krivuljom magnetske histereze. Ako je sredstvo linearno, onda njegova značajka ne ovisi o jakosti polja. Npr. tada histereza postaje pravac.

Ako je sredstvo homogeno, onda ono u svakoj točki sredstva ima ista svojstva. Svojstva nehomogenog sredstva razlikuju se od točke do točke.

Ako je sredstvo anizotropno, značajke sredstva su tenzori*, a vektori s lijeve i desne strane jednadžbi građe nisu kolinearni. Tada vrijede jednadžbe:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x,x} & \epsilon_{x,y} & \epsilon_{x,z} \\ \epsilon_{y,x} & \epsilon_{y,y} & \epsilon_{y,z} \\ \epsilon_{z,x} & \epsilon_{z,y} & \epsilon_{z,z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{x,x} & \kappa_{x,y} & \kappa_{x,z} \\ \kappa_{y,x} & \kappa_{y,y} & \kappa_{y,z} \\ \kappa_{z,x} & \kappa_{z,y} & \kappa_{z,z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

* Tenzor je veličina određena s više od tri broja i nekim dodatnim svojstvima; matrica je tenzor drugog reda.

$$\begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{x,x} & \mu_{x,y} & \mu_{x,z} \\ \mu_{y,x} & \mu_{y,y} & \mu_{y,z} \\ \mu_{z,x} & \mu_{z,y} & \mu_{z,z} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

gdje su:

D_x, D_y, D_z - komponente vektora električnog pomaka,

E_x, E_y, E_z - komponente vektora jakosti električnog polja,

J_x, J_y, J_z - komponente vektora plošne gustoće provodne električne struje,

B_x, B_y, B_z - komponente vektora magnetske indukcije,

H_x, H_y, H_z - komponente vektora jakosti električnog polja.

U jednadžbama (3.7) - (3.9) značajke sredstva opisane su tenzorima (matricama tipa (3, 3)). Tenzori dielektričnosti, električne provodnosti i magnetske permeabilnosti su simetrične matrice, a to znači da je npr. $\epsilon_{x,y} = \epsilon_{y,x}$. Rotacijom koordinatnog sustava može se postići da tenzori dielektričnosti, električne provodnosti i magnetske permeabilnosti budu dijagonalne matrice.

Za nelinearno sredstvo važna je i povijest zbivanja u sredstvu te vrijedi da je:

$$\epsilon = \epsilon(E) \quad ; \quad \kappa = \kappa(E) \quad ; \quad \mu = \mu(H) \quad (3.10)$$

Ako je sredstvo nelinearno i anizotropno, onda su značajke sredstva tenzorske funkcije, tj. koeficijenti razmatranog tenzora ovisni su o jakosti pripadnog polja.

Ako je sredstvo izotropno, onda su značajke sredstva skalarne konstante ili pak skalarne funkcije. U linearnom i izotropnom sredstvu jednadžbe građe glase:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (D = \epsilon \cdot E) \quad ; \quad \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (J = \kappa \cdot E) \quad ; \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (B = \mu \cdot H) \quad (3.11)$$

gdje su značajke sredstva skalarne konstante ili pak skalarne funkcije. Ako je sredstvo linearno, izotropno i homogeno, onda su značajke sredstva skalarne konstante.

Po pitanju linearnosti, izotropnosti i homogenosti, značajke istovrsnog sredstva mogu biti međusobno različite.

4. SASTAVNICE UKUPNE PLOŠNE GUSTOĆE ELEKTRIČNE STRUJE

U *mirujućem* (nepokretnom) sustavu, vektor ukupne plošne gustoće električne struje može se opisati pomoću sljedećeg izraza:

$$\vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \vec{J}_{\text{pom}} = \vec{J}_s + \vec{J}_{\text{pr}} + \vec{J}_{\text{konv}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{J} = \vec{J}_{\text{pr}} + \vec{J}_{\text{konv}} \quad (4.1)$$

gdje je:

\vec{J}_{uk} - vektor ukupne plošne gustoće električne struje,

\vec{J}_s - vektor plošne gustoće električne struje nezavisnog (vanjskog; narinutog),

\vec{J} - vektor plošne gustoće električne struje uslijed gibanja električnog naboja, koja može biti provodna ili konvekcijska,

\vec{J}_{pr} - vektor plošne gustoće provodne električne struje,

\vec{J}_{konv} - vektor plošne gustoće konvekcijske električne struje,

\vec{J}_{pom} - vektor plošne gustoće pomaćne električne struje.

Pomaćna električna struja nastaje uslijed vremenske promjene vektora električnog pomaka, a njena je plošna gustoća opisana parcijalnom derivacijom vektora električnog pomaka po vremenu t :

$$\vec{J}_{\text{pom}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.2)$$

Prema (3.2), gustoća provodne (kondukcijske) električne struje izražava se pomoću sljedeće jednačbe građe:

$$\vec{J}_{\text{pr}} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (4.3)$$

što predstavlja Ohmov zakon u diferencijalnom obliku. U linearnom, izotropnom i homogenom sredstvu (LIH sredstvu) električna provodnost sredstva κ jest skalarna konstanta.

Gustoća konvekcijske električne struje izražava se pomoću sljedeće jednačbe:

$$\vec{J}_{\text{konv}} = \rho \cdot \vec{v}_k \quad (4.4)$$

i predstavlja gustoću električne struje uslijed gibanja električnog naboja volumne gustoće ρ brzinom \vec{v}_k pod djelovanjem sila koje nisu elektromagnetske prirode.

Provodna električna struja jest gibanje naelektriziranih čestica (elektrona, pozitivnih i negativnih iona itd.) uslijed djelovanja elektromagnetskih sila. Konvekcijska električna struja jest gibanje naelektriziranih čestica uslijed djelovanja sila koje nisu elektromagnetske prirode. Konvekcijske električne struje mogu nastati u plinovima i tekućinama.

U ovom udžbeniku neće se razmatrati električne struje u plinovima i tekućinama, odnosno neće se rješavati problemi koji uključuju konvekcijske električne struje. Ako se iz razmatranja isključe konvekcijske električne struje, ukupna plošna gustoća električne struje u *mirujućem* sustavu može se opisati sljedećim izrazom:

$$\vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \vec{J}_{\text{pom}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{J} = \vec{J}_{\text{pr}} \quad (4.5)$$

Uz zanemarenje konvekcijskih električnih struja, ukupna plošna gustoća električne struje u *pokretnom* sustavu, koji se giba konstantnom relativnom brzinom \vec{v} u odnosu na promatrača, može se opisati sljedećim izrazom:

$$\vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \vec{J}_{\text{pom}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad ; \quad \vec{J} = \vec{J}_{\text{pr}} \quad (4.6)$$

gdje je u odnosu na izraz (4.5) parcijalna derivacija po vremenu zamijenjena punom derivacijom po vremenu za koju vrijedi sljedeći izraz:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{D} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.7)$$

gdje je nabra operator u Descartesovom koordinatnom sustavu opisan izrazom:

$$\nabla \equiv \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (4.8)$$

Nadalje je:

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) = \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{D} \quad (4.9)$$

gdje je \vec{v} vektor konstantne relativne brzine pokretnog sustava u odnosu na promatrača.

Iz izraza (4.9) i (4.7), lako se dobije sljedeći izraz:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.10)$$

Slijedi da je ukupna plošna gustoća električne struje u pokretnom sustavu, koji se giba konstantnom relativnom brzinom \vec{v} u odnosu na promatrača, opisana izrazom:

$$\vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J}_s + \vec{J} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.11)$$

Za vektor ukupne plošne gustoće električne struje vrijedi jednadžba kontinuiteta:

$$\text{div } \vec{J}_{\text{uk}} = \nabla \cdot \vec{J}_{\text{uk}} = 0 \quad (4.12)$$

koja je sukladna prvoj Maxwelllovoj diferencijalnoj jednadžbi, a iz nje slijedi treća Maxwelllova diferencijalna jednadžba.

5. FAZORSKA TRANSFORMACIJA SINUSOIDALNIH VELIČINA

U teoriji električnih strujnih krugova kao i u elektromagnetizmu pojavljuju se sinusoidalne ili vremenski harmonijske (engl. *time-harmonic*) veličine: skalarne funkcije vremena, vektorske funkcije vremena, skalarna polja i vektorska polja. Sinusoidalne ili vremenski harmonijske funkcije opisane su sinusnom ili kosinusnom funkcijom.

Sinusoidalne se veličine iz vremenskog područja mogu preslikati u fazorsko područje* korištenjem fazorske transformacije koju je krajem 19. stoljeća razvio američki matematičar i elektroinženjer Charles Proteus Steinmetz radeći za elektrotvrtku General Electric. Na to ga je potakao Heavisideov operatorski račun, koji je vrlo sličan Laplaceovoj transformaciji.

Neka je sinusoidalni električni napon u opisan sljedećom skalarnom funkcijom vremena:

$$u = U_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \quad (5.1)$$

gdje je:

u - trenutna vrijednost električnog napona,

t - vrijeme,

U_{\max} - maksimalna (tjemena, vršna) vrijednost električnog napona,

U - efektivna vrijednost električnog napona,

ω - kružna frekvencija,

θ - fazni kut.

Eulerova formula, koja povezuje sinusne i kosinusne funkcije s kompleksnim eksponencijalnim funkcijama, glasi:

$$e^{j(\omega t + \theta)} = \cos(\omega \cdot t + \theta) + j \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \quad (5.2)$$

gdje je $j = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Dakle, kosinusna funkcija je realni dio eksponencijalne funkcije, a sinusna funkcija imaginarni dio eksponencijalne funkcije:

$$\cos(\omega \cdot t + \theta) = \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \theta)}] \quad ; \quad \sin(\omega \cdot t + \theta) = \operatorname{Im}[e^{j(\omega t + \theta)}] \quad (5.3)$$

Slijedi da je:

$$u = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j(\omega t + \theta)}] = \operatorname{Re}[\sqrt{2} \cdot \bar{U} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\tilde{U}_{\max}] \quad (5.4)$$

$$\bar{U} = U \cdot e^{j\theta} \quad (5.5)$$

$$\bar{U}_{\max} = \sqrt{2} \cdot \bar{U} = U_{\max} \cdot e^{j\theta} \quad (5.6)$$

$$\tilde{U}_{\max} = \sqrt{2} \cdot \bar{U} \cdot e^{j\omega t} = \bar{U}_{\max} \cdot e^{j\omega t} \quad (5.7)$$

gdje je:

\bar{U} - fazor električnog napona kojemu je modul efektivna vrijednost električnog napona,

\bar{U}_{\max} - fazor električnog napona kojemu je modul maksimalna vrijednost električnog napona,

\tilde{U}_{\max} - rotirajući fazor kojemu je modul maksimalna vrijednost električnog napona.

Fazor je kompleksni broj (skalar) u Eulerovom zapisu. Mnogi fazor zovu vektorom, što nije prikladan naziv jer, između ostalog, postoje i fazori vektora koji se koriste u ovom udžbeniku. Fazor je,

* Naziva se, također, *frekvencijskim područjem* ili pak *kompleksnim područjem*

ustvari, fazni vektor. *Rotirajući fazor* je kompleksna funkcija u Eulerovom zapisu. U ovom se udžbeniku neće koristiti rotirajući fazori.

Fazor električnog napona u (sinusoidalne skalarne funkcije) može se definirati na četiri različita načina:

- Električni napon je u vremenskom području opisan kosinusnom funkcijom, a modul fazora \bar{U} je efektivna vrijednost električnog napona;
- Električni napon je u vremenskom području opisan sinusnom funkcijom, a modul fazora \bar{U} je efektivna vrijednost električnog napona;
- Električni napon je u vremenskom području opisan kosinusnom funkcijom, a modul fazora \bar{U}_{\max} je maksimalna vrijednost napona;
- Električni napon je u vremenskom području opisan sinusnom funkcijom, a modul fazora \bar{U}_{\max} je maksimalna vrijednost električnog napona.

U ovom će se udžbeniku koristiti prethodno pronađena definicija fazora sinusoidalne skalarne funkcije koja kaže da je sinusoidalna skalarne funkcija u vremenskom području opisana kosinusnom funkcijom, a modul fazora je efektivna vrijednost sinusoidalne funkcije.

Fazorski zapis sinusoidalnih veličina omogućuje da se integro-diferencijalne jednačbe iz vremenskog područja transformiraju u algebarske jednačbe u fazorskom području. Za električni napon opisan izrazima (5.1) i (5.5) vrijedi da je:

$$u \rightarrow \bar{U} \quad (5.8)$$

$$\frac{du}{dt} \rightarrow j \cdot \omega \cdot \bar{U} \quad (5.9)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} \rightarrow (j \cdot \omega)^2 \cdot \bar{U} = -\omega^2 \cdot \bar{U} \quad (5.10)$$

$$\int u \cdot dt \rightarrow \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \bar{U} = -\frac{j}{\omega} \cdot \bar{U} \quad (5.11)$$

jer je:

$$\frac{d e^{j \cdot \omega t}}{dt} = j \cdot \omega \cdot e^{j \cdot \omega t} \quad ; \quad \frac{d^2 e^{j \cdot \omega t}}{dt^2} = (j \cdot \omega)^2 \cdot e^{j \cdot \omega t} \quad (5.12)$$

$$\int e^{j \cdot \omega t} \cdot dt = \frac{e^{j \cdot \omega t}}{j \cdot \omega} + C \quad (5.13)$$

Neka je u vremenskom području sinusoidalni vektor (vektorska funkcija vremena) u pravokutnom koordinatnom sustavu opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (5.14)$$

gdje je:

$$a_x = \sqrt{2} \cdot A_x \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_x) \quad (5.15)$$

$$a_y = \sqrt{2} \cdot A_y \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_y) \quad (5.16)$$

$$a_z = \sqrt{2} \cdot A_z \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_z) \quad (5.17)$$

gdje su A_x, A_y i A_z efektivne vrijednosti komponenti vektora \vec{a} .

Dakle, komponente vektora \vec{a} su sinusoidalne skalarne funkcije vremena, koje se u fazorskom području mogu opisati fazorima. To znači da se sinusoidalni vektor može iz vremenskog područja preslikati u fazorsko područje tako da je:

$$\underline{\vec{a}} = \overline{A}_x \cdot \vec{i} + \overline{A}_y \cdot \vec{j} + \overline{A}_z \cdot \vec{k} = \{ \overline{A}_x, \overline{A}_y, \overline{A}_z \} \quad (5.18)$$

gdje je:

$\underline{\vec{a}}$ - fazor vektora \vec{a} ,

\overline{A}_x - fazor x-komponente vektora \vec{a} ,

\overline{A}_y - fazor y-komponente vektora \vec{a} ,

\overline{A}_z - fazor z-komponente vektora \vec{a} .

Fazor vektora je kompleksni vektor. U ovom se udžbeniku koriste fazori vektora kojima su moduli fazora njegovih komponenti efektivne vrijednosti pripadne kosinusne funkcije.

U cilindričnom koordinatnom sustavu fazor vektora \vec{a} opisan je izrazom:

$$\underline{\vec{a}} = \overline{A}_r \cdot \vec{e}_r + \overline{A}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \overline{A}_z \cdot \vec{e}_z = \{ \overline{A}_r, \overline{A}_\varphi, \overline{A}_z \} \quad (5.19)$$

dok je u sfernom koordinatnom sustavu fazor vektora \vec{a} opisan izrazom:

$$\underline{\vec{a}} = \overline{A}_r \cdot \vec{e}_r + \overline{A}_\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + \overline{A}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \{ \overline{A}_r, \overline{A}_\vartheta, \overline{A}_\varphi \} \quad (5.20)$$

Fazori sinusoidalnih skalarnih polja formalno imaju isti oblik kao i fazori sinusoidalnih skalarnih funkcija ovisnih samo o vremenu, ali su moduli i fazni kutovi fazora sinusoidalnih skalarnih polja ovisni o prostornim koordinatama razmatranog koordinatnog sustava.

Fazori sinusoidalnih vektorskih polja formalno imaju isti oblik kao i fazori sinusoidalnih vektorskih funkcija ovisnih samo o vremenu, ali su moduli i fazni kutovi fazora sinusoidalnih vektorskih polja ovisni o prostornim koordinatama razmatranog koordinatnog sustava.

Sinusoidalne funkcije mogu biti opisane sinusnom ili pak kosinusnom funkcijom vremena pa je korisno imati na umu sljedeća dva trigonometrijska izraza:

$$\sin(\omega \cdot t + \theta) = \cos(\omega \cdot t + \theta - \pi/2) = \cos(\omega \cdot t + \theta - 90^\circ) \quad (5.21)$$

$$\cos(\omega \cdot t + \theta) = \sin(\omega \cdot t + \theta + \pi/2) = \sin(\omega \cdot t + \theta + 90^\circ) \quad (5.22)$$

6. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U VREMENSKOM PODRUČJU

Maxwellove jednadžbe su temeljne jednadžbe klasičnog elektromagnetizma, odnosno klasične elektrodinamike, a mogu biti napisane u diferencijalnom obliku (vrijede za jednu točku) i u integralnom obliku (vrijede za 3D područje). One su nazvane po škotskom fizičaru Jamesu Clerku Maxwellu, čija su najznačajnija djela njegove dvije knjige: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, objavljena 1864. godine i dvotomna knjiga *A Treatise on Electricity and Magnetism*, objavljena 1873. godine. Maxwell je na temelju dotadašnjih teorijskih i eksperimentalnih spoznaja razvio elektromagnetsku teoriju, objedinivši teoriju elektriciteta i teoriju magnetizma. Iz Maxwellovih jednadžbi proizlazi da je elektromagnetsko polje valne prirode, a iz Maxwellove elektromagnetske teorije svjetlosti proizlazi da je svjetlost elektromagnetski val vrlo visoke frekvencije.

Maxwellove su ideje i jednadžbe, nakon njegove smrti, nadograđene i preinačene tako da su postale jednostavnije i razumljivije. Tome su najviše doprinijeli njemački fizičar Heinrich Rudolf Hertz, irski fizičar George Francis FitzGerald, britanski fizičar Oliver Joseph Lodge i engleski samouki elektromagnetičar, matematičar i fizičar Oliver Heaviside. Heaviside je sebe, FitzGeralda i Lodgea prozvao Maxwellovcima.

Maxwell je u svojoj elektromagnetskoj teoriji osmislio sustav od dvadeset diferencijalnih jednadžbi, a te je jednadžbe Oliver Heaviside 1884. godine sažeo u četiri danas općepoznate vektorske diferencijalne jednadžbe. Nezavisno su na istu ideju da dvadeset Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi sažmu u četiri vektorske jednadžbe došli američki fizičar Josiah Willard Gibbs i njemački fizičar Heinrich Rudolf Hertz koji je 1888. godine eksperimentalno dokazao da je elektromagnetsko polje valne prirode te je nizom drugih eksperimenata potvrdio ispravnost Maxwellovih jednadžbi. Stoga ne čudi da su četiri vektorski zapisane diferencijalne jednadžbe, koje su danas poznate samo pod imenom Maxwellove diferencijalne jednadžbe, nekad bile poznate i kao: Hertz-Heavisideove diferencijalne jednadžbe, Maxwell-Hertzove diferencijalne jednadžbe ili Maxwell-Heavisideove diferencijalne jednadžbe.

6.1. Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom savršenom dielektriku

Savršeni dielektrik ili izolator je onaj dielektrik kojemu je električna provodnost jednaka nuli ($\kappa = 0$). Drugim riječima savršeni dielektrik je nevodljivo sredstvo.

Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom savršenom dielektriku, koji se giba konstantnom relativnom brzinom \vec{v} u odnosu na promatrača, mogu se napisati u sljedećem obliku:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (6.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (6.2)$$

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (6.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.4)$$

gdje je:

\vec{H} - vektor jakosti magnetskog polja,

\vec{E} - vektor jakosti električnog polja,

\vec{D} - vektor električnog pomaka,

\vec{B} - vektor magnetske indukcije (vektor gustoće magnetskog toka),

\vec{J}_{uk} - vektor ukupne plosne gustoće električne struje,

\vec{J}_s - vektor plošne gustoće električne struje nezavisnog izvora,

ρ_s - volumna gustoća naboja nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora.

Prema (4.10) vrijedi sljedeći izraz za punu derivaciju vektora električnog pomaka po vremenu:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.5)$$

koji u savršenom dielektriku, nakon uvrštenja izraza (6.3) u izraz (6.5), poprima sljedeći oblik:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) + \rho_s \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.6)$$

gdje je \vec{v} vektor konstantne relativne brzine pokretnog sustava u odnosu na promatrača.

Vrijedi analogan izraz za punu derivaciju vektora magnetske indukcije po vremenu:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

koji u savršenom dielektriku, nakon uvrštenja izraza (6.4) u izraz (6.7), poprima sljedeći oblik:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.8)$$

gdje je \vec{v} vektor konstantne relativne brzine pokretnog sustava u odnosu na promatrača.

Ako se izrazi (6.6) i (6.8) uvrste u Maxwellove diferencijalne jednadžbe (6.1) i (6.2), onda se dobije sljedeći oblik Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi u pokretnom savršenom dielektriku:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \rho_s \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) \quad (6.9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (6.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.12)$$

koje se u linearnom, izotropnom i homogenom (LIH) savršenom dielektriku mogu opisati i sljedećim izrazima:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \rho_s \cdot \vec{v} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (6.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) \quad (6.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (6.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.16)$$

gdje su μ i ε značajke savršenog LIH dielektrika.

Budući da vrijedi da je:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 \quad ; \quad \forall \vec{a} \quad (6.17)$$

iz prve Maxwellove diferencijalne jednačbe (6.1) i (6.9) slijedi da je jednačba kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku opisana sljedećim izrazom:

$$\nabla \cdot \left(\vec{J}_s + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = \nabla \cdot \left(\vec{J}_s + \rho_s \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.18)$$

odakle slijedi da je:

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = - \frac{d(\nabla \cdot \vec{D})}{dt} \quad (6.19)$$

Budući da je, prema izrazu (6.3), u savršenom dielektriku:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (6.20)$$

iz izraza (6.18) - (6.20) slijedi da je:

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = - \frac{d\rho_s}{dt} = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_s \cdot \vec{v}) = - \frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \vec{v} \cdot (\nabla \rho_s) \quad (6.21)$$

a to je jednačba kontinuiteta koja povezuje nezavisne izvore.

6.2. Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom dielektriku

Iz Maxwellovih diferencijalnih jednačbi (6.1) – (6.4) u pokretnom savršenom dielektriku lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom dielektriku (mirujućem sustavu). Samo treba punu derivaciju po vremenu zamijeniti s parcijalnom derivacijom po vremenu. Dakle, Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom dielektriku glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{uk} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.22)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (6.24)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.25)$$

a to su upravo one četiri općepoznate Maxwellove diferencijalne jednačbe.

Iz Maxwellovih diferencijalnih jednačbi (6.13) – (6.16) u pokretnom savršenom LIH dielektriku lako se dobiju sljedeće Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom LIH dielektriku (mirujućem sustavu) za $\vec{v} = 0$:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.26)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.27)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (6.28)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.29)$$

tako da se u Maxwellove diferencijalne jednačbe (6.13) i (6.14) uvrsti $\vec{v} = 0$.

Iz izraza (6.20) i (6.21) slijedi da jednadžba kontinuiteta u slučaju mirujućeg savršenog dielektrika glasi:

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.30)$$

što je matematička formulacija zakona očuvanja električnog naboja.

6.3. Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom vodljivom sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom vodljivom sredstvu, koje se giba konstantnom realtivnom brzinom \vec{v} u odnosu na promatrača, mogu se napisati u sljedećem obliku:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (6.31)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (6.32)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = -\nabla \cdot \vec{J}_s = g_{\text{st}} \quad (6.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.34)$$

gdje je \vec{J} vektor plošne gustoće provodne električne struje, dok je $g_{\text{st}} = -\nabla \cdot \vec{J}_s$ volumna gustoća električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno vodljivo sredstvo*.

U vodljivom sredstvu vrijedi da je $\rho_s = 0$, tj. u vodljivom sredstvu nema slobodnog naboja. Ako se u vodljivo sredstvo unese slobodni naboj, on se vrlo brzo razgradi ili se pak raspoređi po površini vodiča. Prema jednadžbama (6.32) i (6.33), u vodljivom sredstvu izvor električnog polja može biti vremenski promjenjivo magnetsko polje i električna struja koju nezavisni izvor ispušta u okolno vodljivo sredstvo.

Novina u odnosu na korištenu literaturu jest treća Maxwellova diferencijalna jednadžba u pokretnom vodljivom sredstvu (6.33), koja slijedi iz jednadžbe kontinuiteta u pokretnom vodljivom sredstvu:

$$\nabla \cdot \vec{J}_{\text{uk}} = \nabla \cdot \left(\vec{J}_s + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = 0 \quad (6.35)$$

Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom savršenom dielektriku (6.1) – (6.4) su poseban slučaj Maxwellovih diferencijalnih jednadžbe u pokretnom vodljivom sredstvu (6.31) – (6.34). To je fizikalna nužnost koja mora biti zadovoljena. Ako se u jednadžbu (6.31) uvrsti $\vec{J} = 0$ iz nje se dobije jednadžba (6.1). Jednadžbe (6.2) i (6.32) su međusobno identične te su međusobno identične jednadžbe (6.4) i (6.34). Potrebno je samo dokazati da je jednadžba (6.3) poseban slučaj jednadžbe (6.33). U pokretnom savršenom dielektriku jednadžba (6.33) glasi:

$$\nabla \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{d(\nabla \cdot \vec{D})}{dt} = -\nabla \cdot \vec{J}_s \quad (6.36)$$

a za pokretni savršeni dielektrik vrijedi i jednadžba (6.30) pa je:

$$\frac{d(\nabla \cdot \vec{D})}{dt} = \frac{d\rho_s}{dt} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (6.37)$$

* Sastavnice divergencije vektora su derivacije komponenti vektora po prostornim koordinatama x, y i z pa je lako zaključiti da je jedinica veličine g_{st} A/m³, što ukazuje na njeno fizikalno značenje

Ako se jednađbe (6.5) i (6.8) uvrste u jednađbe (6.31) i (6.32), onda Maxwellove jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) \quad (6.38)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.39)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = g_{st} \quad (6.40)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.41)$$

koje u pokretnom vodljivom LIH sredstvu glase:

$$\nabla \times (\vec{H} + \varepsilon \cdot \vec{v} \times \vec{E}) = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{E}) \quad (6.42)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) \quad (6.43)$$

$$\nabla \cdot \left(\kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = g_{st} \quad (6.44)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.45)$$

gdje su μ , κ i ε značajke vodljivog LIH sredstva.

6.4. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu

Iz Maxwellovih diferencijalnih jednađbi (6.31) – (6.34) u pokretnom vodljivom sredstvu lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu (mirujućem sustavu). Samo treba punu derivaciju po vremenu zamijeniti s parcijalnom derivacijom po vremenu. Dakle, Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{uk} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.46)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.47)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = g_{st} \quad (6.48)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.49)$$

Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku (6.22) – (6.25) su poseban slučaj Maxwellovih diferencijalnih jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu (6.46) – (6.49).

Iz jednađbi (6.46) – (6.49) lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem vodljivom LIH sredstvu koje glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.50)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.51)$$

$$\nabla \cdot \left(\kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \vec{E}) = g_{st} \quad (6.52)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.53)$$

gdje su μ , κ i ε značajke vodljivog LIH sredstva.

6.5. Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom dobrom vodiču

U dobrom vodiču se uvijek mogu zanemariti pomaćne električne struje, tj. koristi se sljedeća aproksimacija:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = 0 \quad (6.54)$$

jer je:

$$J \gg \frac{dD}{dt} \quad (6.55)$$

Iz izraza (6.31) – (6.34), (6.54) i (6.8), lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom dobrom vodiču koje glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{uk} = \vec{J}_s + \vec{J} \quad (6.56)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.57)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = g_{st} \quad (6.58)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.59)$$

koje u pokretnom dobrom LIH vodiču glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} \quad (6.60)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) \quad (6.61)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{g_{st}}{\kappa} \quad (6.62)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.63)$$

6.6. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču

Iz Maxwellovih diferencijalnih jednađbi (6.56) – (6.59) u pokretnom vodljivom sredstvu lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču (mirujućem sustavu). Samo treba punu derivaciju po vremenu u jednađbi (6.57) zamijeniti s parcijalnom derivacijom po vremenu, odnosno uvrstiti da je brzina $\vec{v} = 0$. Dakle, Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} \quad (6.64)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.65)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = g_{\text{st}} \quad (6.66)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.67)$$

koje u mirujućem dobrom LIH vodiču glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} \quad (6.68)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.69)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{g_{\text{st}}}{\kappa} \quad (6.70)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.71)$$

6.7. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku

Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku opisane su općepoznatim izrazima (6.22) – (6.25). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\tau} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = i_{\text{uk}} = i_s + i_{\text{pom}} \quad (6.72)$$

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\tau} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.73)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_s \cdot dV = q_s \quad (6.74)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.75)$$

gdje je:

i_{uk} - jakost ukupne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

i_s - jakost električne struje nezavisnog izvora koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

i_{pom} - jakost pomačne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),
 e - elektromotorna sila (EMS) inducirana u zatvorenoj konturi K (Slika 1.4),
 Φ - magnetski tok koji prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),
 q_s - količina naboja nezavisnog izvora unutar volumena V (Slika 1.3).

Prema izrazu (6.72), vrijedi da je:

$$i_s = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} \quad (6.76)$$

$$i_{\text{pom}} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.77)$$

Prema izrazu (6.73), vrijedi da je:

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (6.78)$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (6.79)$$

Prema izrazu (6.74), vrijedi da je:

$$q_s = \int_V \rho_s \cdot dV \quad (6.80)$$

Prva Maxwellova integralna jednadžbe u mirujućem savršenom dielektriku (6.72) predstavlja poopćeni Ampèreov zakon i čita se: *Cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja po zatvorenoj krivulji K jednaka je jakosti ukupne električne struje koja prolazi kroz proizvoljnu plohu S omeđenu krivuljom K , uvažavajući pravilo desne ruke.*

Druga Maxwellova integralna jednadžbe u mirujućem savršenom dielektriku (6.73) predstavlja Faradayev zakon elektromagnetske indukcije i čita se: *Cirkulacija vektora jakosti električnog polja po zatvorenoj krivulji K jednaka je negativnoj vremenskoj derivaciji magnetskog toka koji prolazi kroz proizvoljnu plohu S omeđenu zatvorenom krivuljom K , uvažavajući pravilo desne ruke.* Prema Faradayevom zakonu elektromagnetske indukcije u mirujućem sustavu, EMS inducirana u zatvorenoj konturi K jednaka je negativnoj derivaciji magnetskog toka po vremenu koji prolazi kroz plohu S omeđenu tom konturom; uvažavajući pravilo desne ruke.

Treća Maxwellova integralna jednadžbe u mirujućem savršenom dielektriku (6.74) predstavlja Gaussov zakon i čita se: *Tok vektora električnog pomaka koji izlazi iz zatvorenog volumena V kroz njegovu vanjsku plohu S jednak je količini nezavisnog naboja unutar volumena V .*

Četvrta Maxwellova integralna jednadžbe u mirujućem savršenom dielektriku (6.75) predstavlja Gaussov zakon za magnetizam i čita se: *Tok vektora magnetske indukcije (magnetski tok) koji izlazi iz zatvorenog volumena V kroz njegovu vanjsku plohu S jednak je nuli.* To znači da je magnetsko polje bezizvorno.

Općepoznata diferencijalna jednadžba kontinuiteta u slučaju mirujućeg savršenog dielektrika opisana je izrazom (6.30). Ako se na tu jednadžbu primijeni Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobije se integralna jednadžba kontinuiteta u mirujućem savršenom dielektriku, koja glasi:

$$\int_V g_{st} \cdot dV = - \int_V (\nabla \cdot \vec{J}_s) \cdot dV = \frac{\partial q_s}{\partial t} \quad (6.81)$$

U slučaju savršenog dielektrika, volumna gustoća električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno sredstvo jest volumna gustoća pomačne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolni savršeni dielektrik.

6.8. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku

Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku opisane su izrazima (6.9) – (6.12). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_s + \rho_s \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{l} \quad (6.82)$$

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.83)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_s \cdot dV = q_s \quad (6.84)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.85)$$

Druga Maxwellova integralna jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku (6.83) predstavlja Faradayev zakon elektromagnetske indukcije u pokretnom sredstvu. Prema tom zakonu, u zatvorenoj konturi koja se giba u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju ili se deformira, inducira se elektromotorna sila (EMS):

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = e_{tr} + e_{kr} \quad (6.86)$$

gdje je e_{tr} inducirana EMS transformacije opisana izrazom:

$$e_{tr} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.87)$$

dok je e_{kr} inducirana EMS kretanja i/ili deformacije opisana izrazom:

$$e_{kr} = \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (6.88)$$

Diferencijalna jednađba kontinuiteta u slučaju pokretnog savršenog dielektrika opisana je izrazom (6.21). Ako se na tu jednađbu primijeni Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobije se integralna jednađba kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku, koja glasi:

$$\int_V g_{st} \cdot dV = - \int_V (\nabla \cdot \vec{J}_s) \cdot dV = \frac{dq_s}{dt} \quad (6.89)$$

6.9. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu opisane su izrazima (6.38) – (6.41). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J}_s + \vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell} \quad (6.90)$$

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.91)$$

$$\oint_{\partial V} \left(\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_V g_{st} \cdot dV \quad (6.92)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.93)$$

6.10. Maxwellove integralne jednačbe u mirujućem vodljivom sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem vodljivom sredstvu opisane su izrazima (6.46) – (6.49). Ako se na prve dvije jednačbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednačbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednačbe u mirujućem vodljivom sredstvu:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J}_s + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = i_s + i_{pr} + i_{pom} \quad (6.94)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.95)$$

$$\oint_{\partial V} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_V g_{st} \cdot dV = i_{st} \quad (6.96)$$

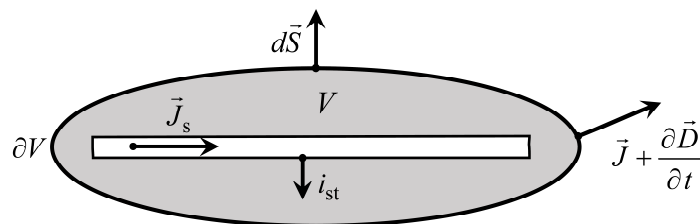
$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.97)$$

gdje je:

i_{pr} - jakost provodne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

i_{st} - jakost električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno vodljivo sredstvo unutar razmatranog volumena V .

Iz izraza (6.96) slijedi da je jakost električne struje koja izlazi iz volumena V kroz zatvorenu plohu ∂V jednaka jakosti električne struje i_{st} koja izvire unutar volumena V (Slika 6.1).



Slika 6.1. Grafička ilustracija izraza (6.96)

Prethodne se integralne jednađbe mogu dobiti i iz Maxwellovih integralnih jednađbi u pokretnom vodljivom sredstvu (6.90) - (6.93) ako se u njih uvrsti $\vec{v} = 0$.

Iz treće Maxwellove jednađbe (6.96) slijedi da je zbroj provodne i pomaćne električne struje koja izlazi iz volumena V jednaka (provodnoj i pomaćnoj) električnoj struji koju nezavisni izvor ispušta u okolno mirujuće vodljivo sredstvo.

6.11. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom dobrom vodiću

Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom dobrom vodiću opisane su izrazima (6.56) – (6.59). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom dobrom vodiću:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J}_s + \vec{J}) \cdot d\vec{S} = i_s + i_{pr} \quad (6.98)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (6.99)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V g_{st} \cdot dV = i_{st} \quad (6.100)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.101)$$

Iz treće Maxwellove integralne jednađbe (6.100) slijedi da je provodna električna struja koja izlazi iz volumena V jednaka provodnoj električnoj struji koju nezavisni izvor ispušta u pokretni okolni dobri vodič.

6.12. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem dobrom vodiću

Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiću opisane su izrazima (6.64) – (6.67). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem dobrom vodiću:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J}_s + \vec{J}) \cdot d\vec{S} = i_s + i_{pr} \quad (6.102)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (6.103)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V g_{st} \cdot dV = i_{st} \quad (6.104)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6.105)$$

Prethodne se integralne jednađbe mogu dobiti i iz Maxwellovih integralnih jednađbi u pokretnom dobrom vodiću ako se u njih uvrsti $\vec{v} = 0$.

7. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U FAZORSKOM PODRUČJU

Ako je elektromagnetsko polje sinusoidalno (vremenski harmonijsko), onda se Maxwellove diferencijalne i integralne jednadžbe mogu iz vremenskog područja transformirati u fazorsko područje. Fazorski zapis sinusoidalnih skalarnih i vektorskih polja detaljno je opisan u poglavlju 5.

7.1. Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom vodljivom sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom vodljivom sredstvu u vremenskom području opisane su izrazima (6.38) – (6.41), a one u fazorskom području glase:

$$\nabla \times \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{J}}_s + \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{v}} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{D}}) + j \cdot \omega \cdot \underline{\underline{D}} - \nabla \times (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{D}}) \quad (7.1)$$

$$\nabla \times \underline{\underline{E}} = - j \cdot \omega \cdot \underline{\underline{B}} + \nabla \times (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{B}}) \quad (7.2)$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{J}} + \underline{\underline{v}} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{D}}) + j \cdot \omega \cdot \underline{\underline{D}}) = - \nabla \cdot \underline{\underline{J}}_s = \underline{\underline{g}}_{st} \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{B}} = 0 \quad (7.4)$$

gdje je:

$\underline{\underline{H}}$ - fazor vektora jakosti magnetskog polja,

$\underline{\underline{E}}$ - fazor vektora jakosti električnog polja,

$\underline{\underline{D}}$ - fazor vektora električnog pomaka,

$\underline{\underline{B}}$ - fazor vektora magnetske indukcije (vektora gustoće magnetskog toka),

$\underline{\underline{J}}_s$ - fazor vektora plošne gustoće električne struje nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora,

$\underline{\underline{J}}$ - fazor vektora plošne gustoće provodne električne struje,

$\underline{\underline{g}}_{st}$ - fazor volumne gustoće električne struje koju nezavisni izvor ispušta u vodljivo sredstvo,

ω - kružna frekvencija,

$\underline{\underline{v}}$ - vektor konstantne relativne brzine pokretnog sustava u odnosu na promatrača,

j - imaginarna jedinica.

Maxwellova diferencijalna jednadžba (7.3) je ujedno i diferencijalna jednadžba kontinuiteta u pokretnom vodljivom sredstvu.

7.2. Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom dobrom vodiču

Maxwellove diferencijalne jednadžbe u pokretnom dobrom vodiču u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi u pokretnom vodljivom sredstvu u fazorskom području tako da se u izraze (7.1) i (7.3) uvrsti $\underline{\underline{D}} = 0$, što je posljedica zanemarenja pomačnih električnih struja. Dobiju se sljedeće diferencijalne jednadžbe:

$$\nabla \times \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{J}}_s + \underline{\underline{J}} \quad (7.5)$$

$$\nabla \times \underline{\underline{E}} = - j \cdot \omega \cdot \underline{\underline{B}} + \nabla \times (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{B}}) \quad (7.6)$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{g}}_{st} \quad (7.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.8)$$

koje u slučaju pokretnog dobrog LIH vodiča glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} \quad (7.9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \vec{H} + \mu \cdot \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) \quad (7.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (7.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (7.12)$$

Maxwellova diferencijalna jednačba (7.3) je ujedno i diferencijalna jednačba kontinuiteta u pokretnom dobrom vodiču, a Maxwellova diferencijalna jednačba (7.11) je ujedno i diferencijalna jednačba kontinuiteta u pokretnom dobrom LIH vodiču.

7.3. Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem vodljivom sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem vodljivom sredstvu u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih diferencijalnih jednačbi u pokretnom vodljivom sredstvu u fazorskom području tako da se u izraze (7.1) - (7.3) uvrsti $\vec{v} = 0$. Dobiju se sljedeće diferencijalne jednačbe:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \quad (7.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (7.14)$$

$$\nabla \cdot (\vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D}) = \bar{g}_{st} \quad (7.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.16)$$

koje u slučaju mirujućeg vodljivog LIH sredstva glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \vec{E} \quad (7.17)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \vec{H} \quad (7.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\bar{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (7.19)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (7.20)$$

gdje je $\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon$ kompleksna provodnost vodljivog LIH sredstva.*

* U literaturi iz elektromagnetizma često se koristi izraz $\bar{\kappa} = \sigma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon$ za kompleksnu provodnost sredstva, gdje je u tom slučaju σ provodnost sredstva. Ovaj izraz se ne koristi u ovom udžbeniku jer se oznaka σ koristi za plošnu gustoću električnog naboja.

7.4. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču

Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih diferencijalnih jednađbi u mirujućem vodljivom sredstvu u fazorskom području tako da se u izraze (7.13) i (7.15) uvrsti $\underline{\vec{D}} = 0$, što je posljedica zanemarenja pomaćnih elektrićnih struja. Dobiju se sljedeće diferencijalne jednađbe:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_s + \underline{\vec{J}} \quad (7.21)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{B}} \quad (7.22)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (7.23)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (7.24)$$

koje u slučaju mirujućeg dobrog LIH vodića glase:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_s + \kappa \cdot \underline{\vec{E}} \quad (7.25)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \underline{\vec{H}} \quad (7.26)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (7.27)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{H}} = 0 \quad (7.28)$$

7.5. Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku

Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku u vremenskom području opisane su izrazima (6.9) - (6.12), a one u fazorskom području glase:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_s + \bar{\rho}_s \cdot \underline{\vec{v}} + j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{D}} - \nabla \times (\underline{\vec{v}} \times \underline{\vec{D}}) \quad (7.29)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{B}} + \nabla \times (\underline{\vec{v}} \times \underline{\vec{B}}) \quad (7.30)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = \bar{\rho}_s \quad (7.31)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (7.32)$$

gdje je $\bar{\rho}_s$ fazor volumne gustoće naboja nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora.

Iz divergencije lijeve i desne strane Maxwellove jednađbe (7.29) slijedi da je:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = -\frac{\nabla \cdot \underline{\vec{J}}_s + \nabla \cdot (\bar{\rho}_s \cdot \underline{\vec{v}})}{j \cdot \omega} \quad (7.33)$$

Ako se u izraz (7.33) uvrsti u izraz (7.31), u fazorskom se području dobije sljedeća diferencijalna jednađba kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku:

$$\bar{g}_{st} = -\nabla \cdot \underline{\vec{J}}_s = j \cdot \omega \cdot \bar{\rho}_s + \nabla \cdot (\bar{\rho}_s \cdot \underline{\vec{v}}) = j \cdot \omega \cdot \bar{\rho}_s + \underline{\vec{v}} \cdot (\nabla \bar{\rho}_s) \quad (7.34)$$

Iz Maxwellovih jednađbi (7.29) - (7.32) lako se dobiju sljedeće Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom LIH dielektriku:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_s + \underline{\vec{\rho}}_s \cdot \underline{\vec{v}} + j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \underline{\vec{E}} - \varepsilon \cdot \nabla \times (\underline{\vec{v}} \times \underline{\vec{E}}) \quad (7.35)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \underline{\vec{H}} + \mu \cdot \nabla \times (\underline{\vec{v}} \times \underline{\vec{H}}) \quad (7.36)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\vec{\rho}}_s}{\varepsilon} \quad (7.37)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{H}} = 0 \quad (7.38)$$

7.6. Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku

Maxwellove diferencijalne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih diferencijalnih jednađbi u pokretnom savršenom dielektriku u fazorskom području tako da se u izraze (7.29) i (7.30) uvrsti $\underline{\vec{v}} = 0$. Dobiju se sljedeće diferencijalne jednađbe:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_s + j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{D}} \quad (7.39)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{B}} \quad (7.40)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = \underline{\vec{\rho}}_s \quad (7.41)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = 0 \quad (7.42)$$

koje u slučaju mirujućeg savršenog LIH dielektrika glase:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_s + j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \underline{\vec{E}} \quad (7.43)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \underline{\vec{H}} \quad (7.44)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\vec{\rho}}_s}{\varepsilon} \quad (7.45)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{H}} = 0 \quad (7.46)$$

Ako se u diferencijalnu jednađbu kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku u fazorskom području (7.34) uvrsti $\underline{\vec{v}} = 0$, dobije se jednađba kontinuiteta u mirujućem savršenom dielektriku u fazorskom području, koja glasi:

$$\underline{\vec{g}}_{st} = -\nabla \cdot \underline{\vec{J}}_s = j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{\rho}}_s \quad (7.47)$$

7.7. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu opisane su izrazima (7.1) - (7.4). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom vodljivom sredstvu:

$$\oint_K \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\underline{\vec{J}}_s + \underline{\vec{J}} + \underline{\vec{v}} \cdot (\nabla \cdot \underline{\vec{D}}) + j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{D}}) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\underline{\vec{v}} \times \underline{\vec{D}}) \cdot d\vec{\ell} \quad (7.48)$$

$$\oint_K \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{\ell} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\underline{\vec{v}} \times \underline{\vec{B}}) \cdot d\vec{\ell} \quad (7.49)$$

$$\oint_{\partial V} (\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + j \cdot \omega \cdot \vec{D}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV \quad (7.50)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.51)$$

7.8. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom dobrom vodiču

Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom dobrom vodiču u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih integralnih jednađbi u pokretnom vodljivom sredstvu u fazorskom području tako da se u izraze (7.48) i (7.50) uvrsti $\vec{D} = 0$, što je posljedica zanemarenja pomačnih električnih struja. Dobiju se sljedeće integralne jednađbe:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \bar{I}_s + \bar{I}_{pr} \quad (7.52)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (7.53)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV = \bar{I}_{st} \quad (7.54)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.55)$$

gdje je:

\bar{I}_s - fazor električne struje nezavisnog izvora koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

\bar{I}_{pr} - fazor provodne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

\bar{I}_{st} - fazor električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno vodljivo sredstvo unutar volumena V .

7.9. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu

Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem vodljivom sredstvu u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih integralnih jednađbi u pokretnom vodljivom sredstvu u fazorskom području tako da se u izraze (7.48) - (7.51) uvrsti $\vec{v} = 0$. Dobiju se sljedeće integralne jednađbe:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \bar{I}_s + \bar{I}_{pr} + \bar{I}_{pom} \quad (7.56)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.57)$$

$$\oint_{\partial V} (\vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV = \bar{I}_{st} \quad (7.58)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.59)$$

gdje je \bar{I}_{pom} fazor pomačne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4).

7.10. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču

Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem dobrom vodiču u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih integralnih jednađbi u pokretnom dobrom vodiču u fazorskom području tako da se u izraz (7.53) uvrsti $\vec{v} = 0$. Dobiju se sljedeće integralne jednađbe:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \bar{I}_s + \bar{I}_{pr} \quad (7.60)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.61)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV = \bar{I}_{st} \quad (7.62)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.63)$$

7.11. Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku

Maxwellove diferencijalne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku opisane su izrazima (7.29) - (7.32). Ako se na prve dvije jednađbe primijeni Stokesov integralni teorem opisan izrazom (1.61) i Slikom 1.4, a na druge dvije jednađbe Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobiju se sljedeće Maxwellove integralne jednađbe u pokretnom savršenom dielektriku:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J}_s + \bar{\rho}_s \cdot \vec{v} + j \cdot \omega \cdot \vec{D}) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell} \quad (7.64)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (7.65)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \bar{\rho}_s \cdot dV = \bar{Q}_s \quad (7.66)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.67)$$

gdje je \bar{Q}_s fazor naboja nezavisnog izvora unutar volumena V (Slika 1.3).

Diferencijalna jednađba kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku u fazorskom području opisana je izrazom (7.34). Ako se na taj izraz primijeni Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobije se sljedeća integralna jednađba kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku u fazorskom području:

$$\oint_{\partial V} (\bar{\rho}_s \cdot \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV - j \cdot \omega \cdot \int_V \bar{\rho}_s \cdot dV = \bar{I}_{st} - j \cdot \omega \cdot \bar{Q}_s \quad (7.68)$$

7.12. Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku

Maxwellove integralne jednađbe u mirujućem savršenom dielektriku u fazorskom području mogu se dobiti iz Maxwellovih integralnih jednađbi u pokretnom savršenom dielektriku u fazorskom području tako da se u izrazima (7.64) i (7.65) uvrsti $\vec{v} = 0$. Dobiju se sljedeće integralne jednađbe:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \bar{I}_s + \bar{I}_{pom} \quad (7.69)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.70)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\rho}_s \cdot dV = \bar{Q}_s \quad (7.71)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (7.72)$$

Integralna jednačba kontinuiteta u mirujućem savršenom dielektriku u fazorskom području može se dobiti iz integralne jednačbe kontinuiteta u pokretnom savršenom dielektriku u fazorskom području (7.68) tako da se u nju uvrsti $\vec{v} = 0$. Dobije se sljedeća integralna jednačba kontinuiteta:

$$\bar{I}_{st} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV = j \cdot \omega \cdot \int_V \vec{\rho}_s \cdot dV = j \cdot \omega \cdot \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = j \cdot \omega \cdot \bar{Q}_s \quad (7.73)$$

koja kaže da je električna struja koju nezavisni izvor ispušta u volumen V , ustvari, pomaćna električna struja koju nezavisni izvor ispušta u volumen V .

8. LORENTZOVA SILA

Maxwellove jednadžbe, Lorentzov zakon za silu* i drugi Newtonov zakon daju potpuni klasični opis dinamike naelektriziranih čestica i elektromagnetskog polja.

Na točkasti električni naboj q koji se giba brzinom \vec{v} u elektromagnetskom polju, gledano iz mirujućeg sustava, djeluje Lorentzova sila:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.1)$$

gdje je:

\vec{E} - jakost električnog polja,

\vec{B} - magnetska indukcija.

Lorentzova sila je elektromagnetska sila koja je jednaka zbroju električne sile na električni naboj q :

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E} \quad (8.2)$$

i magnetske sile na taj isti naboj q koji se giba brzinom \vec{v} u magnetskom polju:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.3)$$

Magnetska sila djeluje na naboj samo u slučaju kad se taj naboj giba u magnetskom polju, dok električna sila djeluje na naboj u slučaju kad naboj miruje u električnom polju kao i u slučaju kad se naboj giba u električnom polju.

U općem slučaju, diferencijalni oblik Lorentzovog zakona za silu opisan je sljedećim izrazom:

$$\vec{f} = \rho \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.4)$$

gdje je \vec{f} vektor volumne gustoće sile na električni naboj volumne gustoće ρ koji se giba u elektromagnetskom polju. Budući da se plošna gustoća električne struje uslijed gibanja električnog naboja može opisati izrazom:

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v} \quad (8.5)$$

slijedi da se volumna gustoća sile može opisati i sljedećim izrazom:

$$\vec{f} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (8.6)$$

odakle slijedi integralni oblik poopćenog Lorentzovog zakona za silu:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} \cdot dV = \int_V \rho \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot dV = \int_V (\rho \cdot \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV \quad (8.7)$$

* Lorentzova sila je dobila ime po nizozemskom fizičaru Hendriku Antoону Lorentzu

9. ELEKTROMAGNETSKI POTENCIJALI

Za prikaz elektromagnetskog polja u linearnom, izotropnom i homogenom (LIH) sredstvu koriste se i *pomoćne funkcije* poznate pod imenom elektromagnetski potencijali. Moguće je definirati više različitih parova elektromagnetskih potencijala, uz različitu vezu između njih (baždarske uvjete). Par elektromagnetskih potencijala stvara jedno vektorsko polje i jedno skalarno polje.

Najčešće se koristi par elektromagnetskih potencijala koji stvaraju vektorski magnetski potencijal \vec{A} i skalarni električni potencijal φ koji su, sukladno Maxwellovim jednadžbama, u pokretnom sustavu definirani sljedećim izrazima:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9.1)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (9.2)$$

dok su u mirujućem sustavu definirani izrazima:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9.3)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (9.4)$$

Elektromagnetski potencijali nisu jednoznačne funkcije. Ako se jednom potencijalu doda neka popravka, onda se i drugom potencijalu mora dodati odgovarajuća popravka tako da magnetska indukcija i jakost električnog polja ostanu nepromijenjene funkcije. Neka je u mirujućem sustavu:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\vec{A} + \vec{A}_c) \quad (9.5)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla(\varphi + \varphi_c) - \frac{\partial(\vec{A} + \vec{A}_c)}{\partial t} \quad (9.6)$$

Iz izraza (9.5) slijedi da je popravka vektorskog magnetskog potencijala gradijent nekog skalarnog polja:

$$\vec{A}_c = \nabla\Psi \quad (9.7)$$

jer je:

$$\nabla \times \vec{A}_c = \nabla \times (\nabla\Psi) = 0 \quad (9.8)$$

pa iz izraza (9.6) slijedi da je popravka skalarnog električnog potencijala:

$$\varphi_c = -\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (9.9)$$

9.1. Elektromagnetski potencijali u mirujućem savršenom dielektriku

Prema (6.26) i (6.28), prva i treća Maxwellova diferencijalna jednadžba u mirujućem savršenom LIH dielektriku glase:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{J}_s + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (9.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (9.11)$$

gdje su \vec{J}_s i ρ_s gustoće nezavisnih izvora elektromagnetskog polja, koje zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta (6.30).

Ako se u Maxwellove jednadžbe (9.10) i (9.11) uvrste definicije elektromagnetskih potencijala (9.3) i (9.4), dobiju se sljedeći izrazi:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \cdot \vec{J}_s - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (9.12)$$

$$\nabla \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (9.13)$$

Vrijedi da je:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (9.14)$$

pa izrazi (9.12) i (9.13) poprimaju novi oblik:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (9.15)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (9.16)$$

Ako se u izraze (9.15) i (9.16) uvrsti Lorenzov baždarski uvjet*:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (9.17)$$

dobiju se nehomogene neprigušene valne jednadžbe potencijala:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (9.18)$$

$$\Delta \varphi - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (9.19)$$

Ovo je potpuni sustav jednadžbi ako su zadane gustoće nezavisnih izvora \vec{J}_s i ρ_s .

Lorenzov baždarski uvjet osigurava da je izvor vektorskog magnetskog potencijala samo plošna gustoća električne struje nezavisnog izvora te da je izvor skalarnog električnog potencijala samo volumna gustoća električnog naboja nezavisnog izvora. Elektromagnetski potencijali koji zadovoljavaju Lorenzov baždarski uvjet zovu se Lorenzovim potencijalima.

Iz nehomogenih neprigušenih valnih jednadžbe potencijala u vremenskom području lako se, za sinusoidalno polje, dobiju Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednadžbe potencijala:

$$\Delta \underline{\vec{A}} - \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{\vec{A}} = -\mu \cdot \underline{\vec{J}}_s \quad (9.20)$$

$$\Delta \underline{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{\varphi} = -\frac{\underline{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (9.21)$$

gdje je:

$$\bar{\gamma}^2 = -k^2 = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \quad ; \quad k = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot k \quad (9.22)$$

Realna konstanta k jest *valni broj*, a kompleksna konstanta $\bar{\gamma}$ *valna konstanta*. U slučaju savršenog dielektrika valni broj je realna konstanta, dok je u slučaju vodljivog sredstva valni broj kompleksna konstanta.

* Lorenzov baždarski uvjet dobio je ime po danskom fizičaru i matematičaru Ludwigu Valentinu Lorentzu

9.2. Elektromagnetski potencijali u mirujućem vodljivom sredstvu

Prema (6.50) i (6.52), prva i treća Maxwelllova diferencijalna jednačba u mirujućem vodljivom LIH sredstvu glase:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{J}_s + \mu \cdot \kappa \cdot \vec{E} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.23)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \cdot \vec{J}_s = g_{st} \quad (9.24)$$

gdje je jednačba (9.24) ujedno i jednačba kontinuiteta u mirujućem vodljivom LIH sredstvu.

Ako se u Maxwelllove jednačbe (9.23) i (9.24) uvrste definicije elektromagnetskih potencijala (9.3) i (9.4), dobiju se sljedeći izrazi:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \cdot \vec{J}_s - \mu \cdot \kappa \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (9.25)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -g_{st} \quad (9.26)$$

koji u preinačenom obliku glase:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi \right) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (9.27)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) \right) = -g_{st} \quad (9.28)$$

Ako se u izraze (9.27) i (9.28) uvrsti Lorenzov baždarski uvjet u vodljivom LIH sredstvu:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi = 0 \quad (9.29)$$

dobije se konačni oblik nehomogenih diferencijalnih jednačbi potencijala u vodljivom sredstvu:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (9.30)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta \varphi - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -g_{st} \quad (9.31)$$

koje u dobrom LIH vodiču, uz zanemarenje pomaćnih električnih struja, postaju takozvane nehomogene difuzijske jednačbe potencijala:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (9.32)$$

$$\Delta \varphi - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{g_{st}}{\kappa} \quad (9.33)$$

U mirujućem vodljivom LIH sredstvu *bez izvora* nehomogene diferencijalne jednačbe potencijala (9.30) i (9.31) postaju homogene prigušene valne jednačbe potencijala:

$$\Delta \bar{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \quad (9.34)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = 0 \quad (9.35)$$

Iz nehomogenih diferencijalnih jednačbi potencijala (9.30) i (9.31) u vremenskom području, za sinusoidalno polje, lako se dobiju Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe potencijala:

$$\Delta \bar{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_s \quad (9.36)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (9.37)$$

gdje je:

$$\bar{\gamma}^2 = -\bar{k}^2 = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot \bar{k} \quad (9.38)$$

Iz nehomogenih difuzijskih jednačbi potencijala (9.32) i (9.33) u vremenskom području, za sinusoidalno polje, lako se dobiju Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe potencijala:

$$\Delta \bar{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_s \quad (9.39)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (9.40)$$

gdje je:

$$\bar{\gamma}^2 = -\bar{k}^2 = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \kappa \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot \bar{k} \quad (9.41)$$

Iz izraza (9.38) i (9.41), slijedi da su u vodljivom sredstvu i valni broj \bar{k} i valna konstanta $\bar{\gamma}$ kompleksne konstante.

10. VALNE JEDNADŽBE POLJA U LIH SREDSTVU BEZ IZVORA

Prema (6.50) - (6.54), u mirujućem vodljivom LIH sredstvu *bez izvora* vrijede Maxwellove diferencijalne jednadžbe:

$$\nabla \times \vec{H} = \kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (10.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (10.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (10.4)$$

Vrijedi da je:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} \quad (10.5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (10.6)$$

pa iz izraza (10.1), (10.2), (10.5) i (10.6), slijedi da je:

$$\Delta \vec{H} = -\kappa \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \varepsilon \cdot \frac{\partial (\nabla \times \vec{E})}{\partial t} \quad (10.7)$$

$$\Delta \vec{E} = \mu \cdot \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t} \quad (10.8)$$

Nakon što se izraz (10.2) uvrsti u izraz (10.7) te izraz (10.1) uvrsti u izraz (10.8), dobiju se homogene prigušene valne jednadžbe polja u vodljivom LIH sredstvu bez izvora, koje glase:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (10.9)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (10.10)$$

koje u mirujućem savršenom LIH dielektriku bez izvora postaju homogene neprigušene valne jednadžbe polja:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.11)$$

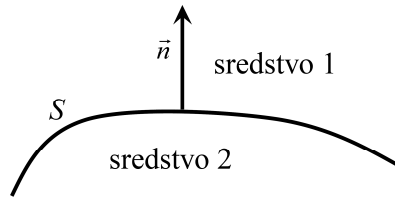
$$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.12)$$

dok homogene prigušene valne jednadžbe polja u mirujućem dobrom LIH vodiču bez izvora, uz zanemarenje pomačnih električnih struja, postaju homogene difuzijske jednadžbe polja:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \Delta \vec{H} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (10.13)$$

11. UVJETI NA GRANICI DVAJU MIRUJUĆIH SREDSTAVA

Na graničnoj plohi S između dva homogena mirujuća sredstva (Slika 11.1) za veličine polja \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} i \vec{J} moraju biti zadovoljeni granični uvjeti.



Slika 11.1. Granična ploha između dva homogena mirujuća sredstva

Uvjeti na granici dvaju mirujućih sredstva slijede iz Maxwellove integralnih jednadžbi u mirujućem sredstvu i ovise o vrsti pojedinog sredstva. U općem slučaju granični uvjeti u vektorskom zapisu glase [2]:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (11.1)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (11.2)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (11.3)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11.4)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) + \nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (11.5)$$

gdje je:

K - strujni oblog (linijska gustoća plošne električne struje) na graničnoj plohi S ,

\vec{K} - vektor strujnog obloga,

σ - plošna gustoća slobodnog električnog naboja na graničnoj plohi S ,

$\nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K}$ - 2D divergencija vektora strujnog obloga u tangencijalnoj ravnini, koja se pojavljuje samo u slučaju ako je jedno od dvaju sredstva supravodljivo.

Ako se umjesto vektora polja koriste normalne i tangencijalne komponente vektora polja, onda opći granični uvjeti (11.1) - (11.5) u skalarnom zapisu glase:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (11.6)$$

$$H_{t1} = H_{t2} + K_t \quad (11.7)$$

$$D_{n1} = D_{n2} + \sigma \quad (11.8)$$

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (11.9)$$

$$J_{n1} = J_{n2} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K} \quad (11.10)$$

gdje su:

$E_{t1}, E_{t2}, H_{t1}, H_{t2}, J_{t1}, J_{t2}$ - tangencijalne komponente vektora polja,

$D_{n1}, D_{n2}, B_{n1}, B_{n2}, J_{n1}, J_{n2}$ - normalne komponente vektora polja.

Plošnu električnu struju linijske gustoće \vec{K} elektromagnetsko polje stvara na granici dvaju sredstava samo u slučaju kad je jedno od sredstava supravodič. Međutim, plošnu električnu struju na granici dvaju sredstava može stvoriti i nezavisni izvor plošne električne struje pa se tada može govoriti o narinutom strujnom oblogu.

11.1. Uvjeti na granici dvaju vodljivih sredstava

Neka su oba mirujuća sredstva vodljiva (Slika 11.1) te neka na graničnoj plohi postoji narinuti strujni oblog. Tada granični uvjeti glase:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (11.11)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (11.12)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (11.13)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11.14)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (11.15)$$

gdje je \vec{K} vektor narinutog strujnog obloga koji stvara vanjski izvor plošne električne struje. Ne postoji strujni oblog koji stvara elektromagnetsko polje.

Iz jednadžbe (11.13) slijedi da se na granici dvaju vodljivih sredstava, koja se nalaze u elektromagnetskom polju, nagomila slobodni električni naboj plošne gustoće σ .

U statičkom slučaju, u graničnom uvjetu (11.15) derivacija plošne gustoće električnog naboja po vremenu jednaka je nuli, dok granični uvjeti (11.11) - (11.14) ostaju nepromijenjeni.

11.2. Uvjeti na granici vodljivog sredstva i savršenog dielektrika

Neka je sredstvo 2 mirujuće vodljivo sredstvo, a sredstvo 1 mirujući savršeni dielektrik (Slika 11.1) te neka na graničnoj plohi postoji narinuti strujni oblog. Tada granični uvjeti glase:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (11.16)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (11.17)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (11.18)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11.19)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{J}_2 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (11.20)$$

jer je:

$$\vec{J}_1 = 0 \quad (11.21)$$

što znači da električna struja ne ulazi u savršeni dielektrik. I u ovom je slučaju \vec{K} vektor narinutog strujnog obloga koji stvara vanjski izvor plošne električne struje. Ne postoji strujni oblog koji stvara elektromagnetsko polje.

U elektrostatičkom slučaju, kada se vodljivo sredstvo 2 nalazi u elektrostatičkom polju, granični uvjeti glase:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0 \quad (11.22)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma \quad (11.23)$$

jer je:

$$\vec{E}_2 = 0 \quad (11.24)$$

što znači da je vodič u elektrostatičkom polju ekvipotencijalan.

Magnetostatičko se polje može razmatrati neovisno o elektrostatičkom polju i za njega vrijede granični uvjeti (11.17) i (11.19).

11.3. Uvjeti na granici dvaju savršenih dielektrika

Neka su oba mirujuća sredstva savršeni dielektrici (Slika 11.1) te neka na granici dvaju dielektrika nema ni narinutog strujnog obloga ni narinutog plošnog električnog naboja. Tada granični uvjeti glase:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (11.25)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \quad (11.26)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \quad (11.27)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11.28)$$

11.4. Uvjeti na granici supravodiča i savršenog dielektrika

Neka je mirujuće sredstvo 2 supravodljivo, a mirujuće sredstvo 1 savršeni dielektrik. Vremenski promjenjivo elektromagnetsko polje ne može prodirjeti u supravodič i tada granični uvjeti glase:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0 \quad (11.29)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{K} \quad (11.30)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma \quad (11.31)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (11.32)$$

$$\nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (11.33)$$

gdje je $\nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K}$ oznaka za 2D divergenciju vektora strujnog obloga u tangencijalnoj ravnini. U ovom slučaju vrijedi da je:

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = 0 \quad (11.34)$$

a strujni oblog i plošnu gustoću električnog naboja na graničnoj plohi stvara elektromagnetsko polje.

U statičkom slučaju elektrostatičko i magnetostatičko polje se razmatraju kao međusobno neovisna polja. Tada je u supravodiču jakost električnog polja jednaka nuli, ali u supravodiču može prodrijeti magnetsko polje ako u njemu teče vremenski konstantna električna struja. Granični uvjeti u tom slučaju glase:

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0 \quad (11.35)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (11.36)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma \quad (11.37)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11.38)$$

$$\nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K} = 0 \quad (11.39)$$

11.5. Uvjeti na granici dvaju sredstava u fazorskom području

Dosad navedeni granični uvjeti na granici dvaju sredstava vrijede u vremenskom području. Ako je elektromagnetsko polje sinusoidalno (vremenski harmonijsko), onda granični uvjeti u općem slučaju (11.1) - (11.5) u fazorskom području glase:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (11.40)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (11.41)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \bar{\sigma} \quad (11.42)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11.43)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) + \nabla_{\text{tr}} \cdot \vec{K} = -j \cdot \omega \cdot \bar{\sigma} \quad (11.44)$$

12. ELEKTROMAGNETSKA ENERGIJA I POYNTINGOV TEOREM

Elektromagnetsko polje je u potpunosti opisano Maxwellovim jednažbama, što znači da se iz njih može izračunati i energija pohranjena u elektromagnetskom polju. Poyntingov teorem je zakon očuvanja elektromagnetske energije, koji ima integralni i diferencijalni oblik, a može se primijeniti i na sinusoidalno elektromagnetsko polje.

12.1. Energija pohranjena u elektromagnetskom polju

Vremenska derivacija energije W pohranjene u elektromagnetskom polju opisana je sljedećim izrazom [6, 12]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_e}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} = \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot dV \quad (12.1)$$

gdje je W_e energija pohranjena u električnom polju, dok je W_m energija pohranjena u magnetskom polju.

Iz izraza (12.1) slijedi da je u općem slučaju energija pohranjena u električnom polju opisana sljedećim izrazom:

$$W_e = \int_{0V}^t \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dV \cdot dt = \int_V \int_0^D \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \cdot dV \quad ; \quad \delta \vec{D} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dt \quad (12.2)$$

a energija pohranjena u magnetskom polju izrazom:

$$W_m = \int_{0V}^t \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dV \cdot dt = \int_V \int_0^B \vec{H} \cdot \delta \vec{B} \cdot dV \quad ; \quad \delta \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dt \quad (12.3)$$

Energija pohranjena u elektromagnetskom polju u volumenu V može se opisati i sljedećim izrazom:

$$W = \int_V w \cdot dV \quad (12.4)$$

gdje je w volumna gustoća energije pohranjene u elektromagnetskom polju, koja je prema (12.2) i (12.3) opisana izrazom:

$$w = \int_0^D \vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \int_0^B \vec{H} \cdot \delta \vec{B} \quad (12.5)$$

koji u posebnom slučaju kada je sredstvo *izotropno i nelinearno* glasi:

$$w = \int_0^D E \cdot \delta D + \int_0^B H \cdot \delta B \quad (12.6)$$

dok u posebnom slučaju kada je sredstvo *izotropno i linearno* glasi:

$$w = \int_0^D \frac{D}{\epsilon} \cdot \delta D + \int_0^B \frac{B}{\mu} \cdot \delta B = \frac{1}{2} \cdot (E \cdot D + H \cdot B) \quad (12.7)$$

a u posebnom slučaju kada je sredstvo *anizotropno i linearno* glasi:

$$w = \frac{1}{2} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (12.8)$$

Slijedi da je energija pohranjena u elektromagnetskom polju u *anizotropnom i linearnom* sredstvu opisana sljedećim izrazom:

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \cdot dV \quad (12.9)$$

dok je energija pohranjena u elektromagnetskom polju u *izotropnom i linearnom* sredstvu opisana sljedećim izrazom:

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V (E \cdot D + H \cdot B) \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\epsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2) \cdot dV \quad (12.10)$$

Energija pohranjena u elektromagnetskom polju mirujućeg *savršenog dielektrika* može se izračunati i integracijom po izvorima i zatvorenoj plohi ∂V koja omeđuje volumen V , bez integracije po volumenu V . Ako se u izraze (12.2) i (12.3) uvrste izrazi (9.3) i (9.4) koji definiraju elektromagnetske potencijale, te uvažavaju Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom dielektriku (6.22) - (6.25), dobije se sljedeći izraz za energiju pohranjenu u mirujućem *nelinearnom savršenom dielektriku*:

$$W = \int_V \left(\int_0^{\rho_s} \varphi \cdot \delta \rho_s + \int_0^A \vec{J}_s \cdot \delta \vec{A} \right) \cdot dV - \oint_{\partial V} \left(\int_0^D \varphi \cdot \delta \vec{D} + \int_0^A \vec{H} \times \delta \vec{A} \right) \cdot d\vec{S} \quad (12.11)$$

gdje je:

φ - skalarni električni potencijal,

\vec{A} - vektorski magnetski potencijal,

$\delta \vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot dt$ - varijacija vektorskog magnetskog potencijala,

\vec{J}_s - vektor plošne gustoće električne struje nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora,

ρ_s - volumna gustoća električnog naboja nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora,

$\delta \rho_s = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \cdot dt$ - varijacija volumne gustoće električnog naboja nezavisnog izvora.

Iz izraza (12.11) slijedi da je energija pohranjena u elektromagnetskom polju *neograničenog nelinearnog* savršenog dielektrika opisana izrazom:

$$W = \int_V \left(\int_0^{\rho_s} \varphi \cdot \delta \rho_s + \int_0^A \vec{J}_s \cdot \delta \vec{A} \right) \cdot dV \quad (12.12)$$

Iz izraza (12.11) lako se dobije da je energija pohranjena u elektromagnetskom polju *linearnog* savršenog dielektrika opisana izrazom:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\varphi \cdot \rho_s + \vec{J}_s \cdot \vec{A}) \cdot dV - \frac{1}{2} \cdot \oint_{\partial V} (\varphi \cdot \vec{D} + \vec{H} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (12.13)$$

pa je energija pohranjena u elektromagnetskom polju *neograničenog linearnog* savršenog dielektrika opisana izrazom:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\varphi \cdot \rho_s + \vec{J}_s \cdot \vec{A}) \cdot dV \quad (12.14)$$

Prema izrazima (12.12) i (12.14), u slučaju neograničenog savršenog dielektrika, umjesto integracije po polju, odnosno po cjelokupnom volumenu V , energija pohranjena u elektromagnetskom polju može se u potpunosti izračunati integracijom po izvorima. Međutim, ako je savršeni dielektrik ograničen, onda se, prema (12.11) i (12.13), mora integrirati i po zatvorenoj plohi ∂V koja omeđuje volumen V , a ne samo po izvorima.

Važno je napomenuti da se u vodljivom sredstvu ni u kojem slučaju ne može energija pohranjena u elektromagnetskom polju izračunati tako da se u potpunosti izbjegne integracija po cjelokupnom volumenu V .

12.2. Poyntingov teorem u vremenskom području

Poyntingov teorem dobio je ime po britanskom fizičaru Johnu Henryju Poyntingu, koji je u elektromagnetsku teoriju uveo i takozvani *Poyntingov vektor** \vec{F} :

$$\vec{F} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (12.15)$$

gdje je \vec{E} vektor jakosti električnog polja, dok je \vec{H} vektor jakosti magnetskog polja. Smjer Poyntingovog vektora jest smjer strujanja elektromagnetske energije, odnosno smjer gibanja elektromagnetskog vala. Poyntingov vektor \vec{F} po svom fizikalnom značenju jest **vektor plošne gustoće trenutne elektromagnetske snage**, a njegova mjerna jedinica je W/m².

Prema izrazima (6.46) i (6.47), u mirujućem vodljivom sredstvu, u točkama u kojima nema nezavisnih izvora, vrijede Maxwellove diferencijalne jednačbe:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12.16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12.17)$$

Nadalje vrijedi da je:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad (12.18)$$

pa se nakon uvrštenja izraza (12.6) i (12.17) u izraz (12.8) dobije da je:

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12.19)$$

odakle slijedi Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, koji glasi:

$$\nabla \cdot \vec{F} + \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (12.20)$$

Ako unutar razmatranog volumena V postoje nezavisni izvori (generatori) koji predaju energiju elektromagnetskom polju unutar tog volumena, onda Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku glasi:

$$\frac{dp_{\text{izv}}}{dV} = \nabla \cdot \vec{F} + \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12.21)$$

gdje je:

p_{izv} - trenutna elektromagnetska snaga nezavisnih izvora koju nezavisni izvori predaju elektromagnetskom polju unutar razmatranog volumena V ,

$\frac{dp_{\text{izv}}}{dV}$ - volumna gustoća trenutne elektromagnetske snage nezavisnih izvora.

Ako se na izraz (12.21) primijeni Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobije se Poyntingov teorem u integralnom obliku koji glasi:

$$p_{\text{izv}} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV + \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot dV \quad (12.22)$$

* U literaturi se Poyntingov vektor ponekad naziva i Umov-Poyntingovim vektorom po Johnu Henryju Poyntingu te po ruskom fizičaru i matematičaru Nikolaju Aleksejeviču Umovu

ili sažeto pisano:

$$p_{izv} = p_{izl} + p_g + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (12.23)$$

gdje je:

p_{izl} - trenutna elektromagnetska snaga koja izlazi iz volumena V ,

p_g - trenutna snaga Jouleovih gubitaka u razmatranom volumenu V ,

W - energija pohranjena u elektromagnetskom polju unutar volumena V ,

$\frac{\partial W}{\partial t}$ - vremenska derivacija energije W , koja je opisana izrazom (12.1),

$S \equiv \partial V$ - zatvorena ploha koja zatvara volumen V .

Prema (12.22) i (12.23), trenutna elektromagnetska snaga koja izlazi iz volumena V kroz zatvorenu plohu S opisana je izrazom:

$$p_{izl} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (12.24)$$

a trenutna snaga Jouleovih gubitaka u razmatranom volumenu V opisana je izrazom:

$$p_g = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot dV \quad (12.25)$$

gdje su, po definiciji, Jouleovi gubici toplinski gubici koji nastaju na radnom otporu kojim teče električna struja. To znači da Jouleove gubitke u promatranom vodljivom sredstvu volumena V stvara električna struja koja teče tim sredstvom. Lako je zaključiti da u posebnom slučaju kad je sredstvo savršeni dielektrik Jouleovi gubici ne postoje.

Prema izrazu (12.23), trenutna elektromagnetska snaga koju volumenu V predaju nezavisni izvori jednaka je zbroju trenutne elektromagnetske snage koja izlazi iz volumena V , trenutne snage Jouleovih gubitaka unutar volumena V i vremenske derivacije energije pohranjene u elektromagnetskom polju unutar volumena V .

Trenutna elektromagnetska snaga koja ulazi u volumen V kroz zatvorenu plohu S opisana je izrazom:

$$p_{ul} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dV = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = - p_{izl} \quad (12.26)$$

pa se izraz (12.23) može napisati u novom obliku:

$$p_{izv} + p_{ul} = p_g + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (12.27)$$

što znači da je zbroj trenutne elektromagnetske snage koju volumenu V predaju nezavisni izvori i trenutne elektromagnetske snage koja ulazi u volumen V kroz zatvorenu plohu S jednaka zbroju trenutne snage Jouleovih gubitaka unutar volumena V i vremenske derivacije energije pohranjene u elektromagnetskom polju unutar volumena V .

Ako je sredstvo **linearno i izotropno**, onda prema izrazima (12.10) i (12.22) Poyntingov teorem u integralnom obliku glasi:

$$p_{izv} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_V \kappa \cdot E^2 \cdot dV + \frac{1}{2} \cdot \int_V \frac{\partial (\epsilon \cdot E^2 + \mu \cdot H^2)}{\partial t} \cdot dV \quad (12.28)$$

Dakle, Poyntingov teorem u integralnom obliku opisuje *tok trenutne elektromagnetske snage**.

* U literaturi se govori i o toku elektromagnetske energije

12.3. Kompleksni Poyntingov teorem

Poyntingov vektor je u vremenskom području definiran izrazom (12.1) i to je po svom fizikalnom značenju vektor plošne gustoće trenutne elektromagnetske snage. Ako je elektromagnetsko polje sinusoidalno (vremenski harmonijsko), onda se koristi fazorska transformacija. U fazorskom području kompleksni Poyntingov vektor je opisan sljedećim izrazom:

$$\underline{\vec{I}} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad (12.29)$$

gdje je:

$\underline{\vec{E}}$ - fazor vektora jakosti električnog polja,

$\underline{\vec{H}}$ - fazor vektora jakosti magnetskog polja,

$\underline{\vec{H}}^*$ - kompleksni konjugat fazora vektora jakosti magnetskog polja $\underline{\vec{H}}$,

* - simbol koji označava kompleksno konjugiranje kompleksnih skalara i kompleksnih vektora.

Realni dio kompleksnog Poyntingovog vektora jednak je srednjoj vrijednosti Poyntingovog vektora u vremenskom području:

$$\vec{I}_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \vec{I} \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}) \cdot dt = \text{Re}(\underline{\vec{I}}) = \text{Re}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) \quad (12.30)$$

gdje je $T = 1/f$ vremenski period sinusoidalne funkcije, dok je f frekvencija sinusoidalnog elektromagnetskog polja.

Po svom fizikalnom značenju kompleksni Poyntingov vektor jest **vektor plošne gustoće kompleksne prividne elektromagnetske snage**, a mjerna jedinica mu je VA/m².

Prema izrazima (7.13) i (7.14), u mirujućem vodljivom sredstvu, u točkama u kojima nema nezavisnih izvora, za sinusoidalno elektromagnetsko polje vrijede Maxwelllove diferencijalne jednadžbe

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{D}} \quad (12.31)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{B}} \quad (12.32)$$

Iz Maxwelllove jednadžbe (12.31) slijedi da je:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}}^* = \underline{\vec{J}}^* - j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{D}}^* \quad (12.33)$$

Nadalje vrijedi da je:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{I}} = \nabla \cdot (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) = \underline{\vec{H}}^* \cdot (\nabla \times \underline{\vec{E}}) - \underline{\vec{E}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{H}}^*) \quad (12.34)$$

pa se nakon uvrštenja izraza (12.32) i (12.33) u izraz (12.34) dobije da je:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{I}} = -\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* - j \cdot \omega \cdot (\underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*) \quad (12.35)$$

odakle slijedi kompleksni Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, koji glasi:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{I}} + \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* + j \cdot \omega \cdot (\underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*) = 0 \quad (12.36)$$

Dakle, kompleksni Poyntingov teorem jest Poyntingov teorem u fazorskom području.

Ako unutar razmatranog volumena V postoje nezavisni izvori (generatori) koji predaju energiju elektromagnetskom polju unutar tog volumena, onda kompleksni Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku glasi:

$$\frac{\partial \bar{S}_{p,izv}}{\partial V} = \nabla \cdot \bar{\underline{I}} + \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{J}}^* + j \cdot \omega \cdot \left(\bar{\underline{B}} \cdot \bar{\underline{H}}^* - \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{D}}^* \right) \quad (12.37)$$

gdje je:

$\bar{S}_{p,izv}$ - kompleksna prividna elektromagnetska snaga nezavisnih izvora koju nezavisni izvori predaju elektromagnetskom polju unutar volumena V ,

$\frac{\partial \bar{S}_{p,izv}}{\partial V}$ - volumna gustoća kompleksne elektromagnetske prividne snage $\bar{S}_{p,izv}$.

Ako se na izraz (12.37) primijeni Ostrogradski-Green-Gaussov integralni teorem opisan izrazom (1.60) i Slikom 1.3, dobije se kompleksni Poyntingov teorem u integralnom obliku:

$$\bar{S}_{p,izv} = \oint_S \bar{\underline{I}} \cdot d\bar{S} + \int_V \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{J}}^* \cdot dV + j \cdot \omega \cdot \int_V \left(\bar{\underline{B}} \cdot \bar{\underline{H}}^* - \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{D}}^* \right) \cdot dV \quad (12.38)$$

koji u slučaju kad je mirujuće vodljivo sredstvo *linearno i izotropno* glasi:

$$\bar{S}_{p,izv} = \oint_S \bar{\underline{I}} \cdot d\bar{S} + \int_V \kappa \cdot E_{ef}^2 \cdot dV + j \cdot \omega \cdot \int_V \left(\mu \cdot H_{ef}^2 - \varepsilon \cdot E_{ef}^2 \right) \cdot dV \quad (12.39)$$

gdje je:

E_{ef} - efektivna vrijednost sinusoidalne jakosti električnog polja,

H_{ef} - efektivna vrijednost sinusoidalne jakosti magnetskog polja.

Kompleksni Poyntingov teorem u integralnom obliku (12.39) u sažetom obliku glasi:

$$\bar{S}_{p,izv} = \bar{S}_{p,izl} + P + j \cdot \omega \cdot 2 \cdot (W_{m,sr} - W_{e,sr}) = \bar{S}_{p,izl} + P + j \cdot Q \quad (12.40)$$

gdje je:

$\bar{S}_{p,izl}$ - kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja izlazi iz volumena V ,

P - radna elektromagnetska snaga u razmatranom volumenu V ,

$W_{m,sr}$ - srednja vrijednost energije pohranjene u magnetskom polju,

$W_{e,sr}$ - srednja vrijednost energije pohranjene u električnom polju,

Q - jalova elektromagnetska snaga u razmatranom volumenu V ,

ω - kružna frekvencija sinusoidalnog elektromagnetskog polja.

Prema izrazima (12.39) i (12.40), kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja izlazi iz volumena V opisana je izrazom:

$$\bar{S}_{p,izl} = \oint_S \bar{\underline{I}} \cdot d\bar{S} \quad (12.41)$$

dok je radna elektromagnetska snaga P jednaka srednjoj snazi Jouleovih gubitaka unutar linearnog i izotropnog vodljivog sredstva:

$$P = P_{g,sr} = \int_V \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{J}}^* \cdot dV = \int_V \kappa \cdot E_{ef}^2 \cdot dV = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p_g \cdot dt \quad (12.42)$$

gdje je p_g trenutna snaga Jouleovih gubitaka unutar linearnog i izotropnog vodljivog sredstva:

$$p_g = \int_V \kappa \cdot E^2 \cdot dV \quad ; \quad E_{ef}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E^2 \cdot dt \quad (12.43)$$

gdje je E trenutna vrijednost sinusoidalne jakosti električnog polja.

Prema izrazima (12.39) i (12.40), srednja vrijednost energije pohranjene u magnetskom polju unutar volumena V opisana je izrazom:

$$W_{m,sr} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{B} \cdot \vec{H}^* \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \mu \cdot H_{ef}^2 \cdot dV = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T W_m \cdot dt \quad (12.44)$$

gdje je W_m trenutna vrijednost energije pohranjene u magnetskom polju unutar linearnog i izotropnog sredstva:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V \mu \cdot H^2 \cdot dV \quad (12.45)$$

gdje je H trenutna vrijednost sinusoidalne jakosti magnetskog polja.

Prema izrazima (12.39) i (12.40), srednja vrijednost energije pohranjene u električnom polju unutar volumena V opisana je izrazom:

$$W_{e,sr} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{E} \cdot \vec{D}^* \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \epsilon \cdot E_{ef}^2 \cdot dV = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T W_e \cdot dt \quad (12.46)$$

gdje je W_e trenutna vrijednost energije pohranjene u električnom polju unutar linearnog i izotropnog sredstva:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V \epsilon \cdot E^2 \cdot dV \quad (12.47)$$

gdje je E trenutna vrijednost sinusoidalne jakosti električnog polja.

Prema izrazima (12.39) i (12.40), jalova elektromagnetska snaga unutar volumena V opisana je izrazom:

$$Q = \omega \cdot 2 \cdot (W_{m,sr} - W_{e,sr}) \quad (12.48)$$

Kompleksni Poyntingov teorem u integralnom obliku u mirujućem vodljivom linearnom i izotropnom sredstvu, opisan izrazom (12.40), može se napisati i u sljedećem obliku:

$$\bar{S}_{p,izv} + \bar{S}_{p,ul} = \bar{S}_p = P + j \cdot Q \quad ; \quad \bar{S}_{p,ul} = -\bar{S}_{p,izl} \quad (12.49)$$

gdje je:

$\bar{S}_{p,ul}$ - kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u volumen V ,

\bar{S}_p - ukupna kompleksna prividna elektromagnetska snaga koju volumen V dobiva

iz nezavisnih izvora unutar volumena V i iz okolnog prostora.

Iz izraza (12.49) slijedi da za sinusoidalno elektromagnetsko polje u mirujućem vodljivom linearnom i izotropnom sredstvu vrijedi da je ukupna kompleksna prividna elektromagnetska snaga koju volumen V dobiva od nezavisnog izvora koji se nalazi unutar volumena V i iz okolnog prostora kroz plohu S jednaka zbroju radne elektromagnetske snaga P koja se troši unutar volumena V i jalove elektromagnetske snaga Q unutar volumena V .

12.4. Kompleksna prividna snaga u sinusoidalnim strujnim krugovima

Kompleksni Poyntingov teorem (12.49) vrijedi i za sinusoidalne linearne strujne krugove. Neka je zadan serijski spoj otpornika otpora R , zavojnice induktiviteta L i kondenzatora kapaciteta C (Slika 12.1). Neka je na ovaj serijski RLC spoj narinut sinusoidalni električni napon u kružne frekvencije ω te neka kroz njega teče sinusoidalna električna struja i . U tom je slučaju trenutna snaga p opisana izrazom:

$$p = u \cdot i \quad (12.50)$$

Sukladno kompleksnom Poyntingovom teoremu (12.49), u fazorskom je području kompleksna prividna snaga opisana sljedećim izrazom:

$$\bar{S}_p = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \bar{Z} \cdot I^2 = P + j \cdot 2 \cdot \omega \cdot (W_{m,sr} - W_{e,sr}) \quad (12.51)$$

gdje je:

\bar{U} - fazor (uzdužnog) električnog napona,

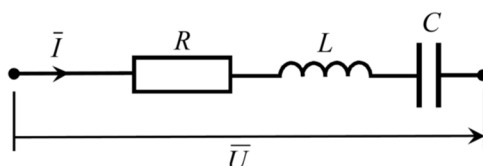
\bar{I} - fazor električne struje,

$I = I_{ef}$ - modul fazora električne struje; efektivna vrijednost sinusoidalne električne struje,

\bar{Z} - kompleksna impedancija serijskog RLC spoja,

$W_{m,sr}$ - srednja vrijednost energije pohranjene u magnetskom polju zavojnice,

$W_{e,sr}$ - srednja vrijednost energije pohranjene u električnom polju kondenzatora.



Slika 12.1. Serijski RLC spoj napajan sinusoidalnom električnom strujom

Srednja vrijednost energije pohranjene u magnetskom polju zavojnice opisana je izrazom:

$$W_{m,sr} = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T W_m \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{L \cdot i^2}{2} \cdot dt \quad (12.52)$$

gdje je trenutna vrijednost energije pohranjene u magnetskom polju zavojnice, protjecane sinusoidalnom električnom strujom i , opisana izrazom:

$$W_m = \frac{L \cdot i^2}{2} \quad (12.53)$$

Srednja vrijednost energije pohranjene u električnom polju kondenzatora opisana je izrazom:

$$W_{e,sr} = \frac{Q_c^2}{2 \cdot C} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T W_e \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{q_c^2}{2 \cdot C} \cdot dt \quad (12.54)$$

gdje je Q_c efektivna vrijednost sinusoidalnog naboja električnog kondenzatora, dok je q_c trenutna vrijednost naboja električnog kondenzatora.

Iz definicije jakosti električne struje $i = dq/dt$ u vremenskom području, slijedi da u fazorskom području vrijedi da je:

$$Q_c^2 = \bar{Q}_c \cdot \bar{Q}_c^* = \frac{\bar{I}}{j \cdot \omega} \cdot \frac{\bar{I}^*}{-j \cdot \omega} = \frac{\bar{I} \cdot \bar{I}^*}{\omega^2} = \frac{I^2}{\omega^2} \quad (12.55)$$

Ako se izraz (12.55) uvrsti u izraz (12.54), dobije se novi izraz za srednju vrijednost energije pohranjene u električnom polju kondenzatora:

$$W_{e,sr} = \frac{I^2}{2 \cdot \omega^2 \cdot C} \quad (12.56)$$

Ako se izrazi (12.52) i (12.56) uvrste u izraz (12.51), dobije se sljedeći izraz za kompleksnu prividnu snagu serijskog RLC spoja:

$$\bar{S}_p = \bar{Z} \cdot I^2 = I^2 \cdot R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \cdot I^2 \quad (12.57)$$

gdje je radna snaga RLC spoja opisana izrazom:

$$P = I^2 \cdot R \quad (12.58)$$

Iz izraza (12.57) slijedi da je kompleksna impedancija serijskog RLC spoja:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = R + j \cdot (X_L - X_C) \quad (12.59)$$

gdje je:

$$X_L = \omega \cdot L \quad (12.60)$$

induktivni otpor ili induktivna reaktancija, dok je:

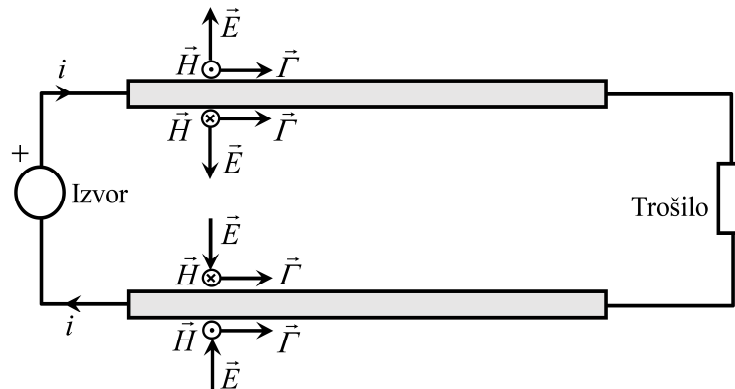
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (12.61)$$

kapacitivni otpor ili kapacitivna reaktancija.

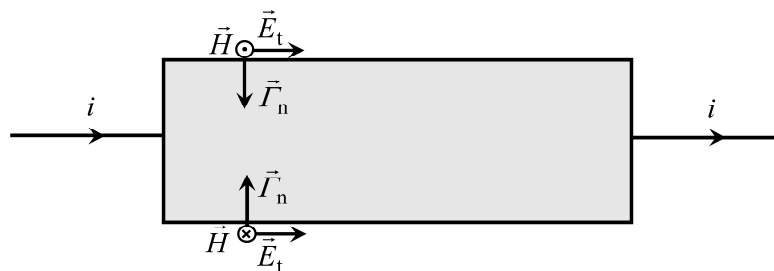
Dakle, iz izraza za kompleksnu prividnu snagu (12.51), za serijski RLC spoj, dobiven je izraz (12.59), a to je općepoznati izraz za kompleksnu impedanciju serijskog RLC spoja.

12.5. Prijenos elektromagnetske energije od izvora do trošila

Neka su izvor i trošilo povezani dvožičnim supravodljivim vodom (Slika 12.2). Unutar supravodiča nema polja pa time ni elektromagnetske energije. Energija se prenosi okolnim prostorom od izvora prema trošilu. Neka je okolni prostor savršeni dielektrik. Ako se zanemare pomažne električne struje, onda ista pravila vrijede i za vremenski konstantni i za vremenski promjenjivi naponski izvor.



Slika 12.2. Prijenos elektromagnetske energije od izvora do trošila



Slika 12.3. Dio elektromagnetske energije koji ulazi u vodič konačne vodljivosti

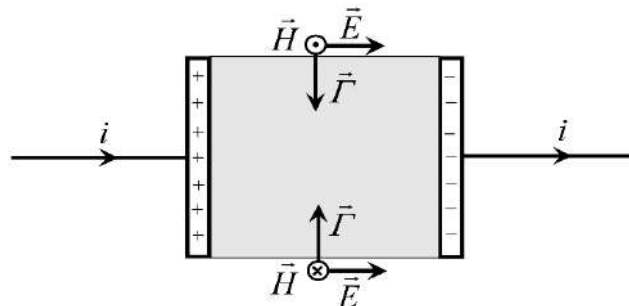
Ako su izvor i trošilo povezani dvožičnim vodom konačne vodljivosti, tada osim normalne (poprečne) komponente jakosti električnog polja koja osigurava prijenos električne energije okolnim dielektrikom od izvora do trošila postoji i tangencijalna (uzdužna) komponenta jakosti električnog polja koja daje komponentu Poyntingovog vektora koja je okomita na vanjsku plohu vodiča i ulazi u vodič (Slika 12.3). Ona stvara Jouleove gubitke i energiju pohranjenu u elektromagnetskom polju unutar vodiča.

U dobrim je vodičima pohranjena električna energija zanemarivog iznosa, a ni pohranjena magnetska energija nema značajan iznos u odnosu na Jouleove gubitke. Dakle, električna se energija od izvora do trošila prenosi okolnim izolatorom (dielektrikom), a vodiči u kojima se stvaraju Jouleovi gubici i pohranjuje mala količina elektromagnetske energije služe samo za usmjeravanje energije od izvora prema trošilu.

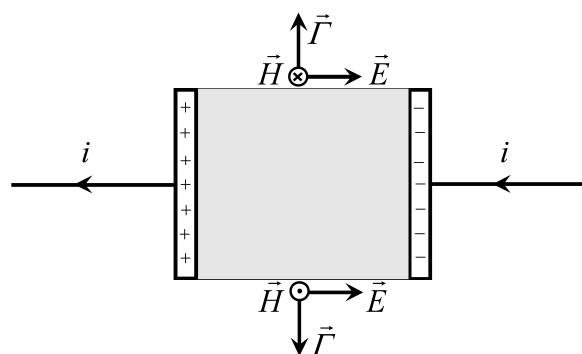
Pomačna električna struja postoji u slučaju vremenski promjenjivog naponskog izvora i ona stvara tzv. jalovu električnu energiju koja se pohranjuje u dielektriku. Ako je dielektrik nesavršen, onda poprečna struja ima i radnu komponentu koja stvara toplinske gubitke u tom dielektriku.

12.6. Punjenje i pražnjenje pločastog električnog kondenzatora

Punjenje električnog kondenzatora prikazano je na Slici 12.4. Kod punjenja električnog kondenzatora, električna energija struji iz okolnog prostora u dielektrik između obloga električnog kondenzatora. Pražnjenje električnog kondenzatora prikazano je na Slici 12.5. Kod pražnjenja električnog kondenzatora, električna energija struji iz dielektrika između obloga električnog kondenzatora u okolni prostor.



Slika 12.4. Punjenje pločastog električnog kondenzatora



Slika 12.5. Pražnjenje pločastog električnog kondenzatora

Tijekom punjenja i pražnjenja električnog kondenzatora, smjer jakosti električnog polja ovisi o polaritetu električnog naboja na oblogama električnog kondenzatora, dok smjer jakosti magnetskog polja ovisi o smjeru pomačne električne struje koja teče kroz dielektrik između obloga električnog kondenzatora.

13. RAZVRSTAVANJE ELEKTROMAGNETSKIH POLJA S OBZIROM NA BRZINU VREMENSKE PROMJENE

U literaturi su elektromagnetska polja razvrstana na različite načine. Neka se elektromagnetska polja s obzirom na brzinu vremenske promjene mogu podijeliti na:

- statička polja (elektrostatička, magnetostatička i stacionarna strujna),
- kvazistatička polja (elektrokvazistatička, magnetokvazistatička i potpunokvazistatička),
- magnetodinamička polja,
- hibridna ili Darwinova polja,
- dinamička polja.

Dinamički problemi su elektromagnetski problemi koji su opisani potpunim sustavom Maxwellovih jednadžbi, bez uvođenja zanemarenja. Hibridno ili Darwinovo elektromagnetsko polje dobije se iz Maxwellovih jednadžbi uz djelomično zanemarenje pomačnih električnih struja.

Kvazistatički elektromagnetski problemi su dinamički elektromagnetski problemi koji se mogu rješavati kao statički, a da se pritom ne čini velika numerička greška. Pritom treba voditi računa o cjelokupnom razmatranom području u kojem se nalazi elektromagnetsko polje. Ako je razmatrano područje neograničeno, tada su uvjeti kvazistatičnosti najstroži.

Važno je definirati kriterij kvazistatičnosti u neograničenom području. *Neka su kvazistatička elektromagnetska polja ona polja koja su poput statičkih polja opisana Poissonovim diferencijalnim jednadžbama Lorenzovih potencijala.* Rješenja Poissonovih diferencijalnih jednadžbi su neprigušeni nezakašnjeli Lorenzovi potencijali, tj. promjene u polju pojavljuju se istog trenutka u svim točkama neograničenog prostora.

Ako je razmatrano područje u kojem se nalazi elektromagnetsko polje ograničeno, onda se poremećaj u bilo kojoj točki razmatranog područja mora gotovo istovremeno osjetiti u svim točkama razmatranog prostora da bi bio zadovoljen uvjet kvazistatičnosti.

U literaturi se elektromagnetsko polje u dobrim vodičima opisano difuzijskim jednadžbama potencijala (9.32) i (9.33) ponekad naziva kvazistatičkim poljem. Međutim, takvo polje ne zadovoljava uvedenu definiciju kvazistatičnosti u neograničenom području. Difuzijske jednadžbe Lorenzovih potencijala dobivene su iz Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi uz zanemarenje pomačnih električnih struja, a takvo zanemarenje samo u savršenom dielektriku daje kvazistatičko polje opisano Poissonovim diferencijalnim jednadžbama Lorenzovih potencijala.

U literaturi se elektromagnetsko polje u dobrim vodičima opisano difuzijskim jednadžbama Lorenzovih potencijala naziva i *magnetodinamičkim* poljem, a to je naziv koji je usvojen i u ovom udžbeniku. U magnetodinamičkom se sinusoidalnom polju potencijali u fazorskom području prigušuju i fazno zakreću, a što je frekvencija sinusoidalnog polja veća to je i gušenje kao i fazno zakretanje veće. Fazno zakretanje u fazorskom području izaziva kašnjenje u vremenskom području.

14. ELEKTROSTATIČKO POLJE

Statičko električno polje ili kraće elektrostatičko polje jest polje koje u savršenom dielektriku stvaraju mirujući električni naboji. Diferencijalne jednačbe elektrostatičkog polja slijede iz Maxwellovih diferencijalnih jednačbi za mirujući savršeni dielektrik (6.22) - (6.25), uz uvažavanje činjenice da u ovom slučaju ne postoji magnetsko polje te da su vremenske derivacije elektromagnetskih veličina jednake nuli.

Iz Maxwellovih diferencijalnih jednačbi (6.23) i (6.24) lako se dobiju diferencijalne jednačbe elektrostatičkog polja, koje glase:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (14.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \equiv \rho \quad (14.2)$$

gdje se u elektrostatici, radi jednostavnosti, simbol ρ koristi za volumnu gustoću električnog naboja nezavisnog izvora.

Iz Maxwellovih integralnih jednačbi u mirujućem savršenom dielektriku (6.73) i (6.74) lako se dobiju jednačbe elektrostatičkog polja u integralnom obliku, koje glase:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (14.3)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV = Q_{ob} \quad (14.4)$$

gdje je Q_{ob} naboj unutar razmatranog volumena V , odnosno naboj obuhvaćen zatvorenom plohom $S \equiv \partial V$ koja omeđuje volumen V . Izrazima (14.2) i (14.4) opisan je Gaussov zakon za elektrostatičko polje u diferencijalnom i integralnom obliku.

Iz izraza (9.4) slijedi da se jakost električnog polja, koje je potencijalno ili konzervativno, može izraziti pomoću negativnog gradijenta skalarnog električnog potencijala:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\text{grad } \varphi \quad (14.5)$$

Prema izrazu (9.19), u mirujućem savršenom LIH dielektriku raspodjela potencijala opisana je Poissonovom diferencijalnom jednačbom:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad ; \quad \rho_s \equiv \rho \quad (14.6)$$

a za savršeni LIH dielektrik, prema (3.1), vrijedi jednačba građe:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (14.7)$$

gdje je ε dielektričnost sredstva, ε_0 dielektričnost vakuumu, dok je ε_r relativna dielektričnost sredstva.

Opće rješenje Poissonove diferencijalne jednačbe jednako je zbroju općeg rješenja Laplaceove diferencijalne jednačbe (homogene Poissonove diferencijalne jednačbe) i partikularnog rješenja Poissonove diferencijalne jednačbe, koje glasi:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\rho \cdot dV}{r} \quad (14.8)$$

gdje je r udaljenost između točke izvora i točke promatranja.

14.1. Skalarni električni potencijal točkastog električnog naboja

Neka se točkasti električni naboj Q nalazi u ishodištu sfernog koordinatnog sustava. Za njega vrijedi da je:

$$\rho = Q \cdot \delta(\vec{r}) \quad (14.9)$$

gdje je $\delta(\vec{r})$ Diracova delta funkcija pridružena točki u ishodištu sfernog koordinatnog sustava.

Ako se izraz (14.9) uvrsti u izraz (14.6), dobije se Poissonova diferencijalna jednadžba za točkasti naboj u mirujućem savršenom LIH dielektriku, koja glasi:

$$\Delta \varphi = -\frac{Q}{\epsilon} \cdot \delta(\vec{r}) \quad (14.10)$$

a njeno partikularno rješenje glasi:

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} \quad (14.11)$$

gdje je r udaljenost točke promatranja od točkastog električnog naboja koji se nalazi u ishodištu sfernog koordinatnog sustava.

Izraz (14.11) opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u neograničenom savršenom LIH dielektriku, a koji stvara točkasti električni naboj Q . U ovom je slučaju raspodjela potencijala centralno simetrična u odnosu na ishodište koordinatnog sustava.

Ako se točkasti električni naboj Q nalazi u točki $T_s = (x_s, y_s, z_s)$ pravokutnog koordinatnog sustava (Slika 14.1), onda Poissonova diferencijalna jednadžba glasi:

$$\Delta \varphi = -\frac{Q}{\epsilon} \cdot \delta(\vec{R}) \quad ; \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_s \quad (14.12)$$

gdje je:

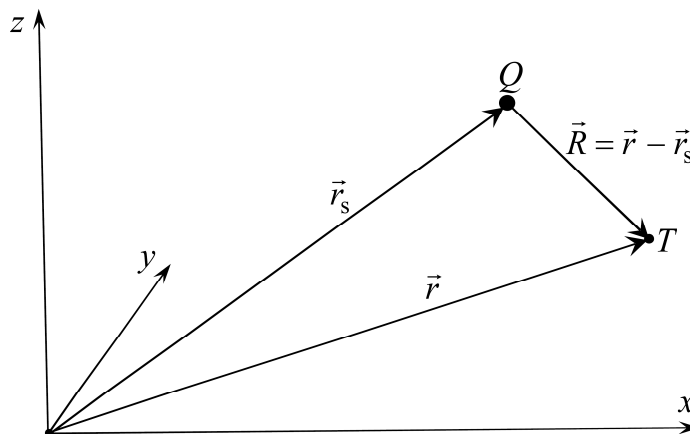
\vec{r} - radijus vektor točke promatranja $T = (x, y, z)$,

\vec{r}_s - radijus vektor točke izvora $T_s = (x_s, y_s, z_s)$ u kojoj se nalazi naboj Q .

Partikularno rješenje Poissonove diferencijalne jednadžbe (14.12) glasi:

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}_s|} \quad (14.13)$$

gdje je R udaljenost između točke izvora i točke promatranja.



Slika 14.1. Točkasti električni naboj u pravokutnom koordinatnom sustavu

14.2. Opća integralna jednadžba skalarnog električnog potencijala

U općem slučaju, raspored električnog naboja može biti takav da ga ima u prostoru V (prostorni električni naboj - volumne gustoće ρ), na plohi S (plošni električni naboj - plošne gustoće σ), na krivulji K (linijski električni naboj - linijske gustoće λ) te da postoji skup točkastih naboja. Sukladno tome, opća integralna jednadžba skalarnog električnog potencijala glasi:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\int_V \frac{\rho \cdot dV}{r} + \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{r} + \int_K \frac{\lambda \cdot d\ell}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \right) ; \quad \sigma \equiv D_n \quad (14.14)$$

gdje je r udaljenost između točke izvora i točke promatranja.

Opća integralna jednadžba može se napisati i u sljedećem obliku:

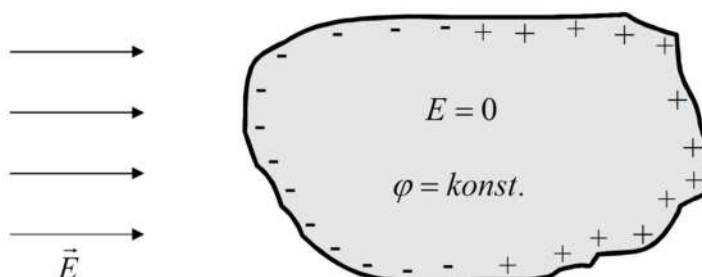
$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\int_V \frac{\rho \cdot dV}{R} + \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{R} + \int_K \frac{\lambda \cdot d\ell}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{R_i} \right) \quad (14.15)$$

gdje je, u ovom slučaju, $R = |\vec{r} - \vec{r}_s|$ udaljenost između točke izvora i točke promatranja.

14.3. Vodič u elektrostatičkom polju

Vodič u elektrostatičkom polju ima konstantan potencijal, dok je jakost električnog polja unutar vodiča jednaka nuli. Sav se električni naboj nalazi na površini vodiča.

Ako se neutralno vodljivo tijelo (vodič) unese u električno polje, pod djelovanjem polja dolazi do preraspodjele neutralnog električnog naboja unutar vodiča (Slika 14.2). Ta se pojava zove: *električna influencija* ili pak *elektrostatička indukcija*.

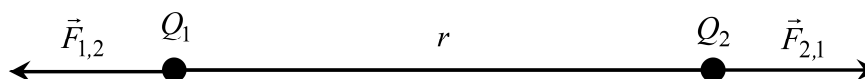


Slika 14.2. Vodič u elektrostatičkom polju

14.4. Coulombov zakon

Francuski fizičar Charles-Augustin de Coulomb je 1785. godine eksperimentalno formulirao zakon koji opisuje silu između dva mirujuća točkasta električna naboja. U svojim pokusima Coulomb je koristio torzijsku vagu, poznatu i pod imenom torzijsko njihalo, napravu koja je mogla detektirati i usporediti vrlo male sile. Ovaj je zakon bio jedno od važnih polazišta Jamesu Clerku Maxwellu na temelju kojih je razvio elektromagnetsku teoriju.

Neka se u zraku nalaze dva osamljena točkasta električna naboja Q_1 i Q_2 na udaljenosti r te neka su oba naboja pozitivna (Slika 14.3).



Slika 14.3. Coulombova sila između dva pozitivna točkasta električna naboja

Po Newtonovom zakonu akcije i reakcije vrijedi da je:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \quad (14.16)$$

gdje je:

$\vec{F}_{1,2}$ - sila kojom električni naboj Q_2 djeluje na električni naboj Q_1 ,

$\vec{F}_{2,1}$ - sila kojom električni naboj Q_1 djeluje na električni naboj Q_2 .

Fizikalna je činjenica da se istoimeni naboji odbijaju, dok se raznoimeni naboji privlače. Iznos sile između naboja Q_1 i Q_2 može se opisati izrazom:

$$F = F_{1,2} = F_{2,1} = k_e \cdot \frac{|Q_1 \cdot Q_2|}{r^2} \quad (14.17)$$

gdje je k_e Coulombova konstanta, koja se u zraku (vakuumu) može opisati izrazom:

$$k_e = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 8,9875517923 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (14.18)$$

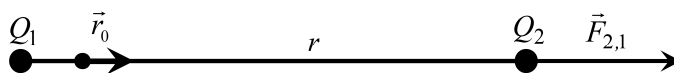
koji za neki drugi savršeni dielektrik glasi:

$$k_e = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \quad (14.19)$$

Sila koja djeluje na električni naboj Q_2 može se opisati i vektorskim izrazom:

$$\vec{F}_{2,1} = k_e \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad (14.20)$$

gdje je \vec{r}_0 jedinični vektor usmjeren od naboja Q_1 prema naboju Q_2 (Slika 14.4).



Slika 14.4. Vektorski zapis Coulombove sile između dva istoimena točkasta naboja

Na temelju izraza (14.27) ili (14.20), lako je zaključiti da sila između dva točkasta električna naboja ima isti oblik kao i Newtonova gravitacijska sila. Međutim, električna sila između dva električna naboja može biti privlačna ili odbojna, dok je gravitacijska sila između dva tijela uvijek privlačna. Važno je istaknuti da je gravitacijska sila između naelektriziranih čestica u potpunosti zanemariva u odnosu na električnu silu između tih čestica, opisanu Coulombovim zakonom. To vrijedi i za elementarne čestice, odnosno za protone i elektrone.

14.5. Jakost električnog polja

Umjesto da se električna sila razmatra kao izravna interakcija dvaju električnih naboja, uzima se da je jedan naboj izvor električnog polja u okolnom prostoru, a sila koja djeluje na drugi naboj u tom prostoru smatra se izravnom interakcijom između električnog polja i drugog električnog naboja. Jakost električnog polja je svojstvo prostora i u bilo kojoj točki prostora može se definirati kao električna ili Coulombova sila koja djeluje na jedinični pozitivni električni naboj u toj točki:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_p} \quad (14.21)$$

gdje je:

\vec{F} - električna ili Coulombova sila na jedinični probni električni naboj,

\vec{E} - vektor jakosti električnog polja,

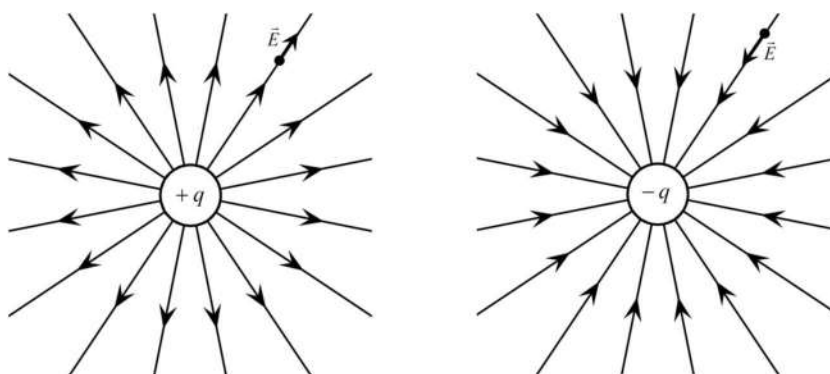
$Q_p = 1 \text{ C}$ - jedinični probni električni naboj.

Jakost električnog polja može se definirati i na sljedeći način:

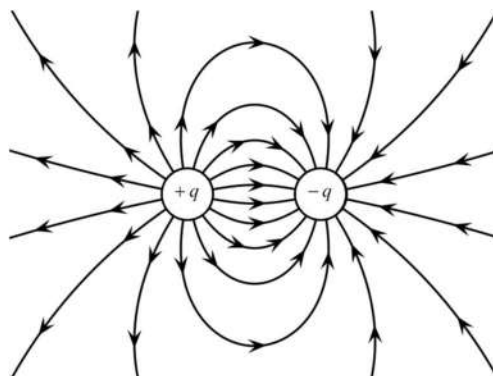
$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (14.22)$$

gdje je q probni točkasti električni naboj.

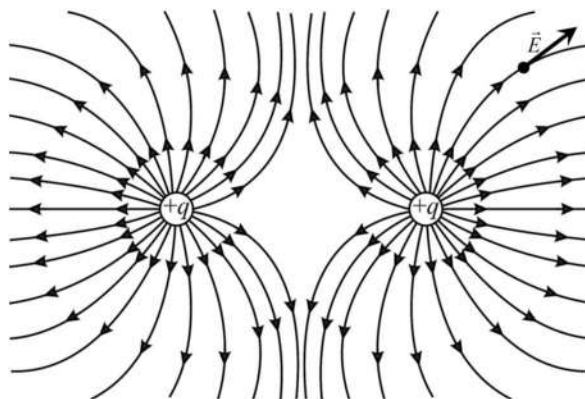
Elektrostatičko se polje grafički zorno prikazuje pomoću električnih silnica (linija električnog polja), a to su usmjerene zamišljene krivulje u smjeru kojih djeluje električna sila na pozitivni točkasti naboj. Vektor jakosti električnog polja je u odnosu na njih tangencijalan. Električne silnice izlaze iz pozitivnih električnih naboja, a završavaju na negativnim električnim nabojima te svojim oblikom opisuju smjer električnog polja u razmatranom dijelu prostora (Slike 14.5 - 14.7).



Slika 14.5. Silnice pozitivnog i negativnog osamljenog točkastog električnog naboja u neograničenom savršenom dielektriku



Slika 14.6. Silnice dvaju raznoimenih točkastih električnih naboja istog iznosa



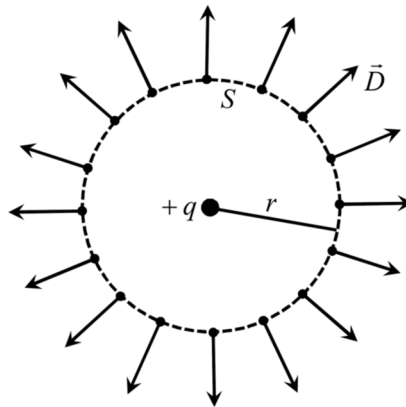
Slika 14.7. Silnice dvaju jednakih pozitivnih točkastih električnih naboja

14.6. Izračun jakosti električnog polja pomoću Gaussovog zakona

Gaussov zakon u integralnom obliku za elektrostatičko polje opisan je izrazom (14.4). U jednostavnim slučajevima kada postoji centralna, osna ili ravninska simetrija, pomoću Gaussovog zakona mogu se dobiti izrazi za jakost električnog polje.

14.6.1. Jakost električnog polja osamljenog točkastog električnog naboja

Neka se osamljeni točkasti električni naboj nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ .



Slika 14.8. Osamljeni pozitivni točkasti električni naboj iznosa q i kuglina ploha S

U ovom slučaju postoji centralna simetrija, što znači da je na kuglinoj plohi S (Slika 14.8), čije je središte točka u kojoj se nalazi električni naboj $+q$, vektor električnog pomaka okomit na zatvorenu plohu S i ima konstantan iznos. U ovom posebnom slučaju, Gaussov zakon, opisan izrazom (14.4), glasi:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot S = \epsilon \cdot E \cdot S = Q_{\text{ob}} = q \quad (14.23)$$

odakle slijedi da je jakost električnog polja u točki koja je za r udaljena od naboja q :

$$E = \frac{q}{\epsilon \cdot S} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} = k_e \cdot \frac{q}{r^2} \quad (14.24)$$

gdje je:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad (14.25)$$

površina kugline plohe (oplošje kugle).

Izraz (14.24) može se dobiti iz Coulombovog zakona opisanog izrazom (14.20) ako se u njega uvrsti:

$$Q_2 \rightarrow q \quad ; \quad Q_2 \rightarrow 1 \text{ C} \quad ; \quad \vec{F}_{2,1} \rightarrow \vec{E} \quad (14.26)$$

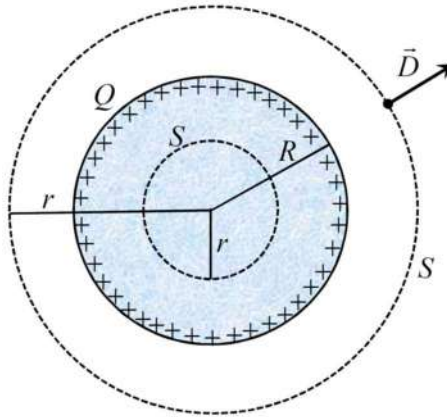
odakle slijedi vektorski izraz za jakost električnog polja osamljenog točkastog naboja:

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad (14.27)$$

gdje je \vec{r}_0 jedinični vektor definiran zrakama koje izlaze iz točke u kojoj se nalazi električni naboj q , usmjeren od električnog naboja q prema beskonačnosti.

14.6.2. Jakost električnog polja osamljene vodljive kugle

Neka se osamljena vodljiva kugla, polumjera R , naelektrizirana pozitivnim električnim nabojem Q , nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ (Slika 14.9).



Slika 14.9. Osamljena vodljiva kugla u neograničenom savršenom LIH dielektriku

Sav se električni naboj Q koji se nalazi na kugli, zbog djelovanja električne sile, nalazi na samoj površini kugle i jednoliko je raspoređen. I u ovom slučaju postoji centralna simetrija u odnosu na središte vodljive kugle. U ovom posebnom slučaju, Gaussov zakon, opisan izrazom (14.4), glasi:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot S = \epsilon \cdot E \cdot S = Q_{\text{ob}} = \begin{cases} 0 & \text{za } r < R \\ Q & \text{za } r > R \end{cases} \quad (14.28)$$

odakle slijedi da je unutar vodljive kugle:

$$E = 0 \quad ; \quad r < R \quad (14.29)$$

dok je izvan vodljive kugle jakost električnog polja, uz uvažavanje smjera polja, opisana vektorskim izrazom:

$$\vec{E} = k_e \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad ; \quad r > R \quad (14.30)$$

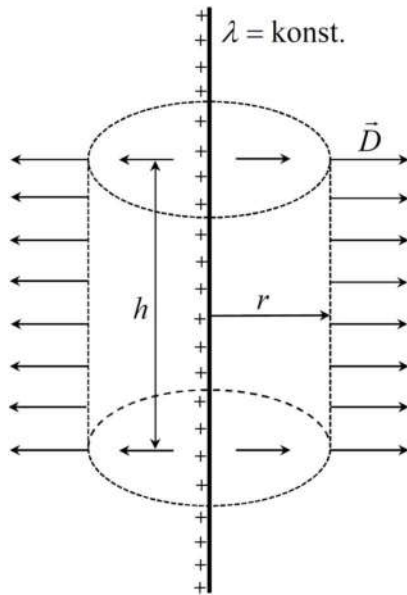
gdje je \vec{r}_0 jedinični vektor definiran zrakama koje izlaze iz središta vodljive kugle, usmjeren od središta kugle prema beskonačnosti.

Prema izrazima (14.28) i (14.30), unutar vodljive kugle jakost električnog polja jednaka je nuli, a izvan vodljive kugle jakost električnog polja ja ista kao u slučaju osamljenog točkastog električnog naboja Q koji se nalazi u točki u kojoj je središte vodljive kugle.

14.6.3. Jakost električnog polja beskonačno dugog pravocrtnog vodiča

Neka se beskonačno dugi pravocrtni vodič naelektriziran pozitivnim nabojem konstantne linijske gustoće λ , nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ (Slika 14.10). Iz uvedenih pretpostavki slijedi da:

- postoji osna simetrija,
- vektor električnog pomaka ima konstantan iznos po plaštu zamišljenog suosnog cilindra po kojem se integrira,
- vektor električnog pomaka okomit je na vodič i leži u bazama suosnog cilindra.



Slika 14.10. Beskonačno dugi pravocrtni vodič u neograničenom savršenom LIH dielektriku naelektriziran nabojem linijske gustoće λ

U ovom posebnom slučaju, Gaussov zakon, opisan izrazom (14.4), za zamišljeni suosni cilindar glasi:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = \varepsilon \cdot E \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = Q_{ob} = \lambda \cdot h \quad (14.31)$$

gdje je E jakost električnog polja na plaštu zamišljenog suosnog cilindra. Važno je istaknuti da je električni tok kroz baze zamišljenog suosnog cilindra jednak nuli.

Iz izraza (14.31) slijedi da je jakost električnog polja u točki koja je za r udaljena od beskonačno dugog pravocrtnog vodiča opisana izrazom:

$$E = E_r = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \quad (14.32)$$

pa vektorski izraz za jakost električnog polja u cilindričnom koordinatnom sustavu glasi:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \cdot \vec{e}_r \quad (14.33)$$

gdje je \vec{e}_r jedinični vektor cilindričnog koordinatnog sustav u kojem beskonačno dugi pravocrtni vodič leži na osi z .

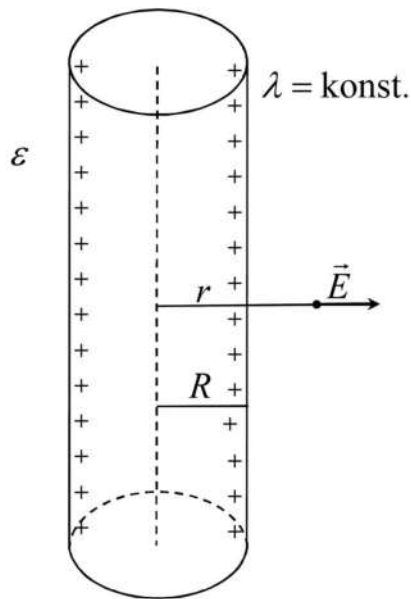
14.6.4. Jakost električnog polja beskonačno dugog pravocrtnog vodljivog cilindra

Neka se beskonačno dugi pravocrtni vodljivi cilindar, polumjera R , naelektriziran pozitivnim nabojem konstantne linijske gustoće λ , nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.11). Pritom cilindar može biti puni ili pak šuplji jer to ne utječe na raspodjelu jakosti električnog polja u razmatranom neograničenom prostoru.

Na temelju prethodnih razmatranja u primjerima 14.6.2 i 14.6.3, lako je zaključiti da je unutar vodljivog cilindra:

$$E = 0 \quad ; \quad r < R \quad (14.34)$$

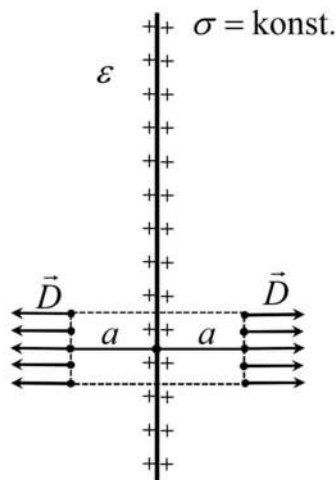
dok je izvan cilindra jakost električnog polja, uz uvažavanje smjera polja, opisana vektorskim izrazom (14.33) koji vrijedi i za beskonačno dugi pravocrtni vodič naelektriziran nabojem konstantne linijske gustoće λ .



Slika 14.11. Beskonačno dugi pravocrtni vodljivi cilindar u neograničenom savršenom LIH dielektriku naelektriziran nabojem linijske gustoće λ

14.6.5. Jakost električnog polja jednoliko naelektrizirane ravnine

Neka se ravnina, naelektrizirana pozitivnim nabojem konstantne plošne gustoće σ , nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.12). Neka je σ plošna gustoća električnog naboja s obje strane ravnine.



Slika 14.12. Ravnina u neograničenom savršenom LIH dielektriku naelektrizirana nabojem plošne gustoće σ

U ovom slučaju postoji ravninska simetrija, što znači da je vektor električnog pomaka okomit na ravninu. U ovom posebnom slučaju, Gaussov zakon, opisan izrazom (14.4), za zamišljeni integracijski cilindar, kojemu su baze paralelne ravnini, glasi:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2 \cdot S_{\text{baze}} = \varepsilon \cdot E \cdot 2 \cdot S_{\text{baze}} = Q_{\text{ob}} = \sigma \cdot S_{\text{baze}} \quad (14.35)$$

gdje je S_{baze} površina baze zamišljenog integracijskog cilindra. Električni tok kroz plašt zamišljenog integracijskog cilindra jednak je nuli.

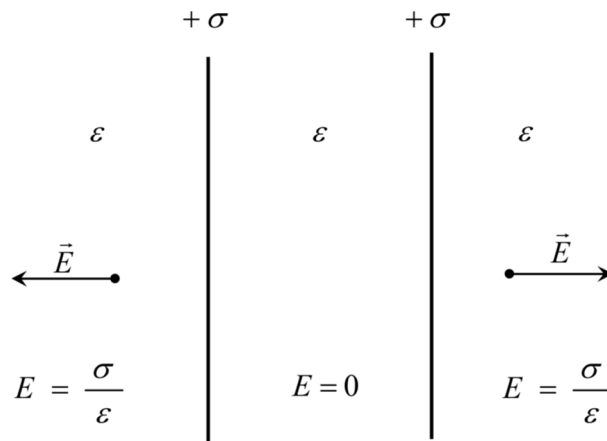
Iz izraza (14.35) slijedi da je jakost električnog polja koju stvara plošni električni naboj na ravnini opisan sljedećim izrazom:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon} = \text{konst.} \quad (14.36)$$

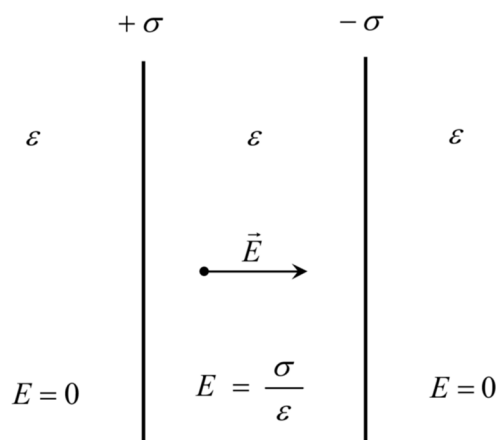
Dakle, jakost električnog polja u cijelom prostoru ima konstantan iznos, a vektor jakosti električnog polja okomit je na ravninu i usmjeren je od ravnine prema beskonačnosti.

Izraz (14.36) koji opisuje jakost električnog polja naelektrizirane ravnine, kao i izraz (14.32) koji opisuje jakost električnog polja naelektriziranog beskonačno dugog pravocrtnog vodiča, mogu se lako dobiti integracijom po izvoru. Pritom je važna činjenica da se, u oba slučaja, unaprijed zna smjer jakosti električnog polja pa se integral vektorske funkcije može preinačiti u integral skalarne funkcije. Ustvari, integrira se komponenta jakosti električnog polja točkastog naboja. Integracijom po izvoru može se dobiti i izraz za jakost električnog polja naelektrizirane vodljive kugle (14.30), ali je to nešto složeniji način rješavanja ovog problema.

Ako su dvije paralelne ravnine naelektrizirane *istoimenim* nabojem konstantne plošne gustoće σ , onda je jakost električnog polja između ravnina jednaka nuli (Slika 14.13). Međutim, ako su dvije paralelne ravnine naelektrizirane *raznoimenim* nabojem konstantne plošne gustoće, onda je jakost električnog polja izvan ravnina jednaka nuli (Slika 14.14). Naime, u oba slučaja vrijedi zakon superpozicije.



Slika 14.13. Dvije ravnine u neograničenom savršenom LIH dielektriku naelektrizirane istoimenim nabojem konstantne plošne gustoće σ



Slika 14.14. Dvije ravnine u neograničenom savršenom LIH dielektriku naelektrizirane raznoimenim nabojem konstantne plošne gustoće

14.7. Električni napon i skalarni električni potencijal

Iz izraza (14.5) koji povezuje jakost električnog polja i skalarni električni potencijal i glasi:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\text{grad}\varphi \quad (14.37)$$

slijedi da je:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} + C \quad (14.38)$$

Za skalarni električni potencijal može se proizvoljno izabrati referentna točka P u kojoj je skalarni električni potencijal jednak nuli:

$$\varphi_P = 0 \text{ V} \quad (14.39)$$

pa iz izraza (14.38) slijedi da je skalarni električni potencijal točke A opisan izrazom:

$$\varphi_A = -\int_P^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (14.40)$$

gdje se po bilo kojoj integracijskoj krivulji može integrirati od točke A do točke P , pa se kaže da je skalarni električni potencijal neovisan o putu integracije.

Električni napon između točaka A i B jednak je radu koji izvrši električna sila pri premještanju jediničnog pozitivnog naboja $Q_p = 1 \text{ C}$ iz točke A u točku B :

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_A^B Q_p \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (14.41)$$

Ova definicija električnog napona vrijedi u općem slučaju, što znači da ona vrijedi i za vremenski promjenjivo elektromagnetsko polje. U vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju električni napon nije jednoznačan, odnosno on ovisi o putu integracije od točke A do točke B . U slučaju elektrostatičkog polja, električni napon je jednoznačan i može se opisati sljedećim izrazom:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_P^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad (14.42)$$

Dakle, u elektrostatičkom polju električni napon između bilo kojih dviju točaka jednak je razlici skalarnih električnih potencijala tih točaka. Sukladno tome, može se reći i da je u elektrostatičkom polju potencijal točke jednak električnom naponu između te točke i referentne točke:

$$\varphi_A = U_{AP} = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (14.43)$$

14.7.1. Skalarni električni potencijal osamljenog točkastog električnog naboja

Neka se osamljeni točkasti naboj q nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.8). Uz pretpostavku da je skalarni električni potencijal u beskonačnosti jednak nuli, integracijom jakosti električnog polja od proizvoljne točke A do beskonačnosti, prema izrazu (14.40), dobije se da je raspodjela skalarnog električnog potencijala u LIH dielektriku opisana izrazom:

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E \cdot dr = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \quad (14.44)$$

gdje je jakost električnog polja osamljenog točkastog naboja q opisana izrazom (14.27), dok je r udaljenost točke A od točke u kojoj se nalazi naboj q , odnosno od središta sfernog koordinatnog sustava.

14.7.2. Skalarni električni potencijal osamljene vodljive kugle

Neka se osamljena vodljiva kugla polumjera R , naelektrizirana nabojem Q nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.9). Uz pretpostavku da je skalarni električni potencijal u beskonačnosti jednak nuli, integracijom jakosti električnog polja od proizvoljne točke A do beskonačnosti, prema izrazu (14.40), dobije se da je raspodjela skalarnog električnog potencijala unutar vodljive kugle i u LIH dielektriku opisana izrazima:

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R 0 \cdot dr + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R} \quad ; \quad r \leq R \quad (14.45)$$

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \quad ; \quad r \geq R \quad (14.46)$$

gdje je jakost električnog polja opisana izrazima (14.29) i (14.30), dok je r udaljenost točke A od središta vodljive kugle, odnosno od središta sfernog koordinatnog sustava.

Dakle, skalarni električni potencijal unutar vodljive kugle je konstantan i jednak je potencijalu na rubu kugle, a izvan kugle opada s porastom udaljenosti točke A od središta kugle.

14.7.3. Skalarni električni potencijal beskonačno dugog pravocrtnog vodiča

Neka se osamljeni beskonačno dugi pravocrtni vodič naelektriziran nabojem konstantne linijske gustoće λ nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.10). Uz pretpostavku da je skalarni električni potencijal jednak nuli za $r = r_0$, integracijom jakosti električnog polja od proizvoljne točke A do kružnice $r = r_0$, prema izrazu (14.40), dobije se da je raspodjela skalarnog električnog potencijala u LIH dielektriku opisana izrazom:

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_r^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r}{r_0} \quad (14.47)$$

gdje je jakost električnog polja opisana izrazom (14.33), dok je r najkraća udaljenost točke A od beskonačno dugog pravocrtnog vodiča.

Iz izraza (14.47) lako je zaključiti da se u slučaju beskonačno dugog pravocrtnog vodiča ne može pretpostaviti da je referentna točka u beskonačnosti jer bi tada skalarni električni potencijal u cjelokupnom prostoru bio beskonačan. Ovakvi se nefizikalni primjeri, koji se ne pojavljuju u stvarnosti, nazivaju akademskim primjerima.

14.7.4. Skalarni električni potencijal beskonačno dugog vodljivog cilindra

Neka se osamljeni beskonačno dugi pravocrtni vodljivi cilindar polumjera R naelektriziran nabojem konstantne linijske gustoće λ nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.11), Uz pretpostavku da je skalarni električni potencijal jednak nuli za $r = r_0$, integracijom jakosti električnog polja od proizvoljne točke A do kružnice $r = r_0$, prema izrazu (14.40), dobije se da je raspodjela skalarnog električnog potencijala unutar vodljivog cilindra i u LIH dielektriku opisana izrazima:

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R 0 \cdot dr + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_R^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{R}{r_0} \quad ; \quad r \leq R \quad (14.48)$$

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_r^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r}{r_0} \quad ; \quad r \geq R \quad (14.49)$$

gdje je jakost električnog polja opisana izrazima (14.33) i (14.34), dok je r najkraća udaljenost točke A od osi beskonačno dugog vodljivog cilindra.

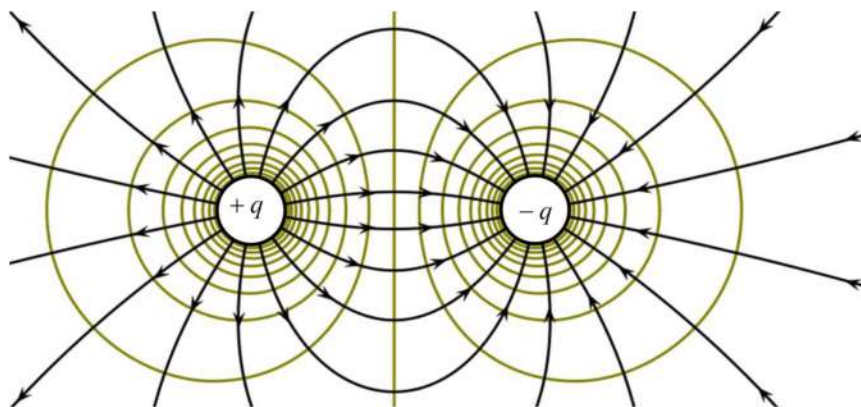
14.7.5. Skalarni električni potencijal naelektrizirane ravnine

Neka se ravnina naelektrizirana nabojem konstantne plošne gustoće σ , nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.12). Uz pretpostavku da je skalarni električni potencijal jednak nuli za $x = x_0$ i $x = -x_0$, integracijom jakosti električnog polja od proizvoljne točke A do referentne točke, prema izrazu (14.40), dobije se da je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana izrazom:

$$\varphi = \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_x^{x_0} E \cdot dx = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (|x_0| - |x|) \quad (14.50)$$

gdje je jakost električnog polja opisana izrazom (14.36), dok je x najkraća udaljenost točke A od naelektrizirane ravnine.

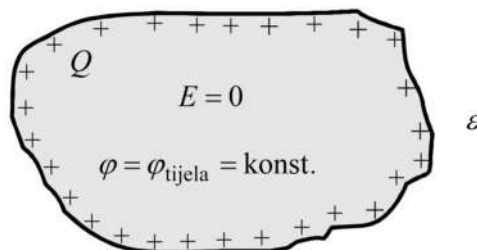
Plohe na kojima je skalarni električni potencijal konstantan nazivaju se ekvipotencijalnim plohama, a u 2D grafičkom prikazu elektrostatičkog polja postoje krivulje na kojima je skalarni električni potencijal konstantan, a koje se nazivaju ekvipotencijalnim linijama. U elektrostatičkom polju, silnice su okomite na ekvipotencijalne plohe, što znači da su u 2D grafičkom prikazu elektrostatičkog polja ekvipotencijalne linije i silnice međusobno okomite. Za ilustraciju, na Slici 14.15 prikazane su ekvipotencijalne linije i silnice dvaju raznoimenih točkastih električnih naboja istog iznosa.



Slika 14.15. Ekvipotencijalne linije i silnice dvaju raznoimenih naboja istog iznosa

14.8. Kapacitet vodljivog tijela

Neka se osamljeno vodljivo tijelo naelektrizirano pozitivnim nabojem Q nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε te neka mu je potencijal $\varphi = \varphi_{\text{tijela}}$ (Slika 14.16).



Slika 14.16. Naelektrizirano osamljeno vodljivo tijelo u savršenom LIH dielektriku

U neograničenom LIH dielektriku potencijal vodljivog tijela proporcionalan je ukupnom električnom naboju Q na vodljivom tijelu pa vrijedi da je:

$$Q = C \cdot \varphi_{\text{tijela}} \quad (14.51)$$

gdje je C kapacitet vodljivog tijela. Jedinica za kapacitet je farad ($F = C/V$). U LIH dielektriku kapacitet vodljivog tijela je funkcija geometrije i dielektričnosti sredstva te ne ovisi ni o električnom naboju ni o skalarnom električnom potencijalu vodljivog tijela.

Neka se *osamljena vodljiva kugla* polumjera R , naelektrizirana nabojem Q nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε (Slika 14.9). Potencijal kugle opisan je izrazom (14.45), odakle slijedi da je:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R} = \frac{Q}{C} \quad (14.52)$$

što znači da je kapacitet osamljene vodljive kugle u neograničenom LIH dielektriku opisan izrazom:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R \quad (14.53)$$

Dakle, kapacitet osamljene vodljive kugle je funkcija polumjera kugle R i dielektričnosti sredstva ε te ne ovisi ni o naboju ni o potencijalu vodljive kugle.

14.9. Kapacitet električnog kondenzatora

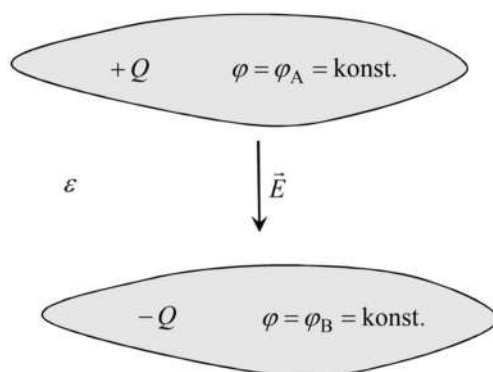
Električni kondenzator je sastavnica električnog strujnog kruga koja služi za pohranu električne energije. Tvore ga dvije vodljive obloge (elektrode) između kojih se nalazi dielektrik. Ako se pretpostavi da je dielektrik savršen (potpuno nevodljiv), onda se može govoriti i o savršenom kondenzatoru.

Neka električni kondenzator tvore dvije vodljive obloge A i B naelektrizirane raznoimenim nabojima istog iznosa, između kojih se nalazi *savršeni* LIH dielektrik dielektričnosti ε (Slika 14.17).

Ako je dielektrik između obloga električnog kondenzatora linearan, onda je napon između obloga električnog kondenzatora proporcionalan naboju na oblogama kondenzatora pa vrijedi da je:

$$Q = C \cdot U_{AB} = C \cdot (\varphi_A - \varphi_B) \quad (14.54)$$

gdje je C kapacitet električnog kondenzatora koji ovisi o obliku obloga, izvedbi obloga, međusobnoj udaljenosti obloga i dielektričnosti okolnog sredstva.



Slika 14.17. Električni kondenzator

14.9.1. Kapacitet pločastog električnog kondenzatora

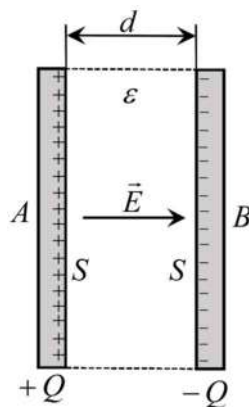
Neka pločasti električni kondenzator tvore dvije vodljive paralelne ploče iste površine S , udaljene za d , te neka je između njih LIH savršeni dielektrik dielektričnosti ε (Slika 14.18).

Općepoznati izraz za kapacitet pločastog električnog kondenzatora dobije se uz zanemarenje rubnih efekata, a to znači da se uzima da između obloga električnog kondenzatora postoji homogeno električno polje. Ustvari, pločasti električni kondenzator se teorijski razmatra kao da je isječak iz dvije međusobno paralelne ravnine naelektrizirane raznoimenim nabojima konstantne plošne gustoće (Slika 14.14), a to znači da se jakost električnog polja aproksimira sljedećim izrazom:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{konst.} \quad (14.55)$$

dok se plošna gustoća električnog naboja na pozitivnoj oblozi kondenzatora aproksimira izrazom:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \text{konst.} \quad (14.56)$$



Slika 14.18. Pločasti električni kondenzator

Nadalje, napon između obloga električnog kondenzatora opisan je izrazom:

$$U = U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot d \quad (14.57)$$

Iz prethodnih izraza slijedi da je:

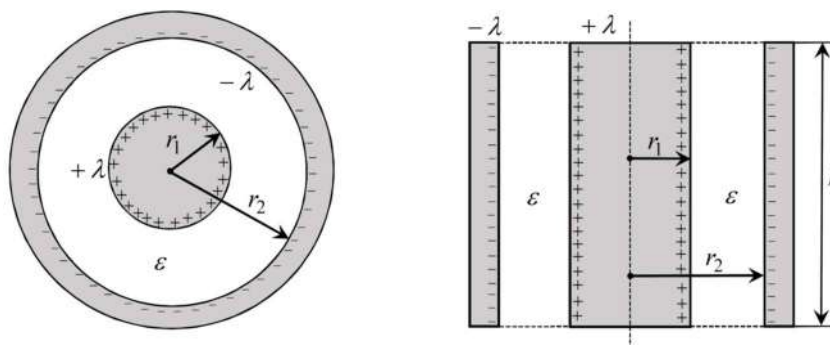
$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \quad (14.58)$$

odakle se lako dobije izraz za kapacitet pločastog električnog kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} \quad (14.59)$$

14.9.2. Kapacitet cilindričnog električnog kondenzatora

Neka cilindrični električni kondenzator tvore dva vodljiva suosna cilindra duljine ℓ te neka je između njih LIH savršeni dielektrik dielektričnosti ε (Slika 14.19).



Slika 14.19. Cilindrični električni kondenzator

Izraz za kapacitet cilindričnog električnog kondenzatora dobije se uz zanemarenje rubnih efekata, a to znači da se kod izračuna jakosti električnog polja cilindrični električni kondenzator teorijski razmatra

kao da je isječak iz dva beskonačno duga, suosna, vodljiva cilindra naelektrizirana raznoimenim nabojima konstantne linijske gustoće. Dakle, jakost električnog polja u dielektriku aproksimira se izrazom (14.33) koji vrijedi za beskonačno dugi pravocrtni cilindar u neograničenom savršenom dielektriku:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \cdot \vec{e}_r \quad ; \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (14.60)$$

gdje je:

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} \quad (14.61)$$

Nadalje, napon između obloga električnog kondenzatora opisan je izrazom:

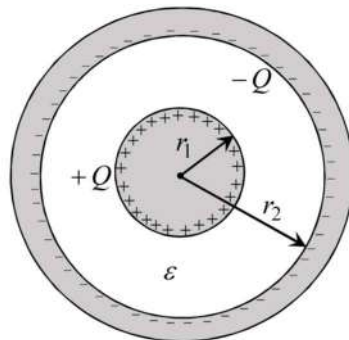
$$U = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (14.62)$$

odakle se lako dobije izraz za kapacitet cilindričnog električnog kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (14.63)$$

14.9.3. Kapacitet kuglastog električnog kondenzatora

Neka kuglasti električni kondenzator tvore dvije vodljive koncentrične kugle te neka je između njih LIH savršeni dielektrik dielektričnosti ε (Slika 14.20).



Slika 14.20. Kuglasti električni kondenzator

Jakost električnog polja u dielektriku opisana je izrazom (14.30) koji vrijedi za naelektriziranu vodljivu kuglu u neograničenom savršenom dielektriku:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \vec{r}_0 \quad ; \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (14.64)$$

Nadalje, napon između obloga električnog kondenzatora opisan je izrazom:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (14.65)$$

odakle se lako dobije izraz za kapacitet kuglastog električnog kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad (14.66)$$

Vrijedi da je:

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_1 \quad (14.67)$$

a to je, prema izrazu (14.53), kapacitet osamljene vodljive kugle polumjera r_1 u neograničenom LHM dielektriku dielektričnosti ε .

14.9.4. Izračun kapaciteta električnog kondenzatora iz pohranjene energije

Iz definicije električnog napona slijedi da se trenutna vrijednost napona električnog kondenzatora u , tijekom punjenja ili pražnjenja električnog kondenzatora, može opisati sljedećim izrazom:

$$u = \frac{dW_e}{dq} \quad (14.68)$$

gdje je W_e energija pohranjena u električnom polju kondenzatora, ili drukčije rečeno energija električnog kondenzatora, dok je q trenutna vrijednost naboja električnog kondenzatora.

Ako je savršeni dielektrik linearan i izotropan, slijedi da je:

$$dW_e = u \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq \quad ; \quad u = \frac{q}{C} \quad (14.69)$$

pa je energija električnog kondenzatora naelektriziranog nabojem Q opisana izrazom:

$$W_e = \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dq = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{C \cdot U^2}{2} \quad ; \quad Q = C \cdot U \quad (14.70)$$

gdje je U napon električnog kondenzatora.

Prema izrazu (12.10), energija pohranjena u električnom polju kondenzatora kojemu je dielektrik *linearan i izotropan* opisana je izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V E \cdot D \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV \quad (14.71)$$

Iz izraza (14.70) i (14.71), slijedi da se kapacitet električnog kondenzatora, kojemu je dielektrik linearan i izotropan, može izračunati iz energije pohranjene u električnom polju kondenzatora korištenjem sljedećeg izraza:

$$C = \frac{1}{U^2} \cdot \int_V E \cdot D \cdot dV = \frac{1}{U^2} \cdot \int_V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV = \frac{Q^2}{\int_V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV} \quad (14.72)$$

Za pločasti električni kondenzator (Slika 14.18) vrijedi da je:

$$C = \frac{1}{U^2} \cdot \int_V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV = \frac{1}{U^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot S \cdot d = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} \quad ; \quad E = \frac{U}{d} \quad (14.73)$$

Za cilindrični električni kondenzator (Slika 14.19) vrijedi da je:

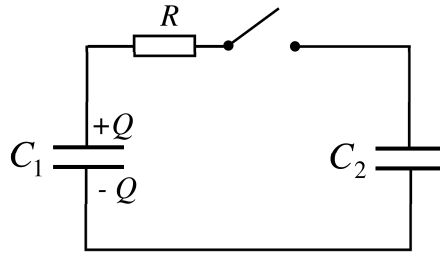
$$C = \frac{Q^2}{\int_V \varepsilon \cdot E^2 \cdot dV} = \frac{Q^2}{\varepsilon \cdot \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{Q/\ell}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r}\right)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot dr} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (14.74)$$

Za kuglasti električni kondenzator (Slika 14.20) vrijedi da je:

$$C = \frac{Q^2}{\int_V \epsilon \cdot E^2 \cdot dV} = \frac{Q^2}{\epsilon \cdot \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \right)^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad (14.75)$$

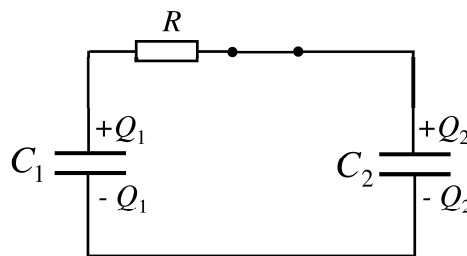
14.9.5. Energija izoliranog sustava dvaju električnih kondenzatora

Neka izolirani sustav (sustav odspojen od izvora električne energije) tvore dva električna kondenzatora od kojih je jedan naelektriziran nabojem Q , dok je drugi kondenzator prazan (Slika 14.21).



Slika 14.21. Izolirani sustav električnih kondenzatora kad je sklopka otvorena

U izoliranom sustavu vrijedi da je $Q = \text{konst.}$, a nakon zatvaranje sklopke električni se naboj raspodjeli na oba kondenzatora tako da im električni naponi budu jednaki; kao da su paralelno spojeni kondenzatori (Slika 14.22).



Slika 14.22. Izolirani sustav električnih kondenzatora kad je sklopka zatvorena

Omjer energije sustava kondenzatora kad je sklopka otvorena i kad je sklopka zatvorena opisan je izrazom:

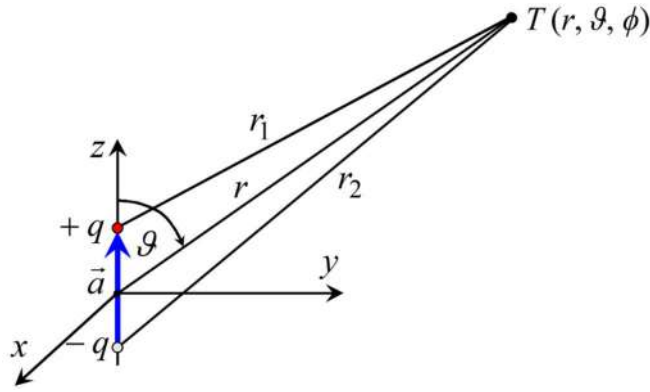
$$\frac{W_{\text{zatvoreno}}}{W_{\text{otvoreno}}} = \frac{\frac{Q^2}{2 \cdot (C_1 + C_2)}}{\frac{Q^2}{2 \cdot C_1}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (14.76)$$

U posebnom slučaju kad električni kondenzatori imaju isti kapacitet, nakon zatvaranja sklopke, energija sustava dvaju izoliranih električnih kondenzatora se prepolovi.

U općem slučaju, u nekom složenom izoliranom sustavu, nakon zatvaranja neke sklopke, ukupna energija sustava ili pada ili pak ostaje ista. Međutim, u nekom složenom neizoliranom sustavu (sustavu spojenom na izvor električne energije), nakon zatvaranja neke sklopke, ukupna energija sustava može pasti, porasti ili pak ostati ista.

14.10. Skalarni električni potencijal i polje električnog dipola

Električni dipol tvore dva raznoimena električna naboja istog iznosa čija je međusobna udaljenost mnogo manja od udaljenosti naboja od točke promatranja ($r \gg a$). Dipol se smješta u sferni koordinatni sustav (r, ϑ, ϕ) , a raspodjela skalarnog električnog potencijala ne ovisi o kutu ϕ (Slika 14.23). Neka se dipol nalazi u savešenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ .



Slika 14.23. Električni dipol u neograničenom savršenom LIH dielektriku

U neograničenom LIH dielektriku raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana je sljedećim egzaktnim izrazom:

$$\varphi = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \right) \quad (14.77)$$

Za $r \gg a$ vrijedi da je:

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2} \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r_2 \approx r + \frac{a}{2} \cdot \cos \vartheta \quad (14.78)$$

pa je:

$$r_2 - r_1 \approx a \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r_1 \cdot r_2 \approx r^2 - \frac{a^2}{4} \cdot \cos^2 \vartheta \approx r^2 \quad (14.79)$$

odakle slijedi da je:

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \approx \frac{a \cdot \cos \vartheta}{r^2} \quad (14.80)$$

Ako se aproksimacija (14.80) uvrsti u izraz (14.77), onda se dobije sljedeći izraz koji približno opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala električnog dipola:

$$\varphi = \frac{q \cdot a \cdot \cos \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \quad (14.81)$$

Nadalje, vrijedi da je:

$$q \cdot a \cdot \cos \vartheta = \frac{q}{r} \cdot \vec{a} \cdot \vec{r} \quad (14.82)$$

gdje je vektor \vec{a} usmjeren od negativnog električnog naboja prema pozitivnom električnom naboju, a njegova duljina jednaka je udaljenosti između točkastih naboja koji tvore električni dipol.

Neka je:

$$q \cdot \vec{a} = \vec{p} \quad (14.83)$$

gdje je \vec{p} dipolni moment.

Iz izraza (14.83) i (14.81), slijedi da se raspodjela skalarnog električnog potencijala električnog dipola može opisati i sljedećim izrazom:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^3} = \frac{p \cdot \cos \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2} \quad (14.84)$$

Iz uvjeta $\varphi = \text{konst.}$, slijedi da je jednadžba ekvipotencijalnih ploha, a ujedno i ekvipotencijalnih linija električnog dipola:

$$\frac{\cos \vartheta}{r^2} = C \quad (14.85)$$

gdje je C konstanta pridružena ekvipotencijalnoj plohi.

Za jakost električnog polja u sfernom koordinatnom sustavu vrijedi da je:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (14.86)$$

pa slijedi da su komponente vektora jakosti električnog polja električnog dipola, kojemu je raspodjela potencijala opisana izrazom (14.84), opisane izrazima:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{p \cdot \cos\vartheta}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^3} \quad (14.87)$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = \frac{p \cdot \sin\vartheta}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^3} \quad (14.88)$$

$$E_\phi = 0 \quad (14.89)$$

Jednadžba električnih silnica, za $\phi = \text{konst.}$, slijedi iz uvjeta:

$$\vec{E} \times d\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\vartheta & \vec{e}_\phi \\ E_r & E_\vartheta & 0 \\ dr & r \cdot d\vartheta & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (14.90)$$

odakle slijedi da je:

$$r \cdot E_r \cdot d\vartheta = E_\vartheta \cdot dr \quad (14.91)$$

pa je, uz uvažavanje izraza (14.87) i (14.88):

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\vartheta} \cdot d\vartheta = 2 \cdot \text{ctg} \vartheta \cdot d\vartheta \quad (14.92)$$

Nakon integracije lijeve i desne strane izraza (14.92), dobije se sljedeći izraz:

$$\ln r = 2 \cdot \ln(\sin \vartheta) + \ln C = \ln(C \cdot \sin^2 \vartheta) \quad (14.93)$$

odakle slijedi konačni izraz za silnicu električnog dipola:

$$\frac{r}{\sin^2 \vartheta} = C \quad (14.94)$$

gdje je C konstanta pridružena silnici.

14.11. Energija pohranjena u elektrostatičkom polju

U općem slučaju energija pohranjena u električnom polju opisana je izrazom (12.2), dok je u *linearnom* savršenom dielektriku, prema izrazu (12.9), energija pohranjena u električnom polju opisana izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \cdot dV \quad (14.95)$$

dok je u slučaju kad je savršeni dielektrik linearan i izotropan energija pohranjena u električnom polju opisana izrazom (14.71).

U neograničenom linearnom savršenom dielektriku pohranjena elektrostatička energija može se opisati i sljedećim izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V \rho_s \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \varphi_k \quad (14.96)$$

gdje su Q_k i φ_k električni naboj i skalarni električni potencijal k-tog vodljivog tijela.

Ako u neograničenom linearnom sredstvu između vodljivih tijela nema slobodnog električnog naboja, onda je pohranjena elektrostatička energija opisana izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \varphi_k \quad (14.97)$$

14.12. Sila u elektrostatičkom polju izoliranog sustava

Sila se može izračunati iz energije sustava, odnosno iz električnog kapaciteta sustava. Izolirani sustav jest sustav koji s okolinom ne razmjenjuje energiju, odnosno to je sustav u kojem je ukupna količina električnog naboja nepromjenjiva. Takav sustav teži stanju u kojem je energija minimalna pa je u njemu sila opisana izrazom:

$$\vec{F} = -\nabla W_e \quad (14.98)$$

gdje je W_e energija pohranjena u elektrostatičkom polju.

U izoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je izrazom:

$$\vec{F} = -\left. \frac{\partial W_e}{\partial s} \cdot \vec{s}_0 = -\vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_e}{\partial s} \right|_{Q=\text{konst.}} \quad (14.99)$$

gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor.

U izoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je i izrazom:

$$\vec{F} = -\left. \vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_e}{\partial s} \right|_{Q=\text{konst.}} = -\vec{s}_0 \cdot \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{C} \right) = \vec{s}_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Q}{C} \right)^2 \cdot \frac{\partial C}{\partial s} \quad (14.100)$$

gdje su Q i C električni naboj i električni kapacitet izoliranog sustava.

14.12.1. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz energije

Iz izraza (14.71) slijedi da je energija izoliranog pločastog električnog kondenzatora (Slika 14.18), koji ima savršeni LIH dielektrik, opisana izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{Q}{S} \right)^2 \cdot S \cdot d \quad (14.101)$$

pa je prema izrazu (14.99) sila na oblogu električnog kondenzatora:

$$\vec{F} = -\left. \vec{d}_0 \cdot \frac{\partial W_e}{\partial d} \right|_{Q=\text{konst.}} = -\vec{d}_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{Q}{S} \right)^2 \cdot S \quad (14.102)$$

Slijedi da je sila na oblogu električnog kondenzatora:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D \cdot S \cdot (-\vec{d}_0) = \frac{W_e}{d} \cdot (-\vec{d}_0) \quad (14.103)$$

gdje smjer sile $-\vec{d}_0$ znači da električna sila nastoji smanjiti razmak između obloga kondenzatora, odnosno da se obloge električnog kondenzatora privlače.

14.12.2. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz kapaciteta

Kapacitet pločastog električnog kondenzatora (Slika 14.18), koji ima savršeni LIH dielektrik, opisan je izrazom (14.59) pa je:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon \cdot S} \quad (14.104)$$

Iz izraza (14.100) slijedi da je sila na oblogu električnog kondenzatora:

$$\vec{F} = \vec{d}_0 \cdot \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{1}{C} \right) = -\vec{d}_0 \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot S} = -\vec{d}_0 \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot C} \cdot \frac{1}{d} = \frac{W_e}{d} \cdot (-\vec{d}_0) \quad (14.105)$$

14.12.3. Sila na oblogu cilindričnog i kuglastog električnog kondenzatora

Izrazi (14.99) i (14.100) nisu prikladni za izračun sile na oblogu cilindričnog i kuglastog električnog kondenzatora. Važna je činjenica da se, u oba slučaja, jedna obloga nalazi unutar druge. Iako se dijelovi obloga ovih kondenzatora privlače pod djelovanjem električne sile, ukupna sila na pojedinu oblogu jednaka je nuli.

14.13. Sila u elektrostatičkom polju neizoliranog sustava

Neizolirani sustav jest sustav koji s okolinom razmjenjuje energiju, odnosno to je sustav u kojem su zadani električni naponi koji su nepromjenjivi. Takav sustav teži stanju u kojem je energija maksimalna pa je u njemu sila opisana izrazom:

$$\vec{F} = \nabla W_e \quad (14.106)$$

gdje je W_e energija pohranjena u elektrostatičkom polju.

U neizoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je izrazom:

$$\vec{F} = \frac{\partial W_e}{\partial s} \cdot \vec{s}_0 = \vec{s}_0 \cdot \left. \frac{\partial W_e}{\partial s} \right|_{U = \text{konst.}} \quad (14.107)$$

gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor.

U neizoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je i izrazom:

$$\vec{F} = \vec{s}_0 \cdot \left. \frac{\partial W_e}{\partial s} \right|_{U = \text{konst.}} = \vec{s}_0 \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial s} \quad (14.108)$$

gdje su U i C električni napon i električni kapacitet neizoliranog sustava.

14.13.1. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz energije

Iz izraza (14.71) slijedi da je energija neizoliranog pločastog električnog kondenzatora (Slika 14.18), koji ima savršeni LIH dielektrik, opisana izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot S \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{U^2 \cdot S}{d} \quad (14.109)$$

pa je prema izrazu (14.107) sila na oblogu električnog kondenzatora:

$$\vec{F} = \vec{d}_0 \cdot \left. \frac{\partial W_e}{\partial d} \right|_{U=\text{konst.}} = -\vec{d}_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot S \quad (14.110)$$

Slijedi da je sila na oblogu električnog kondenzatora:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2 \cdot S \cdot (-\vec{d}_0) = \frac{W_e}{d} \cdot (-\vec{d}_0) \quad (14.111)$$

gdje smjer sile $-\vec{d}_0$ znači da električna sila nastoji smanjiti razmak između obloga kondenzatora, odnosno da se obloge električnog kondenzatora privlače.

14.13.2. Izračun sile na oblogu pločastog električnog kondenzatora iz kapaciteta

Kapacitet pločastog električnog kondenzatora (Slika 14.18), koji ima savršeni LIH dielektrik, opisan je izrazom (14.59), koji glasi:

$$C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} \quad (14.112)$$

Iz izraza (14.108) slijedi da je sila na oblogu električnog kondenzatora:

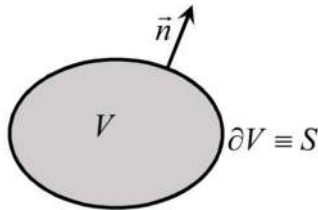
$$\vec{F} = \vec{d}_0 \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial d} = -\vec{d}_0 \cdot \frac{U^2 \cdot \varepsilon \cdot S}{2 \cdot d^2} = -\vec{d}_0 \cdot \frac{C \cdot U^2}{2} \cdot \frac{1}{d} = \frac{W_e}{d} \cdot (-\vec{d}_0) \quad (14.113)$$

14.14. Sile i naprezanja u elektrostatičkom polju

Neka je volumen V omeđen zatvorenom ploha $S \equiv \partial V$ (Slika 14.24), gdje je \vec{n} vektor vanjske jedinične normale na plohu S . Električna sila koja djeluje na volumen V može se izračunati integracijom po zatvorenoj plohi S :

$$\vec{F} = \int_V \rho \cdot \vec{E} \cdot dV = \oint_S \vec{t}_e \cdot dS \quad (14.114)$$

gdje je \vec{t}_e vektor električnog naprezanja.



Slika 14.24. Volumen omeđen zatvorenom plohom S

U elektrostatičkom polju, vektor električnog naprezanja u linearnom i izotropnom savršenom dielektriku opisan je izrazom:

$$\vec{t}_e = \varepsilon \cdot \left[\vec{E} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \cdot E^2 \cdot \vec{n} \right] \quad (14.115)$$

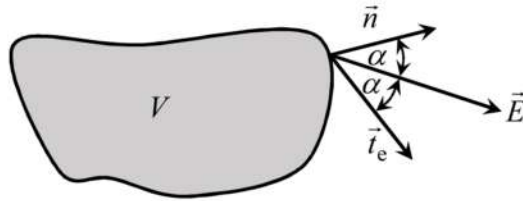
Plošni integral opisan izrazom (14.114) može se iskazati kao vektorski zbroj triju plošnih integrala prve vrste:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_e \cdot dS = \vec{i} \cdot \oint_S t_{ex} \cdot dS + \vec{j} \cdot \oint_S t_{ey} \cdot dS + \vec{k} \cdot \oint_S t_{ez} \cdot dS \quad (14.116)$$

gdje je vektor električnog naprezanja u pravokutnom koordinatnom sustavu opisan izrazom:

$$\vec{t}_e = t_{ex} \cdot \vec{i} + t_{ey} \cdot \vec{j} + t_{ez} \cdot \vec{k} \quad (14.117)$$

Vektor jakosti električnog polja \vec{E} raspolavlja kut između vektora vanjske jedinične normale \vec{n} i vektora električnog naprežanja \vec{t}_e (Slika 14.25):



Slika 14.25. Međusobni položaj triju vektora

Na temelju vektora električnog naprežanja na granici dvaju linearnih i izotropnih savršenih dielektrika dielektričnosti ϵ_1 i ϵ_2 , lako se može dobiti izraz za električni tlak na granici tih dvaju dielektrika:

$$t_n^e = \frac{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}{2} \cdot \left(\frac{D_n^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} + E_t^2 \right) \quad (14.118)$$

gdje je:

D_n - normalna komponenta vektora električnog pomaka,

E_t - tangencijalna komponenta vektora jakosti električnog polja.

Električna sila na granici dvaju sredstava opisana je plošnim integralom po graničnoj plohi dvaju dielektrika S_{gr} :

$$\vec{F}_{gr} = \int_{S_{gr}} t_n^e \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{S_{gr}} t_n^e \cdot d\vec{S} \quad (14.119)$$

gdje je \vec{n} jedinični vektor normale na graničnu plohu dvaju dielektrika, koji je usmjeren (orijentiran) od sredstva veće dielektričnosti prema sredstvu manje dielektričnosti.

Plošni integral opisan izrazom (14.119) može se iskazati kao vektorski zbroj triju plošnih integrala prve vrste:

$$\vec{F}_{gr} = \int_{S_{gr}} t_n^e \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{i} \cdot \oint_{S_{gr}} t_n^e \cdot n_x \cdot dS + \vec{j} \cdot \oint_{S_{gr}} t_n^e \cdot n_y \cdot dS + \vec{k} \cdot \oint_{S_{gr}} t_n^e \cdot n_z \cdot dS \quad (14.120)$$

gdje je jedinični vektor normale na graničnu plohu dvaju dielektrika u pravokutnom koordinatnom sustavu opisan izrazom:

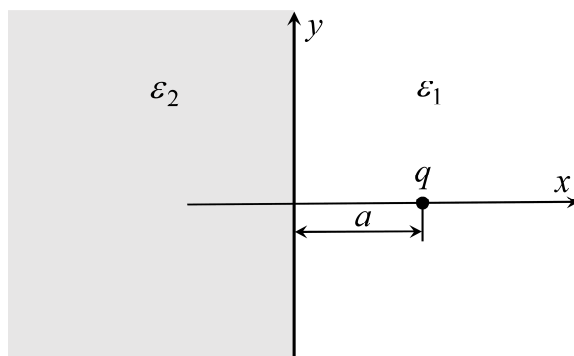
$$\vec{n} = n_x \cdot \vec{i} + n_y \cdot \vec{j} + n_z \cdot \vec{k} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (14.121)$$

gdje su α , β i γ prikloni kutovi jediničnog vektora normale.

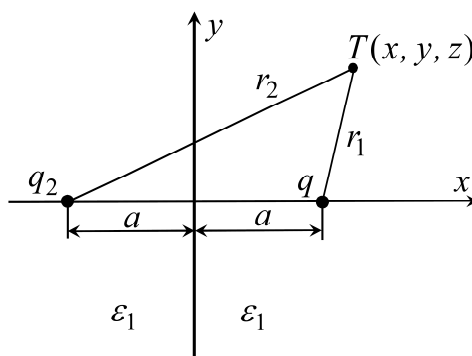
14.15. Odslikavanje električnog naboja na granici dvaju dielektrika

Neka se točkasti električni naboj q nalazi ispred dielektričnog poluprostora na udaljenosti a . Neka se električni naboj nalazi u poluprostoru dielektričnosti ϵ_1 , a neka preostali dio prostora ima dielektričnost ϵ_2 (Slika 14.26). Neka se, radi jednostavnosti, električni naboj nalazi na x -osi pravokutnog koordinatnog sustava (x, y, z) .

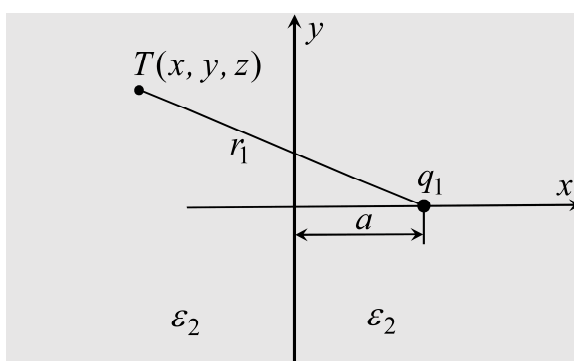
Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba poluprostora mogu se odrediti po metodi odslikavanja. Položaj nadomjesnih električnih naboja je suvislo odabran, a njihovi iznosi se određuje na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta (Slike 14.27 i 14.28).



Slika 14.26. Točkasti naboj ispred granice dvaju dielektričnih poluprostora



Slika 14.27. Točkasti naboj i njegova slika kada se skalarni električni potencijal računa u savršenom dielektriku 1 koji se proglašava neograničenim



Slika 14.28. Nadomjesni točkasti naboj kada se skalarni električni potencijal računa u savršenom dielektriku 2 koji se proglašava neograničenim

Prema Slici 14.27, skalarni električni potencijal u savršenom dielektriku 1, koji se proglašava neograničenim, stvaraju stvarni električni naboj q i nadomjesni električni naboj q_2 čiji je položaj zrcalan u odnosu na stvarni električni naboj. Prema Slici 14.28, skalarni električni potencijal u savršenom dielektriku 2, koji se proglašava neograničenim, stvara naboj q_1 koji se nalazi na mjestu stvarnog električnog naboja.

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u savršenom dielektriku 1 ($x \geq 0$), prema Slici 14.27, opisana je izrazom:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_1} \cdot \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \quad (14.122)$$

dok je raspodjela skalarnog električnog potencijala u savršenom dielektriku 2 ($x \leq 0$), prema Slici 14.28, opisana izrazom:

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot r_1} \quad (14.123)$$

gdje je:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} \quad (14.124)$$

Izrazi (14.122) i (14.123) trebaju zadovoljiti sljedeće granične uvjete:

$$\varphi_1|_{x=0} = \varphi_2|_{x=0} \quad (14.125)$$

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (14.126)$$

Ako se u granični uvjet (14.125) uvrste izrazi (14.122) i (14.123), uz uvažavanje izraza (14.124), dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot (q + q_2) = \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot q_1 \quad (14.127)$$

Ako se u granični uvjet (14.126) uvrste izrazi (14.122) i (14.123), uz uvažavanje izraza (14.124), dobije se sljedeći izraz:

$$q - q_2 = q_1 \quad (14.128)$$

Iz sustava dviju linearnih jednadžbi (14.127) i (14.128), slijedi da je:

$$q_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot q = k_R \cdot q \quad ; \quad k_R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (14.129)$$

$$q_1 = \frac{2 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot q = k_T \cdot q \quad ; \quad k_T = \frac{2 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (14.130)$$

gdje je k_R faktor refleksije, dok je k_T faktor transmisije*.

Vrijedi da je:

$$k_R + k_T = 1 \quad (14.131)$$

U posebnom slučaju kada $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, vrijedi da je:

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} k_R = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} q_2 = -q \quad (14.132)$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} k_T = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} q_1 = 2 \cdot q \quad ; \quad \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} \varphi_2 = 0 \quad (14.133)$$

Zaključak: Beskonačno dielektrično sredstvo ponaša se kao vodljivo sredstvo.

Prema izrazima (14.122) i (14.129), raspodjela skalarnog električnog potencijala u savršenom dielektriku 1 ($x \geq 0$) opisana je izrazom:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{k_R}{r_2} \right) \quad (14.134)$$

dok je, prema izrazima (14.123) i (14.130), raspodjela skalarnog električnog potencijala u savršenom dielektriku 2 ($x \leq 0$) opisana izrazom:

$$\varphi_2 = \frac{k_T \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot r_1} \quad (14.135)$$

* Ovo su statički faktori koje treba razlikovati od istoimenih faktora u slučaju elektromagnetskih valova.

14.16. Razgradnja električnog naboja u nesavršenom dielektriku

Neka se u nekoj točki linearnog i izotropnog nesavršenog dielektrika nalazi električni naboj volumne gustoće ρ . Neka nesavršeni dielektrik ima dielektričnost ε i električnu provodnost κ . Tada dolazi do razgradnje (relaksacije) električnog naboja. Što je sredstvo vodljivije, to je razgradnja električnog naboja brža.

U ovom slučaju, vrijedi jednadžba kontinuiteta:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \kappa \cdot \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (14.136)$$

i Maxwellova diferencijalna jednadžba:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (14.137)$$

gdje je ρ volumna gustoća slobodnog električnog naboja.

Iz izraza (14.136) i (14.137), slijedi diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (14.138)$$

koja se može napisati u sljedećem obliku:

$$\tau \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho = 0 \quad ; \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (14.139)$$

gdje je τ vremenska konstanta.

Nakon separacije varijabli, diferencijalna jednadžba (14.139) poprima novi oblik:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dt}{\tau} \quad (14.140)$$

a njeno rješenje, koje se dobije integracijom lijeve i desne strane jednadžbe, glasi:

$$\ln \rho = -\frac{t}{\tau} + \ln C \quad (14.141)$$

odakle slijedi da je:

$$\rho = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.142)$$

U ovo rješenje diferencijalne jednadžbe treba uvrstiti početni uvjet:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \quad (14.143)$$

pa je konačno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14.144)$$

Slijedi da dolazi do samopražnjenja izoliranog električnog kondenzatora koji ima nesavršeni linearni i izotropni dielektrik, kojemu je dielektričnost ε i električna provodnost κ , a vremenska promjena naboja električnog kondenzatora opisana je izrazom:

$$q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (14.145)$$

gdje je q trenutna vrijednost električnog naboja na pozitivnoj oblozi električnog kondenzatora, dok je Q_0 električni naboj na pozitivnoj oblozi električnog kondenzatora u početnom trenutku.

Za pločasti izolirani električni kondenzator, kojemu je linearni i izotropni dielektrik nesavršen, vrijedi da je:

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad (14.146)$$

gdje je jakost pomačne električne struje posljedica gubitka električnog naboja na oblogama električnog kondenzatora.

Nadalje, za pločasti električni kondenzator, vrijedi da je:

$$i = J \cdot S = \kappa \cdot E \cdot S = \kappa \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot S = \frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot q \quad (14.147)$$

odakle slijedi diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{\tau} \quad ; \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad (14.148)$$

čije je rješenje opisano izrazom (14.145), gdje je Q_0 električni naboj na pozitivnoj oblozi pločastog električnog kondenzatora u početnom trenutku.

14.17. Partikularna i opća rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe

14.17.1. Rješenja Laplaceove jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu

Neka je u pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z) zadana Laplaceova diferencijalna jednadžba:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (14.149)$$

čija se partikularna rješenja mogu dobiti nakon separacije (odjeljivanja) varijabli tako da je:

$$\varphi = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (14.150)$$

Ako se izraz (14.150) uvrsti u izraz (14.149), dobije se sljedeća diferencijalna jednadžba:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \quad (14.151)$$

iz koje se mogu dobiti sljedeće tri obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} = \bar{k}_x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2X}{dx^2} - \bar{k}_x^2 \cdot X = 0 \quad (14.152)$$

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = \bar{k}_y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - \bar{k}_y^2 \cdot Y = 0 \quad (14.153)$$

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2Z}{dz^2} = \bar{k}_z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - \bar{k}_z^2 \cdot Z = 0 \quad (14.154)$$

gdje su \bar{k}_x, \bar{k}_y i \bar{k}_z realne ili imaginarne konstante za koje vrijedi:

$$\bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2 + \bar{k}_z^2 = 0 \quad (14.155)$$

Neka su zasad, radi općenitosti, ove konstante kompleksne konstante, a važno je istaknuti da su njihovi kvadrati realne konstante.

Partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe (14.152) glasi:

$$X(x) = \begin{cases} C \cdot e^{-k_x \cdot x} + D \cdot e^{k_x \cdot x} = A \cdot \text{sh}(k_x \cdot x) + B \cdot \text{ch}(k_x \cdot x) & \text{za } k_x^2 > 0 \\ A \cdot x + B & \text{za } k_x^2 = 0 \\ A \cdot \sin(\gamma_x \cdot x) + B \cdot \cos(\gamma_x \cdot x) & \text{za } \bar{k}_x^2 = -\gamma_x^2 < 0 \end{cases} \quad (14.156)$$

gdje je u prvom i drugom slučaju $\bar{k}_x = k_x$ realna konstanta, dok je u trećem slučaju $\bar{k}_x = \pm j \cdot \gamma_x$ imaginarna konstanta i u rješenju je zamijenjena realnom konstantom γ_x . U drugom slučaju, vrijedi da je $\bar{k}_x = k_x = 0$.

Konstante A, B, C i D , navedene u izrazu (14.156), su nepoznate i određuju se na temelju zadovoljenja rubnih uvjeta.

Analogna rješenja vrijede i za druge dvije diferencijalne jednadžbe opisane izrazima (14.153) i (14.154), odnosno za funkcije $Y(y)$ i $Z(z)$.

U 2D pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y) vrijedi da je:

$$\varphi = X(x) \cdot Y(y) \quad (14.157)$$

$$\bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2 = 0 \quad (14.158)$$

pa se može izabrati da je:

$$\bar{k}_x^2 = k^2 ; \bar{k}_y^2 = -k^2 \Rightarrow k_x = k ; \bar{k}_y = j \cdot k \quad (14.159)$$

odakle slijedi da dvije obične diferencijalne jednadžbe glase:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 \cdot X = 0 \quad (14.160)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 \cdot Y = 0 \quad (14.161)$$

Ako to zahtijevaju rubni uvjeti, onda se može uzeti da je:

$$\bar{k}_x^2 = k^2 ; \bar{k}_y^2 = -k^2 \Rightarrow \bar{k}_x = j \cdot k ; k_y = k \quad (14.162)$$

odakle slijedi da dvije obične diferencijalne jednadžbe glase:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 \cdot X = 0 \quad (14.163)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - k^2 \cdot Y = 0 \quad (14.164)$$

Ako se bilo kojom linearnom kombinacijom partikularnih rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe mogu zadovoljiti rubni uvjeti, onda je to opće rješenje diferencijalne jednadžbe, zbog jedinstvenosti rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe. To je rješenje takozvanog rubnog problema

opisanog Laplaceovom diferencijalnom jednađbom i rubnim uvjetima. Matematički i inženjerski problem opisani diferencijalnom jednađbom i rubnim uvjetima naziva se rubnim problemom (engl. *boundary value problem*).

Vrlo često korišteno opće rješenje Laplaceove jednađbe u (x, y) koordinatnom sustavu je:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x) \cdot [C_n \cdot \sin(n \cdot k \cdot y) + D_n \cdot \cos(n \cdot k \cdot y)] \quad (14.165)$$

gdje je:

$$X(x) = A_n \cdot e^{-n \cdot k \cdot x} + B_n \cdot e^{n \cdot k \cdot x} \quad (14.166)$$

ili:

$$X(x) = A_n \cdot \text{sh}(n \cdot k \cdot x) + B_n \cdot \text{ch}(n \cdot k \cdot x) \quad (14.167)$$

u ovisnosti o rubnim uvjetima koje opće rješenje treba zadovoljiti.

Važno je istaknuti da se u općem rješenju Laplaceove jednađbe (14.165) i pripadnim partikularnim rješenjima (14.166) i (14.167) mogu zamijeniti x i y ako to zahtijevaju rubni uvjeti koje treba zadovoljiti.

14.17.2. Rješenja Laplaceove jednađbe u cilindričnom koordinatnom sustavu

Neka je u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) zadana Laplaceova diferencijalna jednađba:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (14.168)$$

čije se partikularno rješenje može dobiti nakon separacije (odjeljivanja) varijabli tako da je:

$$\varphi = R(r) \cdot \Phi(\phi) \cdot Z(z) \quad (14.169)$$

Ako se izraz (14.169) uvrsti u izraz (14.168), dobije se sljedeća diferencijalna jednađba:

$$\frac{1}{r \cdot R} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (14.170)$$

iz koje se mogu dobiti sljedeće tri diferencijalne jednađbe:

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dR}{dr} \right) + (\bar{k}^2 \cdot r^2 - n^2) \cdot R = 0 \quad (14.171)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \cdot \Phi = 0 \quad (14.172)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \bar{k}^2 \cdot Z = 0 \quad (14.173)$$

gdje kompleksna konstanta \bar{k} može biti realna konstanta ili pak imaginarna konstanta, dok je n cjelobrojna konstanta.

Za dvije obične diferencijalne jednađbe, opisane izrazima (14.172) i (14.173) već su prethodno dana moguća partikularna rješenja, koja su opisana izrazom (14.156).

Ako je $\bar{k} = k$ realna konstanta, onda diferencijalna jednađba (14.171) glasi:

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \cdot \frac{dR}{dr} + (k^2 \cdot r^2 - n^2) \cdot R = 0 \quad (14.174)$$

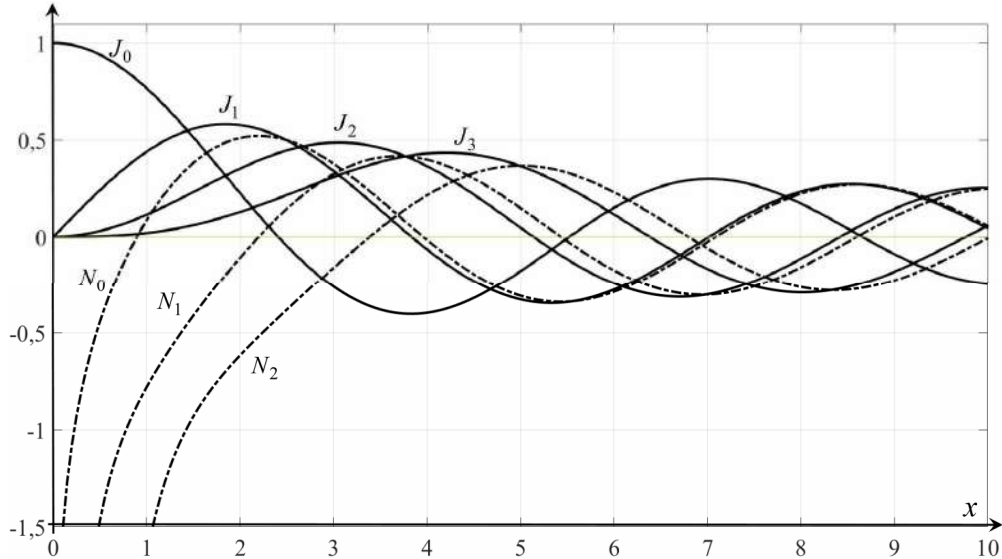
i zove se Besselova diferencijalna jednačba, a njeno partikularno rješenje je:

$$R(r) = A \cdot J_n(k \cdot r) + B \cdot N_n(k \cdot r) \quad (14.175)$$

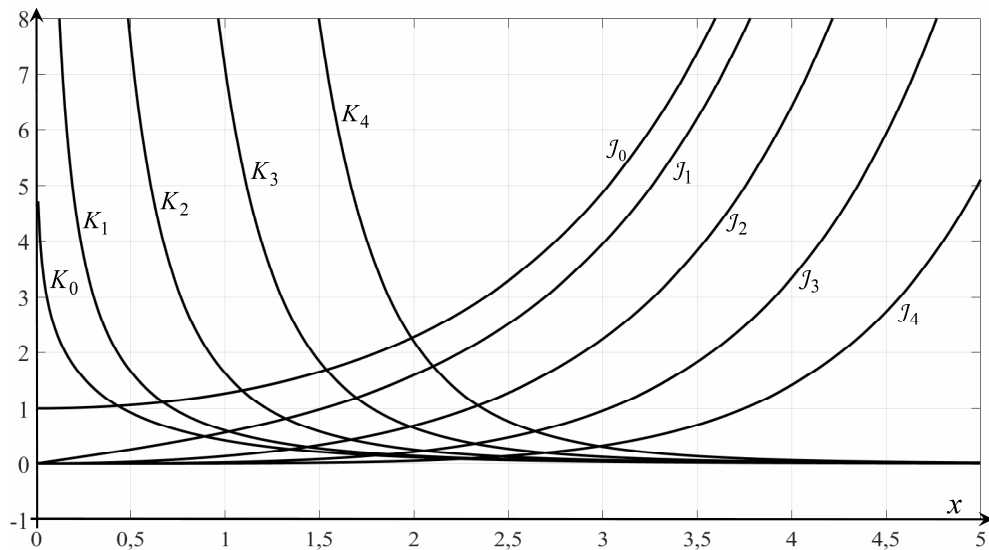
gdje je:

$J_n(k \cdot r)$ - Besselova funkcija prve vrste n-tog reda (Slika 14.29),

$N_n(k \cdot r)$ - Neumannova funkcija n-tog reda; Besselova funkcija druge vrste n-tog reda (Slika 14.29).



Slika 14.29. Grafički prikaz Besselovih funkcija prve i druge vrste



Slika 14.30. Grafički prikaz modificiranih Besselovih funkcija prve i druge vrste

Ako je $\bar{k} = j \cdot \gamma$ imaginarna konstanta, a γ realna konstanta, onda diferencijalna jednačba (14.168) glasi:

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \cdot \frac{dR}{dr} - (\gamma^2 \cdot r^2 + n^2) \cdot R = 0 \quad (14.176)$$

i zove se modificirana Besselova diferencijalna jednačba, a njeno partikularno rješenje je:

$$R(r) = A \cdot J_n(\gamma \cdot r) + B \cdot K_n(\gamma \cdot r) \quad (14.177)$$

gdje je:

$J_n(\gamma \cdot r)$ - modificirana Besselova funkcija prve vrste n -tog reda (Slika 14.30),

$K_n(\gamma \cdot r)$ - modificirana Besselova funkcija druge vrste n -tog reda (Slika 14.30).

Ako je $k=0$, onda se Besselova diferencijalna jednačba (14.174) svodi na Eulerovu diferencijalnu jednačbu:

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \cdot \frac{dR}{dr} - n^2 \cdot R = 0 \quad (14.178)$$

za koju se rješenje traži uz supstituciju $R = r^t$, što u ovom slučaju daje jednačbu:

$$r^t \cdot (t^2 - n^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pm n \quad (14.179)$$

Ako je $k=0$ i $n=0$, onda se Eulerova diferencijalna jednačba svodi na diferencijalnu jednačbu:

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dR}{dr} \right) = 0 \quad (14.180)$$

Sva rješenja diferencijalne jednačbe (14.171) glase:

$$R(r) = \begin{cases} A \cdot J_n(k \cdot r) + B \cdot N_n(k \cdot r) & \text{za } \bar{k}^2 = k^2 > 0 \\ A \cdot J_n(\gamma \cdot r) + B \cdot K_n(\gamma \cdot r) & \text{za } \bar{k}^2 = -\gamma^2 < 0 \\ A \cdot r^n + B \cdot \frac{1}{r^n} & \text{za } \bar{k}^2 = k^2 = 0, n \neq 0 \\ A \cdot \ln r + B & \text{za } \bar{k}^2 = k^2 = 0 \text{ i } n = 0 \end{cases} \quad (14.181)$$

Opće rješenje diferencijalne jednačbe jest bilo koja linearna kombinacija partikularnih rješenja koja može zadovoljiti rubne uvjete za 2D ili 3D područje proračuna.

Ako skalarna funkcija φ ne ovisi o z te je $n \neq 0$, onda partikularno rješenje Laplaceove jednačbe u polarnom sustavu (r, ϕ) glasi:

$$\varphi(r, \phi) = \left(A \cdot r^n + B \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot [C \cdot \sin(n \cdot \phi) + D \cdot \cos(n \cdot \phi)] \quad (14.182)$$

dok je pripadno opće rješenje Laplaceove jednačbe:

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot [C_n \cdot \sin(n \cdot \phi) + D_n \cdot \cos(n \cdot \phi)] \quad (14.183)$$

koje treba zadovoljiti rubne uvjete.

Ako je skalarno polje φ osnosimetrično s obzirom na koordinatnu os z , onda nema promjene skalarnog polja po kutu ϕ te je $n=0$, pa opće rješenje Laplaceove jednačbe u 2D koordinatnom sustavu (r, z) , ako r ne može biti jednak nuli u razmatranom području, glasi:

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot e^{-k \cdot z} + B_k \cdot e^{k \cdot z}) \cdot [C_k \cdot J_0(k \cdot r) + D_k \cdot N_0(k \cdot r)] \quad (14.184)$$

dok u slučaju kada r može biti jednak nuli u razmatranom području opće rješenje Laplaceove jednačbe u 2D koordinatnom sustavu (r, z) glasi:

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot e^{-k \cdot z} + B_k \cdot e^{k \cdot z}) \cdot J_0(k \cdot r) \quad (14.185)$$

koje se u nekim slučajevima, umjesto sumom, opisuju sljedećim integralom:

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot z} + B(\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot z} \right] \cdot J_0(\lambda \cdot r) \cdot d\lambda \quad (14.186)$$

gdje je λ kontinuirani parametar.

14.17.3. Rješenja Laplaceove jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu

Neka je u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, ϕ) zadana Laplaceova diferencijalna jednadžba:

$$r^2 \cdot \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (14.187)$$

čije se partikularno rješenje može dobiti nakon separacije (odjeljivanja) varijabli tako da je:

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\phi) \quad (14.188)$$

Ako se izraz (14.188) uvrsti u izraz (14.187), onda se dobije diferencijalna jednadžba iz koje se mogu dobiti sljedeće tri diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{dR}{dr} \right) - n \cdot (n+1) \cdot R = 0 \quad (14.189)$$

$$\sin \vartheta \cdot \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[n \cdot (n+1) \cdot \sin^2 \vartheta - m^2 \right] \cdot \Theta = 0 \quad (14.190)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \cdot \Phi = 0 \quad (14.191)$$

gdje m i n moraju biti cijeli brojevi.

Diferencijalna jednadžba (14.189) je Eulerova diferencijalna jednadžba, diferencijalna jednadžba (14.190) je opća Legendrova diferencijalna jednadžba, dok je diferencijalna jednadžba (14.191) obična diferencijalna jednadžba čije je partikularno rješenje opisano izrazom (14.156). Partikularna rješenja ovih triju diferencijalnih jednadžbi su:

$$R(r) = A \cdot r^n + B \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \quad (14.192)$$

$$\Theta(\vartheta) = C \cdot P_n^m(\cos \vartheta) + D \cdot Q_n^m(\cos \vartheta) \quad (14.193)$$

$$\Phi(\phi) = E \cdot \sin(m \cdot \vartheta) + F \cdot \cos(m \cdot \vartheta) \quad (14.194)$$

gdje je:

$P_n^m(\cos \vartheta)$ - pridruženi Legendreov polinom prve vrste, n -tog stupnja, m -tog reda od $\cos \vartheta$,

$Q_n^m(\cos \vartheta)$ - pridruženi Legendreov polinom druge vrste, n -tog stupnja, m -tog reda od $\cos \vartheta$.

U inženjerskoj primjeni od posebnog su značaja osnosimetrični problemi kod kojih nema promjene po kutu ϕ te je $m = 0$, a tada Laplaceova diferencijalna jednadžba (14.187) u 2D koordinatnom sustavu (r, ϑ) glasi:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (14.195)$$

a njeno partikularno rješenje glasi:

$$\varphi(r, \vartheta) = \left(A \cdot r^n + B \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \right) \cdot \left[C \cdot P_n(\cos \vartheta) + D \cdot Q_n(\cos \vartheta) \right] \quad (14.196)$$

gdje je:

$P_n(\cos \vartheta)$ - Legendreov polinom prve vrste n-tog stupnja od $\cos \vartheta$,

$Q_n(\cos \vartheta)$ - Legendreov polinom druge vrste n-tog stupnja od $\cos \vartheta$.

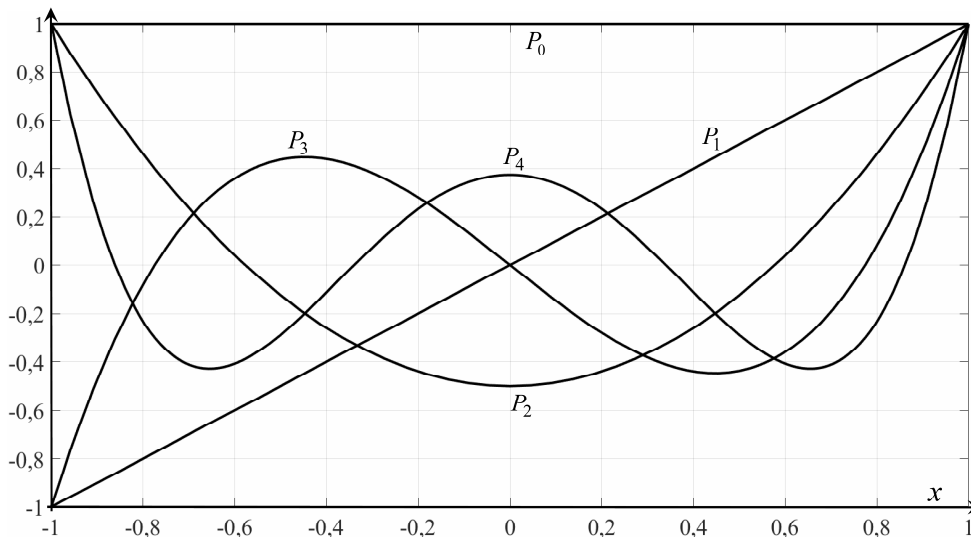
Legendreovi polinomi druge vrste kao i pridruženi Legendreovi polinomi druge vrste poprimaju beskonačnu vrijednost ako je $\cos \vartheta = \pm 1$, pa se ovi polinomi ne mogu koristiti kao rješenje ako u promatranom području može biti $\vartheta = 0$ i/ili $\vartheta = \pi$. U takvim slučajevima, prema (14.196), partikularno rješenje Laplaceove jednadžbe u 2D koordinatnom sustavu (r, ϑ) glasi:

$$\varphi(r, \vartheta) = \left(A \cdot r^n + B \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \right) \cdot P_n(\cos \vartheta) \quad (14.197)$$

dok je pripadno opće rješenje Laplaceove jednadžbe:

$$\varphi(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \right) \cdot P_n(\cos \vartheta) \quad (14.198)$$

Legendreovi polinomi prve i druge vrste definirani su za $x \in [-1, 1]$, a za ilustraciju su Legendreovi polinomi prve vrste grafički prikazani na Slici 14.31.



Slika 14.31. Grafički prikaz Legendreovih polinoma prve vrste

Za Legendreove polinome prve vrste vrijedi da je:

$$P_0(x) = 1 \quad ; \quad P_1(x) = x \quad (14.199)$$

a Bonnetova rekurzivna formula za Legendreove polinome prve vrste glasi:

$$P_n(x) = \frac{2 \cdot n - 1}{n} \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \cdot P_{n-2}(x) \quad \text{za } n \geq 2 \quad (14.200)$$

Za Legendreove polinome druge vrste vrijedi da je:

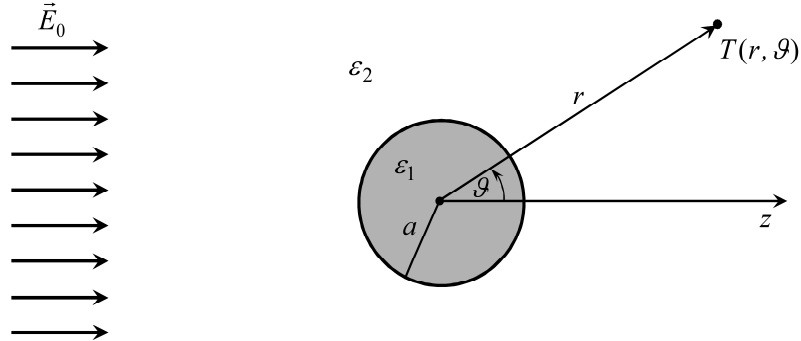
$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \quad ; \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \quad (14.201)$$

a Bonnetova rekurzivna formula za Legendreove polinome druge vrste glasi:

$$Q_n(x) = \frac{2 \cdot n - 1}{n} \cdot x \cdot Q_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \cdot Q_{n-2}(x) \quad \text{za } n \geq 2 \quad (14.202)$$

14.18. Dielektrična kugla u homogenom električnom polju

Ako se u homogenom električnom polju nalazi dielektrična kugla, onda dolazi do međudjelovanja električnog polja i kugle. Neka se dielektrična kugla (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom električnom polju, dok je oko kugle neograničeni savršeni LIH dielektrik (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je sferni koordinatni sustav s ishodištem u središtu dielektrične kugle (Slika 14.32).



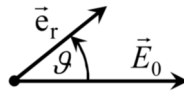
Slika 14.32. Dielektrična kugla u homogenom električnom polju

Rubni uvjet na velikim udaljenostima od kugle jest to da nema deformacije polja, tj. da ono ostaje homogeno. Tom zahtjevu treba prilagoditi opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe u sredstvu 2, koje prema (14.198) glasi:

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \right) \cdot P_n(\cos \vartheta) \quad (14.203)$$

Dovoljno je u beskonačnosti prilagoditi radialnu komponentu jakosti električnog polja, što je, prema Slici 14.33, opisano sljedećim izrazom:

$$E_r = E_0 \cdot \cos \vartheta = - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} \quad (14.204)$$



Slika 14.33. Vektor jakosti električnog polja daleko od kugle

Ako se izraz (14.203) uvrsti u izraz (14.204), dobije se da je:

$$E_0 \cdot \cos \vartheta = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \cdot A_n \cdot r^{n-1} - (n+1) \cdot B_n \cdot \frac{1}{r^{n+2}} \right]_{r \rightarrow \infty} \cdot P_n(\cos \vartheta) \quad (14.205)$$

Budući da je prema izrazu (14.199):

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta \quad (14.206)$$

slijedi da je $n = 1$, što znači da su svi koeficijenti A_n i B_n jednaki nuli, osim koeficijenata A_1 i B_1 , pa se iz izraza (14.205) dobije da je:

$$E_0 \cdot \cos \vartheta = - \left(A_1 - 2 \cdot B_1 \cdot \frac{1}{r^3} \right)_{r \rightarrow \infty} \cdot \cos \vartheta = - A_1 \cdot \cos \vartheta \quad (14.207)$$

što znači da je:

$$A_1 = E_0 \quad (14.208)$$

dok je koeficijent B_1 zasad nepoznat, a izraz uz B_1 teži nuli ako r teži u beskonačnost.

Dakle, raspodjela skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2 opisana je izrazom:

$$\varphi_2 = \left(-E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \cos \vartheta \quad (14.209)$$

pa, radi zadovoljenja graničnih uvjeta između dvaju sredstava, skalarni električni potencijal unutar dielektrične kugle mora biti opisan izrazom:

$$\varphi_1 = \left(C_1 \cdot r + D_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \cos \vartheta \quad (14.210)$$

Iz uvjeta da skalarni električni potencijal u središtu dielektrične kugle mora biti konačan, slijedi da je koeficijent:

$$D_1 = 0 \quad (14.211)$$

pa je:

$$\varphi_1 = C_1 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad (14.212)$$

Dakle, raspodjela skalarnog električnog potencijala u oba sredstva opisana je izrazima (14.209) i (14.212), gdje su nepoznata dva koeficijenta, a oni se mogu odrediti na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad (14.213)$$

$$-\varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (14.214)$$

što daje sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\frac{1}{a^2} \cdot B_1 - a \cdot C_1 = E_0 \cdot a \quad ; \quad \frac{2 \cdot \varepsilon_2}{a^3} \cdot B_1 + \varepsilon_1 \cdot C_1 = -\varepsilon_2 \cdot E_0 \quad (14.215)$$

odakle se lako dobije da je:

$$B_1 = E_0 \cdot a^3 \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \quad ; \quad C_1 = -E_0 \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \quad (14.216)$$

Nakon zadovoljenja svih graničnih uvjeta, prema izrazima (14.209), (14.212) i (14.216), raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana je izrazima:

$$\varphi_1 = -\frac{3 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta = -\frac{3 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot E_0 \cdot z \quad ; \quad r \leq a \quad (14.217)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq a \quad (14.218)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli u središtu kugle, odnosno na ravnini koja prolazi kroz središte kugle za koju je $\vartheta = \pi/2$, a to je ravnina $z = 0$.

Skalarni električni potencijal zadanog homogenog polja, odnosno raspodjela skalarnog električnog potencijala bez prisustva dielektrične kugle, slijedi iz uvjeta:

$$E_0 = -\frac{\partial \varphi_h}{\partial z} \quad ; \quad \varphi_h|_{z=0} = 0 \quad (14.219)$$

odakle slijedi da je:

$$\varphi_h = -E_0 \cdot z = -E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \quad (14.220)$$

Iz izraza (14.217) i (14.220), slijedi da je električno polje unutar kugle, također, homogeno. Električno polje unutar kugle je homogeno i istog smjera kao i električno polje daleko od kugle, ali je različite jakosti. Jakost električnog polja unutar kugle ovisi o omjeru dielektričnosti ϵ_1/ϵ_2 .

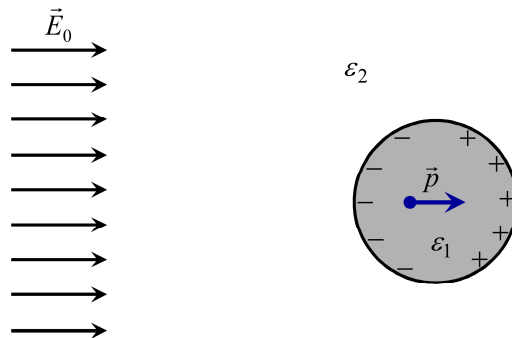
Raspodjela skalarnog električnog potencijala u neograničenom sredstvu 2 može se opisati i tako da se dielektrična kugla promatra kao električni dipol:

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot z + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_2 \cdot r^3} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_2 \cdot r^3} \quad (14.221)$$

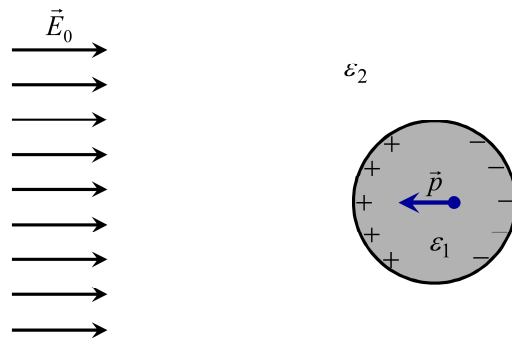
gdje je prema (14.218) dipolni moment \vec{p} opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{p} = \vec{E}_0 \cdot 3 \cdot V_{\text{kugle}} \cdot \epsilon_2 \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2 \cdot \epsilon_2} \quad ; \quad V_{\text{kugle}} = \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi \quad (14.222)$$

Dipolni moment \vec{p} stvara vezani plošni električni naboj koji se nalazi na površini dielektrične kugle, što je posljedica polarizacije kugle pod djelovanjem vanjskog električnog polja (Slika 14.34 i 14.35).



Slika 14.34. Dipolni moment polarizirane dielektrične kugle za $\epsilon_1 > \epsilon_2$



Slika 14.35. Dipolni moment polarizirane dielektrične kugle za $\epsilon_1 < \epsilon_2$

Električno polje želi što dublje ući u sredstvo veće dielektričnosti i što više zaobići sredstvo manje dielektričnosti. Silnice za $\epsilon_1 > \epsilon_2$ prikazane su na Slici 14.36, a silnice za $\epsilon_1 < \epsilon_2$ prikazane su na Slici 14.37.

Vektor polarizacije jednak je dipolnom momentu po jedinici volumena, što znači da je prema izrazu (14.222) vektor polarizacije kugle opisan izrazom:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V_{\text{kugle}}} = \vec{E}_0 \cdot 3 \cdot \epsilon_2 \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2 \cdot \epsilon_2} \quad (14.223)$$

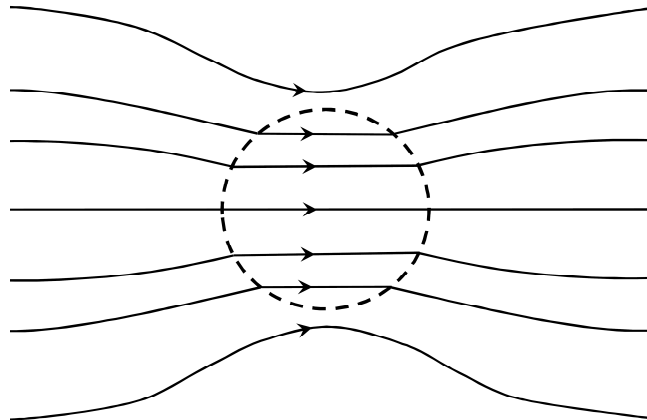
dok je plošna gustoća vezanog električnog naboja opisana sljedećim izrazom:

$$\sigma_v = (\vec{P} \cdot \vec{n})_{r=a} = (\vec{P} \cdot \vec{e}_r)_{r=a} = 3 \cdot E_0 \cdot \epsilon_2 \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2 \cdot \epsilon_2} \cdot \cos \vartheta = \sigma_{\text{vm}} \cdot \cos \vartheta \quad (14.224)$$

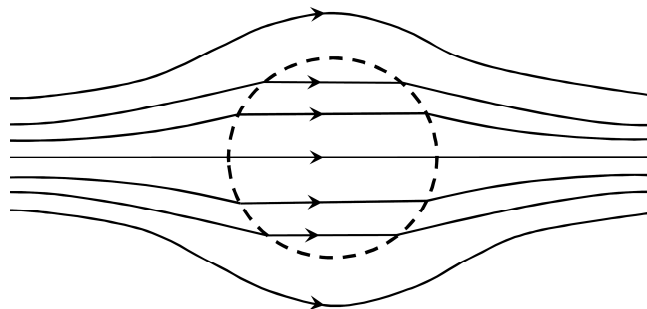
gdje je:

$$\sigma_{vm} = 3 \cdot E_0 \cdot \epsilon_2 \cdot \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2 \cdot \epsilon_2} = \frac{p}{V_{kugle}} \quad (14.225)$$

a to je maksimalna vrijednost plošne gustoće vezanog električnog naboja za $\epsilon_1 > \epsilon_2$, odnosno minimalna vrijednost plošne gustoće vezanog električnog naboja za $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

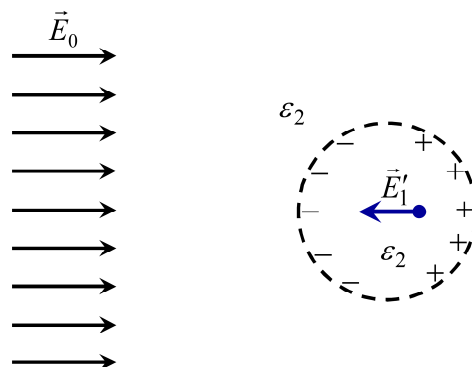


Slika 14.36. Grafički prikaz silnica za $\epsilon_1 > \epsilon_2$



Slika 14.37. Grafički prikaz silnica za $\epsilon_1 < \epsilon_2$

Dakle, plošni električni naboj sinusoidalno raspoređen po površini kugle stvara homogeno električno polje unutar kugle. Može se zamisliti da je posvuda sredstvo 2, a utjecaj dielektrične kugle na raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2 nadomješta plošni električni naboj (Slika 14.38).



Slika 14.38. Raspodjela nadomjesnog plošnog električnog naboja za $\epsilon_1 > \epsilon_2$

Iz izraza (14.217) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente vektora jakosti električnog polja u sredstvu 1, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_1 = E_{1r} \cdot \vec{e}_r + E_{1\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (14.226)$$

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{3 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (14.227)$$

$$E_{1\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot E_0 \cdot \sin \vartheta \quad (14.228)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{E}_1 = E_{1z} \cdot \vec{k} = \frac{3 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot E_0 \cdot \vec{k} \quad (14.229)$$

Iz izraza (14.218) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente vektora jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (14.230)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \vartheta \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \quad (14.231)$$

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = -E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \quad (14.232)$$

Izraz za vektor polarizacije (14.223) može se dobiti i na drugi način, a ne samo iz dipolnog momenta polarizirane kugle. Sredstvo 1 ima oblik kugle i nalazi se unutar sredstva 2 pa vrijedi da je:

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \cdot \vec{E}_1 = \varepsilon_2 \cdot \vec{E}_1 + \vec{P} \quad (14.233)$$

odakle slijedi da je vektor polarizacije:

$$\vec{P} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \vec{E}_1 = 3 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot E_0 \cdot \vec{k} \quad (14.234)$$

pa je, prema izrazu (14.224), plošna gustoća vezanog električnog naboja*:

$$\sigma_v = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot E_{1r} \Big|_{r=a} \quad (14.235)$$

Treba razlikovati vezani električni naboj koji je posljedica polarizacije i slobodni električni naboj. Na granici dvaju dielektrika nema slobodnog električnog naboja i vrijedi granični uvjet (14.214), a to znači da je:

$$D_{1r} \Big|_{r=a} = D_{2r} \Big|_{r=a} \quad (14.236)$$

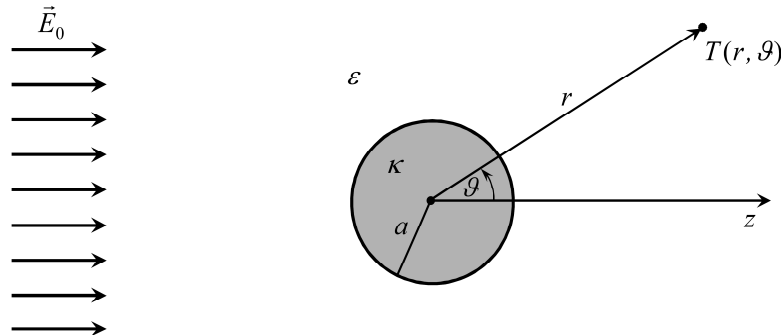
ili drukčije pisano:

$$\varepsilon_1 \cdot E_{1r} \Big|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot E_{2r} \Big|_{r=a} \quad (14.237)$$

*Formalno isti izraz vrijedi i za dielektrični cilindar u homogenom električnom polju

14.19. Vodljiva kugla u homogenom električnom polju

Neka se vodljiva kugla (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom električnom polju, dok je oko kugle neograničeni savršeni LIH dielektrik (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je sferni koordinatni sustav s ishodištem u središtu vodljive kugle (Slika 14.39).



Slika 14.39. Vodljiva kugla u homogenom električnom polju

Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva mogu se dobiti na dva načina:

- Na isti način kao i za dielektričnu kuglu u homogenom električnom polju (potpoglavlje 14.18). Polazi se od općeg rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe u savršenom LIH dielektriku (sredstvu 2) opisane izrazom (14.203) i dobije se izraz (14.209), koji glasi:

$$\varphi_2 = \left(-E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \cos \vartheta \quad (14.238)$$

dok je:

$$\varphi_1 = konst. = 0 \quad (14.239)$$

a nepoznata se konstanta B_1 odredi iz graničnog uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} = 0 \quad (14.240)$$

- Koristeći rješenja za raspodjelu skalarnog električnog potencijala (14.217) i (14.218), koja vrijede za dielektričnu kuglu (sredstvo 1) u homogenom električnom polju, uz supstitucije:

$$\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon_1 \rightarrow \infty \quad (14.241)$$

Na jedan od dva opisana načina, lako se dobiju izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva, koji glase:

$$\varphi_1 = 0 \quad ; \quad r \leq a \quad (14.242)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad z = r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq a \quad (14.243)$$

odakle slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli u središtu kugle, odnosno na ravnini koja prolazi kroz središte kugle za koju je $\vartheta = \pi/2$, a to je ravnina $z = 0$. Važno je uočiti da izraz (14.243) ne sadrži značajke sredstva.

Iz izraza (14.332) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 1, slijedi da je jakost električnog polja u vodljivoj kugli:

$$\vec{E}_1 = 0 \quad (14.244)$$

Iz izraza (14.333) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente vektora jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (14.245)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \vartheta \cdot \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \quad (14.246)$$

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} = -E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) \quad (14.247)$$

Dolazi do električne influencije, odnosno na granici dielektrika i vodiča nalazi se slobodni električni naboj plošne gustoće:

$$\sigma = D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = D_{2r}|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot E_{2r}|_{r=a} \quad (14.248)$$

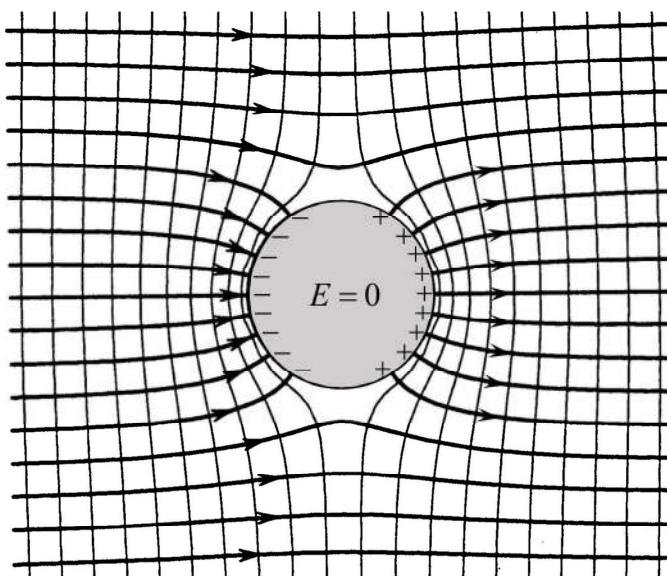
odakle se, nakon uvrštenja izraza (14.246) u izraz (14.248), dobije da je:

$$\sigma = 3 \cdot \varepsilon \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta = \sigma_m \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad \sigma_m = 3 \cdot \varepsilon \cdot E_0 \quad (14.249)$$

Vodljiva kugla je ekvipotencijalna. To znači da je tangencijalna komponenta vektora jakosti električnog polja na površini kugle jednaka nuli, odnosno da je vektor jakosti električnog polja u sredstvu 2 okomit na kuglinu plohu (Slika 14.40). Međutim, umjesto graničnog uvjeta:

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} \Big|_{r=a} = 0 \quad (14.250)$$

bolje je, radi jednostavnosti, koristiti granični uvjet (14.240).



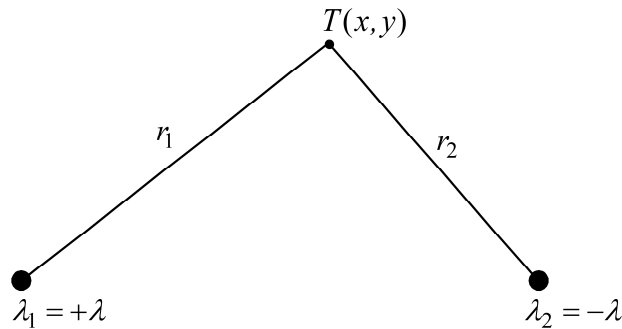
Slika 14.40. Silnice i ekvipotencijalne linije u dielektriku oko vodljive kugle

Moguće je koristiti analogije između elektrostatičkog, magnetostatičkog i stacionarnog strujnog polja. Po analogiji s dielektričnom kuglom u električnom polju može se napisati rješenje problema kugle u homogenom magnetskom polju kao i rješenje problema vodljive kugle u homogenom strujnom polju. Dovoljno je umjesto vektora jakosti električnog polja koristiti vektor jakosti magnetskog polja, a dielektričnosti zamijeniti permeabilnostima ili električnim provodnostima sredstava. Umjesto

električnog naboja na granici dvaju sredstava u elektrostatičkom i stacionarnom strujnom polju, u magnetostatičkom problemu pojavit će se strujni oblog $K = K_m \cdot \sin \vartheta$.

14.20. Dva beskonačno duga pravocrtna vodiča

Neka se dva beskonačno duga međusobno paralelna pravocrtna vodiča, naelektrizirana raznoimenim nabojima iste konstantne linijske gustoće λ (Slika 14.41), nalaze u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ .



Slika 14.41. Dva beskonačno duga međusobno paralelna pravocrtna vodiča

Na temelju izraza (14.47) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala oko osamljenog beskonačno dugog pravocrtnog vodiča naelektriziranog nabojem konstantne linijske gustoće λ , lako je zaključiti da se raspodjela skalarnog električnog potencijala što ga stvaraju naboji na dva beskonačno duga međusobno paralelna pravocrtna vodiča prikazana na Slici 14.41 može opisati sljedećim izrazom:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + C \quad (14.251)$$

gdje su r_1 i r_2 najkraće udaljenosti točke promatranja od vodiča.

Logično je uzeti da je skalarni električni potencijal jednak nuli na simetralnoj ravnini između dva beskonačno duga međusobno paralelna vodiča naelektrizirana raznoimenim električnim nabojima iste linijske gustoće. Jednadžba simetralne ravnine je $r_1 = r_2$ pa je $C = 0$, a to znači da je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana izrazom:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (14.252)$$

Jednadžba ekvipotencijalnih linija je:

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{konst.} \quad (14.253)$$

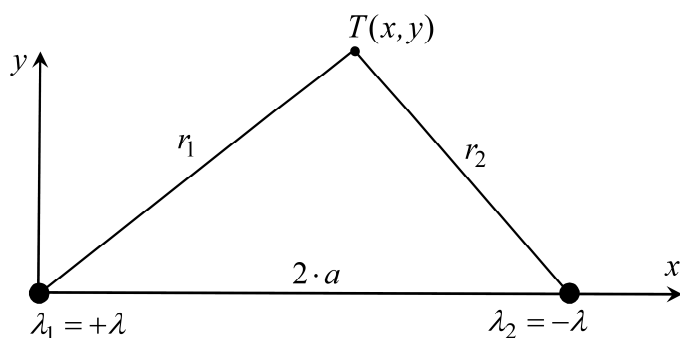
Ekvipotencijalne linije su ekscentrične kružnice, odnosno ekvipotencijalne plohe su plaštevni ekscentričnih cilindara. Da bi se to matematički dokazalo, neka su vodiči smješteni u 2D pravokutni koordinatni sustav (x, y) prema Slici 14.42.

Prema izrazima (14.252) i (14.253), za ekvipotencijalnu liniju oko pozitivnog linijskog električnog naboja vrijedi da je:

$$\frac{r_2}{r_1} = k > 1 \quad (14.254)$$

gdje je, prema Slici 14.42:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x - 2 \cdot a)^2 + y^2} \quad (14.255)$$



Slika 14.42. Beskonačno dugi međusobno paralelni pravocrtni vodiči u (x, y) koordinatnom sustavu

Ako se izrazi (14.255) uvrste u izraz (14.254) i potom se novodobiveni izraz kvadrira, onda se dobije sljedeći izraz:

$$k^2 \cdot x^2 + k^2 \cdot y^2 = x^2 - 4 \cdot a \cdot x + 4 \cdot a^2 + y^2 \quad (14.256)$$

odakle slijedi da je:

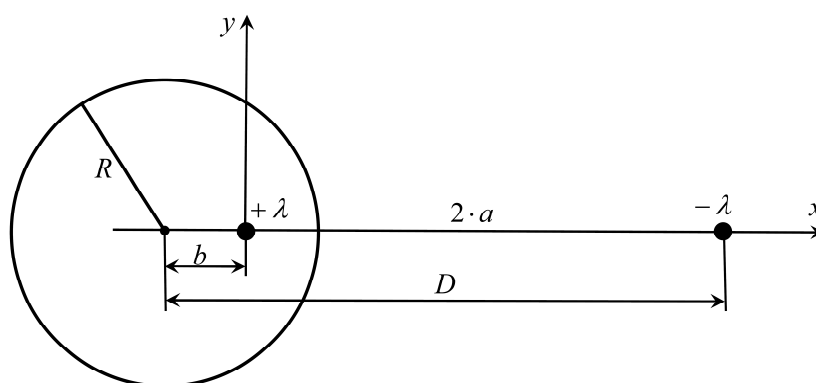
$$x^2 + \frac{4 \cdot a \cdot x}{k^2 - 1} + y^2 = \frac{4 \cdot a^2}{k^2 - 1} \quad (14.257)$$

pa je nakon nadopune na puni kvadrat:

$$\left(x + \frac{2 \cdot a}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{4 \cdot a^2}{k^2 - 1} + \frac{4 \cdot a^2}{(k^2 - 1)^2} = \left(\frac{2 \cdot a \cdot k}{k^2 - 1}\right)^2 \quad (14.258)$$

Izraz (14.258) jest jednadžba kružnice (Slika 14.43):

$$(x + b)^2 + y^2 = R^2 \quad ; \quad R = \frac{2 \cdot a \cdot k}{k^2 - 1} \quad ; \quad b = \frac{2 \cdot a}{k^2 - 1} = \frac{R}{k} \quad (14.259)$$



Slika 14.43. Grafički prikaz ekvipotencijalne kružnice i parametara b i D

Vrijedi da je:

$$D = 2 \cdot a + b = 2 \cdot a + \frac{2 \cdot a}{k^2 - 1} = \frac{2 \cdot a \cdot k^2}{k^2 - 1} = R \cdot k \quad (14.260)$$

pa je:

$$b = \frac{R}{k} = \frac{R^2}{D} \quad (14.261)$$

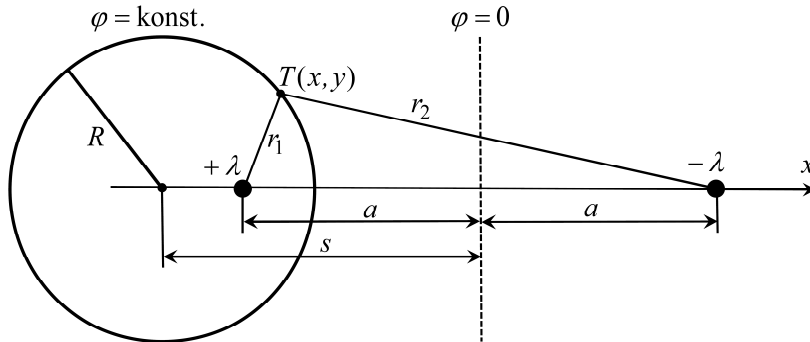
Uz supstitucije:

$$b = s - a \quad ; \quad D = s + a \quad (14.262)$$

iz izraza (14.260) i (14.261) dobije se da je:

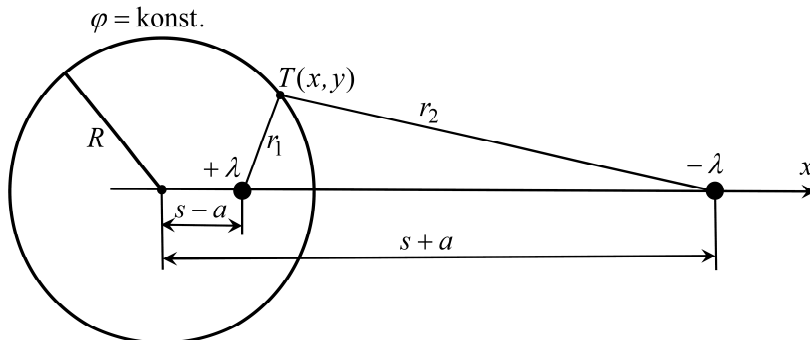
$$k = \frac{R}{s-a} = \frac{s+a}{R} \quad ; \quad s^2 - a^2 = R^2 \quad (14.263)$$

gdje je s najkraća udaljenost središta ekvipotencijalne kružnice od simetralne ravnine, dok je a najkraća udaljenost između pojedinog vodiča i simetralne ravnine (Slika 14.44). Na simetralnoj ravnini skalarni električni potencijal jednak je nuli.



Slika 14.44. Grafički prikaz ekvipotencijalne kružnice i parametara s i a

Prema Slici 14.45, $s+a$ je najkraća udaljenost između središta ekvipotencijalne kružnice oko pozitivnog naelektriziranog vodiča i negativno naelektriziranog vodiča, dok je $s-a$ najkraća udaljenost između središta ekvipotencijalne kružnice oko pozitivnog naelektriziranog vodiča i pozitivno naelektriziranog vodiča.



Slika 14.45. Grafički prikaz ekvipotencijalne kružnice i parametara $s+a$ i $s-a$

Prema izrazu (14.263), vrijedi da je za $r_2 > r_1$:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a} = k > 1 \quad ; \quad \varphi > 0 \quad (14.264)$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{s+a}{R} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{R}{s-a} \quad (14.265)$$

dok je za $r_2 < r_1$:

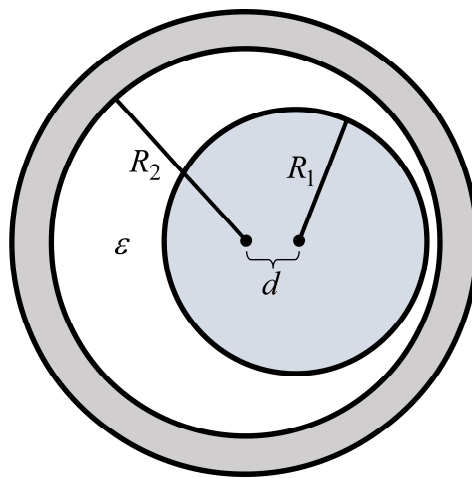
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{s-a}{R} = \frac{R}{s+a} = k < 1 \quad ; \quad \varphi < 0 \quad (14.266)$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{s-a}{R} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{R}{s+a} \quad (14.267)$$

Važno je istaknuti da se dobiveni izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala mogu koristiti i u slučajevima kada ekvipotencijalnu plohu ispunjava beskonačno dugi puni cilindrični vodič ili se pak cilindrični vodič nalazi ispred vodljive ravnine.

14.21. Kapacitet ekscentričnih vodljivih cilindara

Neka dva ekscentrična vodljiva cilindara imaju polumjere R_1 i R_2 te neka su im središta razmaknuta za d (Slika 14.46). Neka je između cilindara savršeni LIH dielektrik dielektričnosti ε te neka je duljina cilindara ℓ .

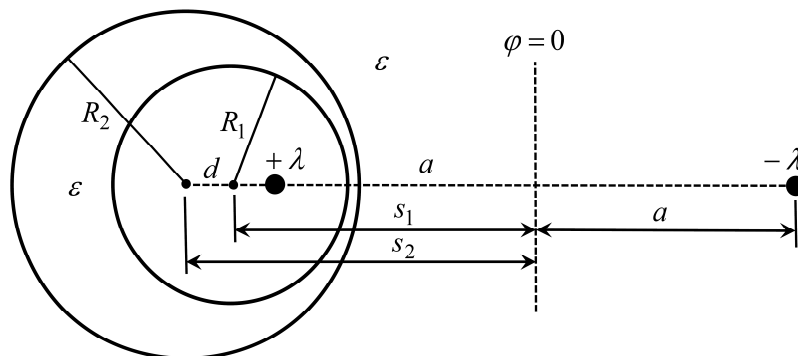


Slika 14.46. Dva ekscentrična vodljiva cilindara

Uz zanemarenje rubnih efekata, izraz za kapacitet ovih cilindara može se dobiti na temelju izraza (14.265) koji opisuje raspodjelu potencijala dvaju beskonačno dugih međusobno paralelnih pravocrtnih vodiča naelektriziranih raznoimenim nabojima iste konstantne linijske gustoće λ (Slika 14.44), koji se nalaze u neograničenom savršenom LIH dielektrik dielektričnosti ε . Dakle, dvije ekscentrične kružnice između kojih se nalazi savršeni LIH dielektrik su ekvipotencijalne kružnice oko pozitivno naelektriziranog beskonačno dugog pravocrtnog vodiča (Slika 14.47). Vrijedi da je:

$$s_1^2 - a^2 = R_1^2 \quad ; \quad s_2^2 - a^2 = R_2^2 \quad ; \quad s_2 - s_1 = d \quad (14.268)$$

a nepoznanice su: s_1, s_2 i a .



Slika 14.47. Ekvipotencijalne kružnice ekscentričnih vodljivih cilindara

Iz sustava jednačbi (14.268), slijedi da je:

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1) \cdot (s_2 + s_1) = d \cdot (s_2 + s_1) = R_2^2 - R_1^2 \quad (14.269)$$

pa sustav od dvije jednačbe s dvije nepoznanice glasi:

$$s_2 - s_1 = d \quad ; \quad s_2 + s_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{d} \quad (14.270)$$

čija su rješenja:

$$s_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot d} - \frac{d}{2} \quad ; \quad s_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot d} + \frac{d}{2} \quad (14.271)$$

dok je prema izrazu (14.268):

$$a = \sqrt{s_1^2 - R_1^2} = \sqrt{s_2^2 - R_2^2} \quad (14.272)$$

Skalarni električni potencijali obaju cilindara su pozitivni i prema (14.265) opisani su izrazima:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{s_1 + a}{R_1} \quad ; \quad \varphi_2 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{s_2 + a}{R_2} \quad (14.273)$$

pa je električni napon između cilindara opisan izrazom:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell} \cdot \ln \frac{R_2 \cdot (s_1 + a)}{R_1 \cdot (s_2 + a)} \quad ; \quad \lambda = \frac{Q}{\ell} \quad (14.274)$$

odakle slijedi da je kapacitet ekscentričnih vodljivih cilindara:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell}{\ln \frac{R_2 \cdot (s_1 + a)}{R_1 \cdot (s_2 + a)}} \quad (14.275)$$

Ako su cilindri suosni, onda se iz izraza (14.275) dobije sljedeći izraz:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (14.276)$$

jer je:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{s_1 + a}{s_2 + a} = 1 \quad (14.277)$$

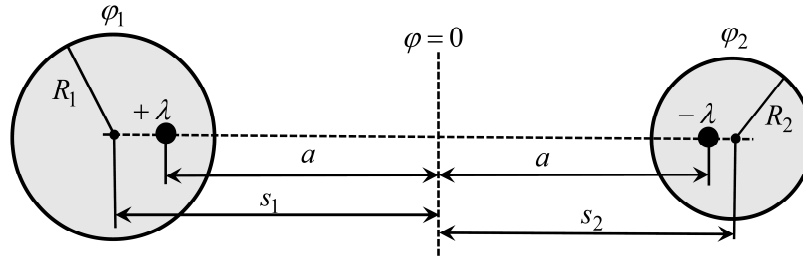
14.22. Kapacitet voda kojemu su vodiči različitog polumjera

Neka dvožični vod tvore dva osamljena beskonačno duga pravocrtna vodiča različitih polumjera R_1 i R_2 te neka su im središta razmaknuta za d (Slika 14.48). Neka je oko cilindara neograničeni savršeni LIH dielektrik dielektričnosti ε .

U ovom slučaju vrijedi da je:

$$s_1^2 - a^2 = R_1^2 \quad ; \quad s_2^2 - a^2 = R_2^2 \quad ; \quad s_1 + s_2 = d \quad (14.278)$$

a nepoznanice su: s_1 , s_2 i a .



Slika 14.48. Dvožični vod kojemu su vodiči različitog polumjera

Iz sustava jednadžbi (14.278), slijedi da je:

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1) \cdot (s_2 - s_1) = d \cdot (s_2 - s_1) = R_2^2 - R_1^2 \quad (14.279)$$

pa sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice glasi:

$$s_1 + s_2 = d \quad ; \quad s_2 - s_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{d} \quad (14.280)$$

čija su rješenja:

$$s_1 = \frac{d}{2} - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot d} \quad ; \quad s_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot d} + \frac{d}{2} \quad (14.281)$$

dok se a može izračunati iz izraza (14.272).

Skalarni električni potencijali vodiča, prema izrazima (14.265) i (14.267), opisani su izrazima:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{s_1 + a}{R_1} \quad ; \quad \varphi_2 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{R_2}{s_2 + a} \quad (14.282)$$

pa je električni napon između vodiča opisan izrazom:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{(s_1 + a) \cdot (s_2 + a)}{R_1 \cdot R_2} \quad (14.283)$$

odakle slijedi da je jedinični kapacitet voda, ili drukčije rečeno kapacitet po jedinici duljine voda, opisan izrazom:

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{(s_1 + a) \cdot (s_2 + a)}{R_1 \cdot R_2}} \quad (14.284)$$

Ako su vodiči istog polumjera R , onda je $s_1 = s_2 = s$, pa je jedinični kapacitet takvog voda opisan izrazom:

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{s + a}{R}} \quad (14.285)$$

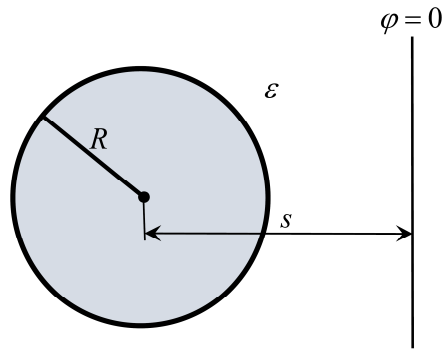
a za $d \gg R$, slijedi da je $a \approx s$, $s + a \approx d$ pa je jedinični kapacitet takvog voda:

$$C = \frac{\lambda}{U} \approx \frac{\pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{d}{R}} = \frac{\pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{2 \cdot s}{R}} \quad (14.286)$$

gdje je d najkraća udaljenosti između osiju vodiča.

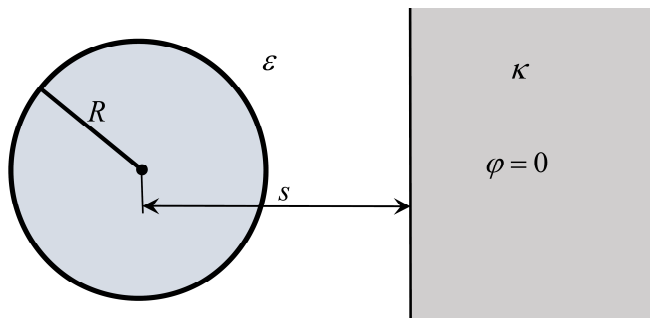
14.23. Kapacitet cilindričnog vodiča ispred vodljive ravnine

Neka se beskonačno dugi pravocrtni ekvipotencijalni vodič polumjera R nalazi ispred vodljive ravnine kojoj je skalarni električni potencijal jednak nuli te neka je ravnina od središta vodiča udaljena za s (Slika 14.49). Neka je u poluprostoru oko vodiča savršeni LIH dielektrik dielektričnosti ϵ . Rješenje je isto ako se vodljivi cilindar nalazi ispred vodljivog poluprostora (Slika 14.50), kao što je npr. tlo, kojemu je skalarni električni potencijal jednak nuli. Drugim riječima, na rješenje ne utječe značajka sredstva koje se nalazi u poluprostoru iza vodljive ravnine kojoj je, po pretpostavci, skalarni električni potencijal jednak nuli.

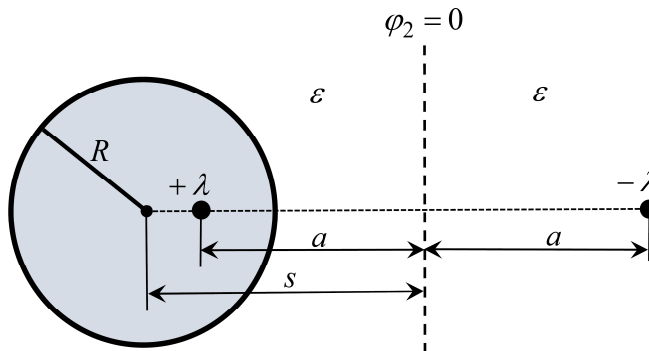


Slika 14.49. Beskonačno dugi cilindrični vodič ispred vodljive ravnine

Neka se na cilindričnom vodiču nalazi pozitivni električni naboj linijske gustoće $+\lambda$, a utjecaj vodljive ravnine, kojoj je skalarni električni potencijal jednak nuli, može se uzeti u račun tako da se po metodi odslikavanja pozitivni naboj odslika u negativni naboj linijske gustoće $-\lambda$ (Slika 14.51), jer to osigurava da je na mjestu na kojem se nalazi vodljiva ravnina skalarni električni potencijal jednak nuli. Dakle, zadovoljeni su svi granični uvjeti. Dobiveno rješenje vrijedi samo u poluprostoru u kojem se nalazi beskonačno dugi ekvipotencijalni cilindrični vodič.



Slika 14.50. Beskonačno dugi cilindrični vodič ispred vodljivog poluprostora



Slika 14.51. Stvarni i odslikani linijski naboj u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ

Zadani su s i R , dok je nepoznat iznos veličine a koja se računa iz izraza:

$$s^2 - a^2 = R^2 \quad ; \quad a = \sqrt{s^2 - R^2} \quad (14.287)$$

Skalarni električni potencijal vodiča, prema izrazu (14.265), opisan je izrazom:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{s+a}{R} \quad (14.288)$$

pa je jedinični kapacitet vodiča:

$$C = \frac{\lambda}{\varphi_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{s+a}{R}} \quad (14.289)$$

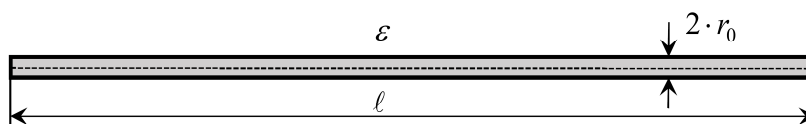
Za $s \gg R$, slijedi da je $a \approx s$, $s + a \approx 2 \cdot s$ pa je jedinični kapacitet takvog vodiča:

$$C = \frac{\lambda}{\varphi_1} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon}{\ln \frac{2 \cdot s}{R}} \quad (14.290)$$

Iz izraza (14.285) i (14.289) slijedi da je, za isti a , s i R , jedinični kapacitet beskonačno dugog vodiča ispred vodljive ravnine dvostruk u odnosu na jedinični kapacitet voda koji ima vodiče jednakih polumjera R .

14.24. Tankožičani vodiči i metoda srednjeg potencijala

Neka je pravocrtni odsječak (segment) cilindričnog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , naelektriziran električnim nabojem Q (Slika 14.52). Neka je električni naboj jednoliko raspoređen po plaštu odsječka vodiča. Neka se odsječak vodiča nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ .



Slika 14.52. Pravocrtni odsječak cilindričnog vodiča

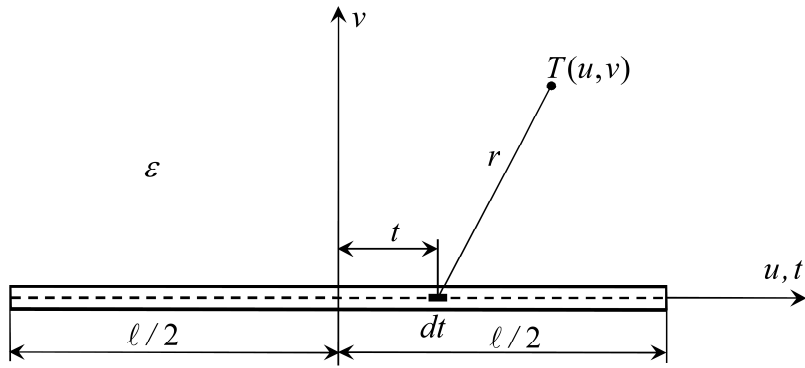
Ako je $r_0 \ll \ell$, može se koristiti tankožičana aproksimacija po kojoj se pretpostavlja da se sav naboj nalazi na osi odsječka vodiča, a traži se raspodjela potencijala u točkama izvan odsječka vodiča, uključujući površinu odsječka vodiča. Potencijal unutar odsječka vodiča jednak je potencijalu na njegovoj površini. Budući da se u numeričkom modelu naboj Q nalazi na osi odsječka vodiča, on se on nadomješta linijskim nabojem kojemu je linijska gustoća λ opisana izrazom:

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} = \text{konst.} \quad (14.291)$$

Radi jednostavnosti, odsječak se zadaje u lokalnom 2D koordinatnom sustavu (u, v) , u kojem leže os odsječka vodiča i točka promatranja $T(u, v)$. Položaj odsječka u (x, y, z) sustavu je proizvoljan. Prema Slici 14.53, točka $T(u, v)$ u kojoj se računa skalarni električni potencijal može biti u prvom ili u drugom kvadrantu lokalnog koordinatnog sustava (u, v) .

U neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ , diferencijal skalarnog električnog potencijala opisan je izrazom:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cdot dt}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} = \frac{Q \cdot dt}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \ell \cdot r} = \frac{Q \cdot dt}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \ell \cdot \sqrt{(u-t)^2 + v^2}} \quad (14.292)$$



Slika 14.53. Odsječak cilindričnog vodiča u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v)

Slijedi da je:

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(u-t)^2 + v^2}} \quad (14.293)$$

a nakon integracije dobije se da je raspodjela skalarnog električnog potencijala oko tankožičanog odsječka vodiča opisana izrazom:

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell} \cdot \left(\operatorname{Arsh} \frac{u + \frac{\ell}{2}}{v} - \operatorname{Arsh} \frac{u - \frac{\ell}{2}}{v} \right) \quad (14.294)$$

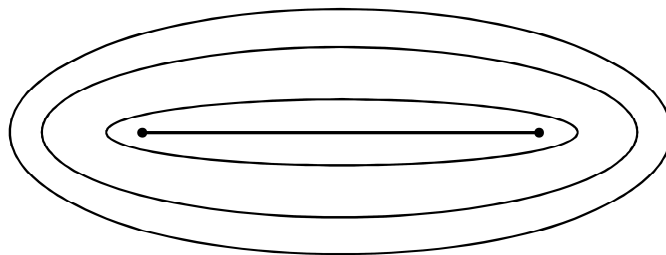
Budući da je:

$$\operatorname{Arsh} \frac{w}{v} = \ln \left(\frac{w}{v} + \sqrt{1 + \left(\frac{w}{v} \right)^2} \right) = \ln \left(w + \sqrt{v^2 + w^2} \right) - \ln v \quad (14.295)$$

izraz (14.294) poprima novi oblik:

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{v^2 + \left(u + \frac{\ell}{2} \right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u - \frac{\ell}{2} \right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (14.296)$$

Raspodjela skalarnog električnog potencijala je osnosimetrična s obzirom na lokalnu os u . Lako se može pokazati da su ekvipotencijalne plohe, opisane izrazima (14.295) i (14.296), rotacijski elipsoidi sa žarištima na krajevima osi vodiča, što znači da su u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v) ekvipotencijalne linije elipse sa žarištima na krajevima osi vodiča (Slika 14.54).

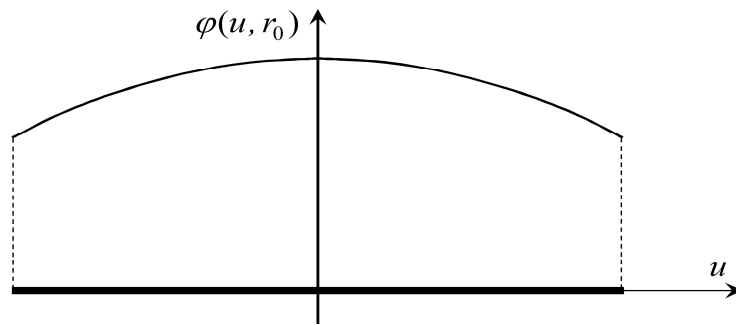


Slika 14.54. Ekvipotencijalne linije oko odsječka cilindričnog vodiča

Raspodjela skalarnog električnog potencijala duž plašta odsječka vodiča opisana je izrazom:

$$\varphi = \varphi(u, r_0) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (14.297)$$

i grafički je prikazana na Slici 14.55.

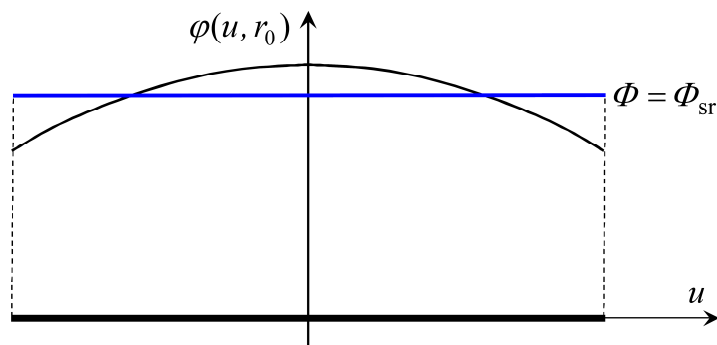


Slika 14.55. Raspodjela skalarnog električnog potencijala duž odsječka vodiča

Slika 14.55 prikazuje dobivenu aproksimaciju raspodjele potencijala duž plašta odsječka vodiča pa time i duž odsječka vodiča. Međutim, taj potencijal je u stvarnosti konstantan. Taj se fizikalno konstantni potencijal može aproksimirati na više načina. Ako se skalarni električni potencijal neke točke odsječka vodiča proglašiti skalarnim električnim potencijalom odsječka vodiča, takva se metoda naziva metodom kolokacije u točki, a aproksimacija bitno ovisi o izboru kolokacijske točke. Dakle, metoda kolokacije u točki je loša aproksimacijska metoda, a puno bolja aproksimacijska metoda jest metoda srednjeg potencijala. Metoda srednjeg potencijala je poseban slučaj Galjorkin-Bubnovljeve metode.

Po metodi srednjeg potencijala, skalarni električni potencijal odsječka vodiča Φ aproksimira se srednjim potencijalom duž plašta odsječka vodiča (Slika 14.56):

$$\Phi = \Phi_{\text{sr}} = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \varphi(u, r_0) \cdot du \quad (14.298)$$



Slika 14.56. Aproksimacija skalarnog električnog potencijala odsječka vodiča po metodi srednjeg potencijala

Iz izraza (14.297) i (14.298), nakon analitičke integracije, dobije se sljedeći izraz za skalarni električni potencijal odsječka vodiča po metodi srednjeg potencijala:

$$\Phi = \Phi_{sr} = G(\ell, r_0) \cdot Q \quad (14.299)$$

gdje je $G(\ell, r_0)$ vlastiti potencijalni koeficijent odsječka vodiča. Vrijedi da je:

$$G(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \operatorname{Arsh} \frac{\ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (14.300)$$

ili drukčije pisano:

$$G(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (14.301)$$

Ekvipotencijalni pravocrtni tankožičani cilindrični vodič ili pak ekvipotencijalna mreža vodiča, koja se nalazi u savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε , može se u numeričkom modelu podijeliti na n tankožičanih odsječaka. Po metodi srednjeg potencijala može se formirati sustav linearnih jednadžbi, gdje je poznat ukupni električni naboj vodiča ili mreže vodiča Q , a nepoznanice su električni naboji odsječaka i potencijal mreže vodiča.

Po metodi odslikavanja, u račun se može uzeti i utjecaj vodljive ravnine, kao što je npr. površina tla. Tada potencijalni koeficijenti sadrže doprinos stvarnih i odslikanih odsječaka vodiča. Matrica potencijalnih koeficijenata dobivena metodom srednjeg potencijala jest simetrična matrica.

Sustav linearnih jednadžbi glasi:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ \Phi_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -Q \end{bmatrix} \quad (14.302)$$

gdje su:

$\Phi_{mr} = \Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_n$ - skalarni električni potencijal mreže vodiča,

Φ_k - skalarni električni potencijal k -tog odsječka cilindričnog vodiča,

Q_k - električni naboj k -tog odsječka cilindričnog vodiča,

$\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$ - potencijalni koeficijenti.

Prema izrazima (14.299) i (14.301), vlastiti potencijalni koeficijenti odsječaka u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε , opisani su izrazom:

$$\alpha_{i,i} = G(\ell_i, r_{0i}) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell_i^2} \cdot \left[\ell_i \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell_i^2 + r_{0i}^2} + \ell_i}{r_{0i}} - \frac{\ell_i^2}{\sqrt{\ell_i^2 + r_{0i}^2} + r_{0i}} \right] \quad (14.303)$$

gdje je:

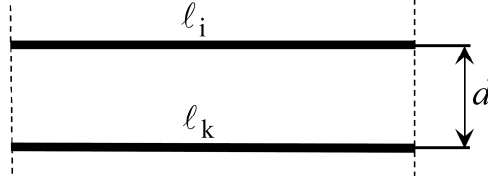
ℓ_i - duljina i -tog odsječka vodiča,

r_{0i} - polumjer i -tog odsječka vodiča.

Ako se dva odsječka nalaze u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε te su međusobno paralelni na način prikazan na Slici 14.57 i razmaknuti za d , onda je njihov međusobni potencijalni koeficijent opisan izrazom:

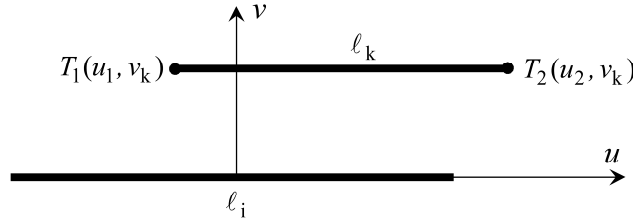
$$\alpha_{i,k} = G(\ell_i, d) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell_i^2} \cdot \left[\ell_i \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell_i^2 + d^2} + \ell_i}{d} - \frac{\ell_i^2}{\sqrt{\ell_i^2 + d^2} + d} \right] \quad (14.304)$$

gdje su duljine ovih dvaju odsječaka međusobno jednake, tj. $\ell_i = \ell_k$.



Slika 14.57. Poseban slučaj paralelnosti dvaju odsječaka vodiča

Ako se radi o općem slučaju paralelnosti dvaju odsječaka vodiča (Slika 14.58), onda se k-ti odsječak vodiča promatra u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v) i-tog odsjeka vodiča. U tom lokalnom koordinatnom sustavu krajnje točke k-tog segmenta su: $T_1(u_1, v_k)$ i $T_2(u_2, v_k)$.



Slika 14.58. Opći slučaj paralelnosti dvaju odsječaka vodiča

Ako se dva odsjeka nalaze u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε te su međusobno paralelni na način prikazan na Slici 14.58, onda se njihov međusobni potencijalni koeficijent može opisati sljedećim izrazom:

$$\alpha_{i,k} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell_i \cdot \ell_k} \cdot (C_1 + C_2 - C_3 - C_4) \quad (14.305)$$

gdje su pomoćne funkcije C_m opisane izrazima:

$$C_m = w_m \cdot \ln \left(\sqrt{w_m^2 + v_k^2} + w_m \right) - \sqrt{w_m^2 + v_k^2} \quad ; \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (14.306)$$

$$w_1 = u_2 + \frac{\ell_i}{2} \quad ; \quad w_2 = u_1 - \frac{\ell_i}{2} \quad ; \quad w_3 = u_1 + \frac{\ell_i}{2} \quad ; \quad w_4 = u_2 - \frac{\ell_i}{2} \quad (14.307)$$

Međusobno neparalelni (kosi i okomiti) odsječci vodiča leže u istoj ravnini ili pak u međusobno paralelnim ravninama. Dakle, ako neparalelni odsječci vodiča ne leže u istoj ravnini, onda postoje dvije i samo dvije međusobno paralelne ravnine u kojima oni leže (Slika 14.59). Ako leže u istoj ravnini, to je poseban slučaj dviju paralelnih ravnina koje su se preklapile. Neka su odsječci vodiča orijentirani od točke P prema točki K . To znači da je kut $\alpha \in (0, \pi)$.

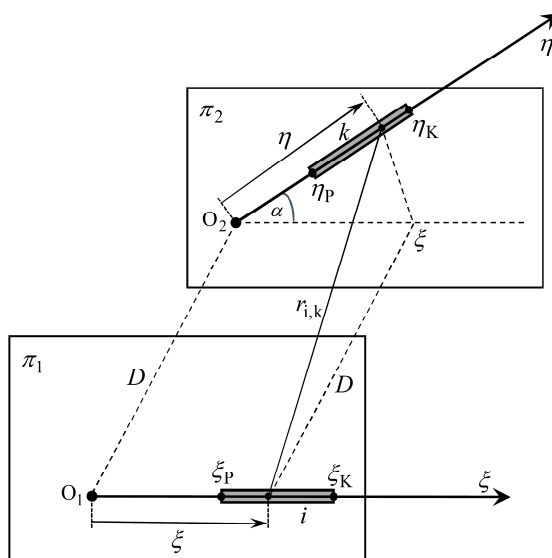
Međusobni potencijalni koeficijent dvaju neparalelnih odsječaka vodiča u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε definiran je izrazom:

$$\alpha_{i,k} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \ell_i \cdot \ell_k} \cdot \int_{\xi_P}^{\xi_K} \int_{\eta_P}^{\eta_K} \frac{d\xi \cdot d\eta}{r_{i,k}} \quad (14.308)$$

gdje je:

$$r_{i,k} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + D^2 - 2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \cos \alpha} \quad (14.309)$$

Parametri $\xi_P, \xi_K, \eta_P, \eta_K, \alpha$ i D mogu se lako izračunati iz globalnih koordinata početnih i krajnjih točaka odsječaka vodiča.



Slika 14.59. Opći slučaj neparalelnosti dvaju odsječaka vodiča

Rješenje integrala (14.308) jest Cejtinova formula koja glasi:

$$\alpha_{i,k} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot l_i \cdot l_k} \cdot [A(\xi_P, \eta_P) + A(\xi_K, \eta_K) - A(\xi_P, \eta_K) - A(\xi_K, \eta_P)] \quad (14.310)$$

gdje je:

$$A(\xi, \eta) = \xi \cdot \ln(\eta - \xi \cdot \cos \alpha + r_{i,k}) + \eta \cdot \ln(\xi - \eta \cdot \cos \alpha + r_{i,k}) + \frac{2 \cdot D}{\sin \alpha} \cdot \arctg \left(\frac{\xi + \eta + r_{i,k}}{D} \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \quad (14.311)$$

Ako postoji više ekvipotencijalnih mreža tankožičanih vodiča, onda sustav linearnih jednadžbi (14.302) treba proširiti dodavanjem još jedne nove jednadžbe i još jedne nove nepoznanice za svaku novu dodatnu ekvipotencijalnu mrežu vodiča.

14.25. Parcijalni kapaciteti

Neka u neograničenom savešenom LIH dielektriku ima ukupno n vodljivih naelektriziranih tijela. Tada vrijedi da je skalarni električni potencijal i -tog vodljivog tijela:

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} \cdot Q_k \quad ; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (14.312)$$

gdje su:

φ_i - skalarni električni potencijal i -tog vodljivog tijela,

Q_k - električni naboj k -tog vodljivog tijela,

$\alpha_{i,k}$; $i=1, 2, \dots, n$; $k=1, 2, \dots, n$ - potencijalni koeficijenti.

Ako se uzima u račun i utjecaj tla, koje se u elektrostatičkom slučaju smatra vodljivim tijelom, onda se uzima da je skalarni električni potencijal tla jednak nuli te se površina tla aproksimira ravninom.

Sustav linearnih jednadžbi (14.312), u općem slučaju, u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} ; \quad \{\varphi\} = [\alpha] \cdot \{Q\} \quad (14.313)$$

gdje je:

$\{\varphi\}$ - vektor (jednostupčasta matrica) skalarnih električnih potencijala vodljivih tijela,

$\{Q\}$ - vektor (jednostupčasta matrica) električnih naboja vodljivih tijela,

$[\alpha]$ - matrica potencijalnih koeficijenata.

Ako su zadani skalarni električni potencijali vodljivih tijela, onda vrijedi da je električni naboj i-tog vodljivog tijela:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \beta_{i,k} \cdot \varphi_k ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.314)$$

gdje su $\beta_{i,k}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$ takozvani *kapacitivni koeficijenti*.

Sustav linearnih jednadžbi (14.314) u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} ; \quad \{Q\} = [\beta] \cdot \{\varphi\} \quad (14.315)$$

gdje su matrica kapacitivnih koeficijenata $[\beta]$ i matrica potencijalnih koeficijenata $[\alpha]$ međusobno inverzne matrice:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} \quad (14.316)$$

Električni naboji vodljivih tijela mogu se izraziti i na sljedeći način:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n C_{i,k} \cdot U_{i,k} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.317)$$

gdje su:

$C_{i,k}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$ - takozvani *parcijalni kapaciteti*,

$U_{i,k}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$ - električni naponi između vodljivih tijela.

Vrijedi sljedeći izraz koji povezuje električne napone između vodljivih tijela i skalarne električne potencijale vodljivih tijela:

$$U_{i,k} = \begin{cases} \varphi_i & \text{za } i = k \\ \varphi_i - \varphi_k & \text{za } i \neq k \end{cases} \quad (14.318)$$

Matrica parcijalnih kapaciteta jest simetrična matrica:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,n} \end{bmatrix} ; \quad C_{i,k} = C_{k,i} \quad (14.319)$$

Za sustav od n vodljivih tijela vrijedi da je:

$$C_{i,k} = -\beta_{i,k} \quad \text{za } i \neq k \quad (14.320)$$

$$C_{i,i} = \sum_{k=1}^n \beta_{i,k} \quad (14.321)$$

te vrijedi da je:

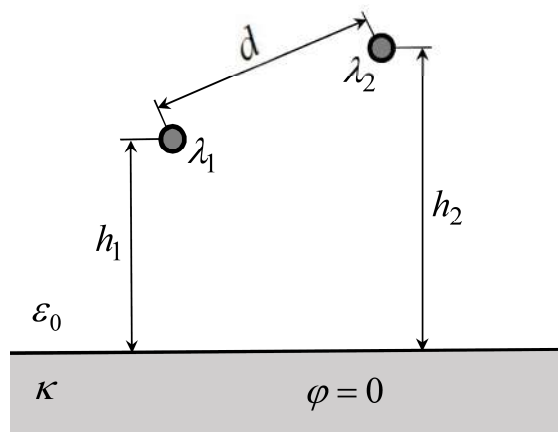
$$\beta_{i,k} = -C_{i,k} \quad \text{za } i \neq k \quad (14.322)$$

$$\beta_{i,i} = \sum_{k=1}^n C_{i,k} \quad (14.323)$$

Sustav vodljivih tijela može se opisati nadomjesnom šemom parcijalnih kapaciteta, gdje se parcijalni kapacitet $C_{i,k}$ spaja između i -tog i k -tog čvora.

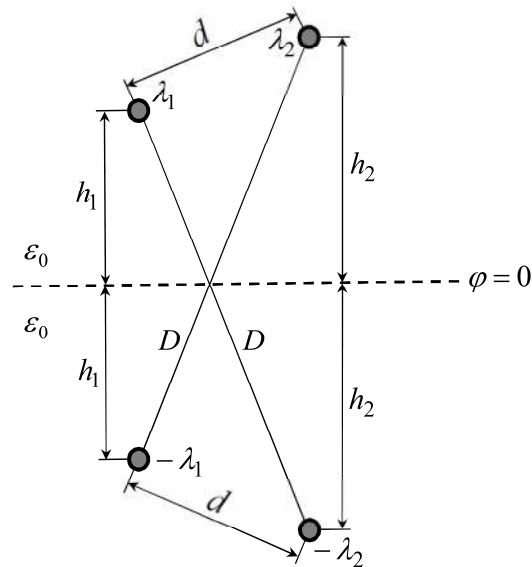
14.25.1. Parcijalni kapaciteti dvožičnog električnog voda

Neka se dvožični električni vod sastoji od dva tankožičana beskonačno duga pravocrtna, međusobno paralelna, vodiča naelektrizirana naboja linijske gustoće λ_1 i λ_2 . Neka se vod nalazi u zraku iznad tla, kojemu je skalarni električni potencijal jednak nuli (Slika 14.60). Neka je polumjer obaju vodiča $r_0 \ll d$. Neka je zrak savršeni LIH dielektik.



Slika 14.60. Dvožični električni vod iznad tla

Utjecaj tla na raspodjelu skalarnog električnog potencijala može se uzeti u račun tako da se granični uvjet na površini tla zadovolji korištenjem metode odslikavanja. Po metodi odslikavanja dva naelektrizirana vodiča u zraku (dielektričnom poluprostoru) nadomještaju četiri vodiča u neograničenom savršenom LIH dielektriku kojemu je dielektričnost jednaka dielektričnosti zraka (Slika 14.61). Dakle, osim stvarnih vodiča postoje i odslikani vodiči koji su njihove zrcalne slike, a odslikani električni naboj je suprotnog predznaka od pripadnog stvarnog električnog naboja.



Slika 14.61. Dvožični električni vod i njegova slika u neograničenom LIH zraku

Iz izraza (14.252) slijedi da su skalarni električni potencijali vodiča opisani izrazima:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{2 \cdot h_1}{r_0} + \frac{\lambda_2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{D}{d} \quad (14.324)$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda_1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{D}{d} + \frac{\lambda_2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{2 \cdot h_2}{r_0} \quad (14.325)$$

što u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varphi\} = [\alpha] \cdot \{\lambda\} \quad (14.326)$$

gdje je matrica potencijalnih koeficijenata:

$$[\alpha] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{2 \cdot h_1}{r_0} & \ln \frac{D}{d} \\ \ln \frac{D}{d} & \ln \frac{2 \cdot h_2}{r_0} \end{bmatrix} \quad (14.327)$$

Nadalje je:

$$\{\lambda\} = [\beta] \cdot \{\varphi\} = [\alpha]^{-1} \cdot \{\varphi\} \quad (14.328)$$

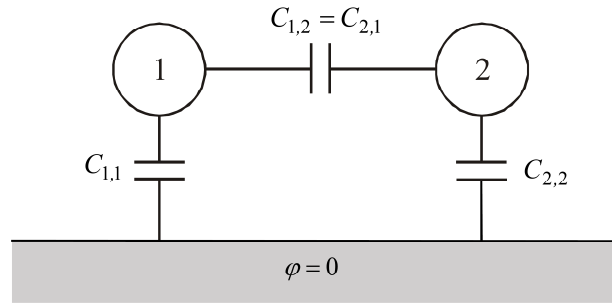
gdje je matrica jediničnih kapacitivnih koeficijenata:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix} \quad (14.329)$$

pa je matrica jediničnih parcijalnih kapaciteta:

$$[C] = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} + \beta_{1,2} & -\beta_{1,2} \\ -\beta_{2,1} & \beta_{2,1} + \beta_{2,2} \end{bmatrix} \quad (14.330)$$

Jedinični parcijalni kapaciteti opisuju kapacitivnu sprega između vodiča kao i kapacitivnu sprega između pojedinog vodiča i tla (Slika 14.62).



Slika 14.62. Jedinični parcijalni kapaciteti

Iz izraza (14.317) i (14.319), dobije se da je:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{2 \cdot h_1}{r_0} \cdot \ln \frac{2 \cdot h_2}{r_0} - \ln^2 \frac{D}{d}} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{2 \cdot h_2}{r_0} & -\ln \frac{D}{d} \\ -\ln \frac{D}{d} & \ln \frac{2 \cdot h_1}{r_0} \end{bmatrix} \quad (14.331)$$

pa je, prema izrazu (14.330):

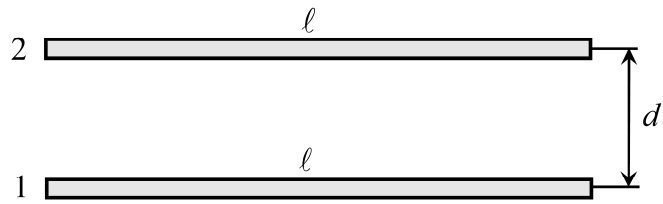
$$[C] = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{2 \cdot h_1}{r_0} \cdot \ln \frac{2 \cdot h_2}{r_0} - \ln^2 \frac{D}{d}} \cdot \begin{bmatrix} \ln \frac{2 \cdot h_2 \cdot d}{r_0 \cdot D} & \ln \frac{D}{d} \\ \ln \frac{D}{d} & \ln \frac{2 \cdot h_1 \cdot d}{r_0 \cdot D} \end{bmatrix} \quad (14.332)$$

Pogonski jedinični kapacitet dvožičnog voda s uračunatim utjecajem tla jest ukupni jedinični kapacitet između dva vodiča:

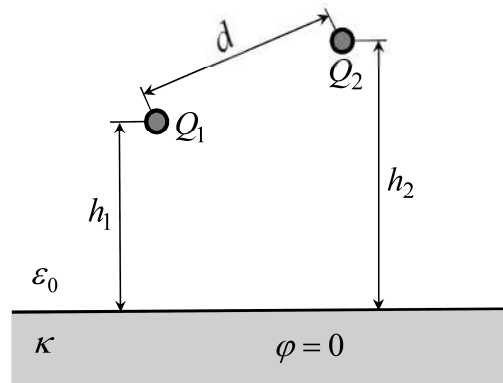
$$C = C_{1,2} + \frac{C_{1,1} \cdot C_{2,2}}{C_{1,1} + C_{2,2}} \quad (14.333)$$

14.25.2. Parcijalni kapaciteti međusobno paralelnih odsječaka vodiča

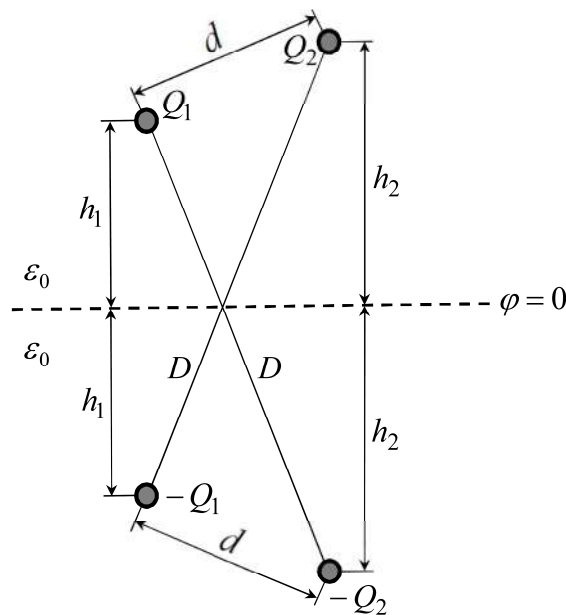
Neka se dva pravocrtna cilindrična odsječaka vodiča, duljine ℓ , međusobno paralelna i udaljena za d (Slika 14.63). Neka su naelektrizirani nabojima Q_1 i Q_2 . Neka se vodiči nalaze u zraku na visini h_1 i h_2 iznad tla, kojemu je skalarni električni potencijal jednak nuli (Slika 14.64). Neka je polumjer obaju vodiča $r_0 \ll d$. Neka je zrak savršeni LIH dielektik. Parcijalne kapacitete vodiča treba odrediti po metodi srednjeg potencijala. Utjecaj tla na raspodjelu skalarnog električnog potencijala može se uzeti u račun tako da se granični uvjet na površini tla zadovolji korištenjem metode odslikavanja (Slika 14.65).



Slika 14.63. Dva međusobno paralelna cilindrična odsječka vodiča



Slika 14.64. Dva tankožičana odsjeka vodiča iznad tla



Slika 14.65. Dva odsječka vodiča i njihove slike u neograničenom LIH zraku

Po metodi srednjeg potencijala linijska se gustoća električnog naboja duž osi tankožičanog odsječka (segmenta) vodiča aproksimira konstantom, dok se skalarni električni potencijal odsječka vodiča aproksimira se srednjim potencijalom duž plašta odsječka, što je detaljno opisano u potpoglavlju 14.24. Vrijedi da je:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} ; \quad \lambda_1 = \frac{Q_1}{\ell} ; \quad \lambda_2 = \frac{Q_2}{\ell} \quad (14.334)$$

gdje su Φ_1 i Φ_2 (srednji) skalarni električni potencijali odsječaka vodiča, dok su Q_1 i Q_2 električni naboji odsječaka vodiča.

Prema izrazu (14.303) i Slici 14.61, matrica potencijalnih koeficijenata, dobivena po metodi srednjeg potencijala uz uračunati utjecaj tla, opisana je izrazom:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_1) & G(\ell, d) - G(\ell, D) \\ G(\ell, d) - G(\ell, D) & G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_2) \end{bmatrix} \quad (14.335)$$

gdje je, prema izrazu (14.301), u slučaju kada je savršeni LIH dielektrik zrak:

$$G(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (14.336)$$

Matrica kapacitivnih koeficijenata dobije se inverzijom matrice potencijalnih koeficijenata, što je opisano izrazom (14.335):

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix} \quad (14.337)$$

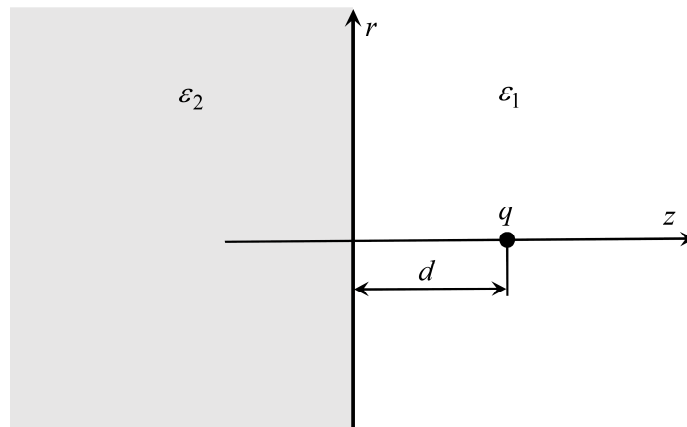
pa je matrica parcijalnih kapaciteta opisana izrazom:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} + \beta_{1,2} & -\beta_{1,2} \\ -\beta_{2,1} & \beta_{2,1} + \beta_{2,2} \end{bmatrix} \quad (14.338)$$

S obzirom na to da su prethodni izrazi složeni, nema smisla tražiti analitičke izraze za članove matrice kapacitivnih koeficijenata i članove matrice parcijalnih kapaciteta.

14.26. Sila na granici dvaju dielektrika i sila na električni naboj

Neka se točkasti električni naboj q nalazi ispred dielektričnog poluprostora na udaljenosti d . Neka se električni naboj nalazi u poluprostoru dielektričnosti ϵ_1 , a neka preostali dio prostora ima dielektričnost ϵ_2 (Slika 14.66). Neka je $\epsilon_1 > \epsilon_2$.



Slika 14.66. Točkasti električni naboj u cilindričnom koordinatnom sustavu

Po metodi odslikavanja, lako se dobije da je na granici dvaju dielektrika ($z = 0$) vektor jakosti električnog polja u sredstvu 2:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2z} \cdot \vec{e}_z = \frac{k_T \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_2} \cdot \left[\frac{r \cdot \vec{e}_r - d \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(d^2 + r^2)^3}} \right] \quad (14.339)$$

gdje je, prema izrazu (14.130), faktor transmisije:

$$k_T = \frac{2 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (14.340)$$

Slijedi da je su na granici dvaju sredstava ($z = 0$), za $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, tangencijalna komponenta vektora jakosti električnog polja i normalna komponenta vektora električnog pomaka, u oba dielektrika, opisane izrazima:

$$E_t = E_{2r} = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{r}{\sqrt{(d^2 + r^2)^3}} \quad (14.341)$$

$$D_n = D_{2n} = \varepsilon_2 \cdot E_{2z} = \frac{\varepsilon_2 \cdot q}{2 \cdot \pi \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{-d}{\sqrt{(d^2 + r^2)^3}} \quad (14.342)$$

Prema izrazu (14.118), električni tlak na granici tih dvaju dielektrika opisan je izrazom:

$$t_n^e = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2} + E_t^2 \right) \quad (14.343)$$

pa je:

$$t_n^e = \frac{q^2}{8 \cdot \pi^2} \cdot \frac{k_R}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d^2}{(d^2 + r^2)^3} + \frac{r^2}{(d^2 + r^2)^3} \right) \quad (14.344)$$

gdje je, prema izrazu (14.129):

$$k_R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad (14.345)$$

faktor refleksije.

Sila na granici dvaju dielektrika dobije se integracijom električnog tlaka po graničnoj plohi $z = 0$, a sila je usmjerena (orijentirana) od sredstva veće dielektričnosti prema sredstvu manje dielektričnosti:

$$\vec{F}_{gr} = (-\vec{e}_z) \cdot \int_{S_{gr}} t_n^e \cdot dS = (-\vec{e}_z) \cdot \int_0^\infty t_n^e \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (14.346)$$

pa je:

$$\vec{F}_{gr} = (-\vec{e}_z) \cdot \frac{k_R \cdot q^2}{4 \cdot \pi \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \int_0^\infty \frac{d^2 \cdot r \cdot dr}{(d^2 + r^2)^3} + \int_0^\infty \frac{r^3 \cdot dr}{(d^2 + r^2)^3} \right) \quad (14.347)$$

Vrijedi da je:

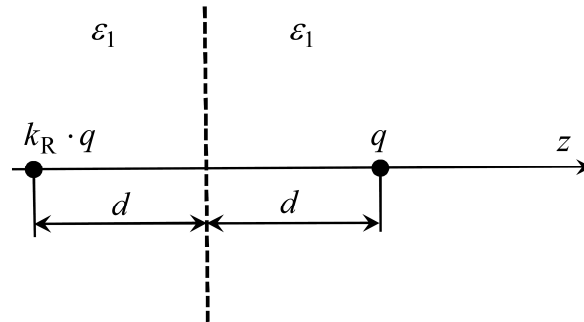
$$\int_0^\infty \frac{d^2 \cdot r \cdot dr}{(d^2 + r^2)^3} = \int_0^\infty \frac{r^3 \cdot dr}{(d^2 + r^2)^3} = \frac{1}{(2 \cdot d)^2} \quad (14.348)$$

pa je konačni izraz za silu na granici dvaju dielektrika:

$$\vec{F}_{\text{gr}} = (-\vec{e}_z) \cdot \frac{q \cdot (k_R \cdot q)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot (2 \cdot d)^2} \quad (14.349)$$

Budući da je, prema izrazu (14.345), za $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, faktor refleksije pozitivan, onda su stvarni električni naboj q i odslikani električni naboj istoimeni (Slika 14.67), što znači da se međusobno odbijaju pa je sila na električni naboj q :

$$\vec{F}_q = \vec{e}_z \cdot \frac{q \cdot (k_R \cdot q)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot (2 \cdot d)^2} = -\vec{F}_{\text{gr}} \quad (14.350)$$

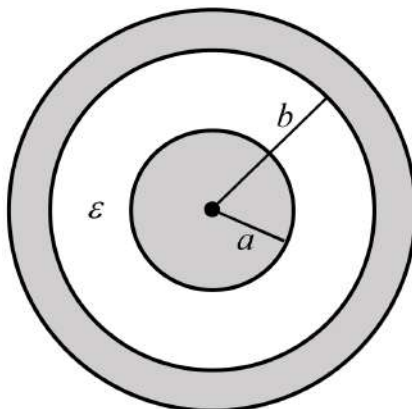


Slika 14.67. Stvarni i odslikani električni naboj

Zaključak: Sila na granici dvaju dielektrika jest posljedica težnje da sredstvo veće dielektričnosti potisne sredstvo manje dielektričnosti. Sila na električni naboj jednaka je po iznosu sili na granici dvaju dielektrika, ali je suprotnog smjera. Ako je električni naboj u sredstvu veće dielektričnosti, on se nastoji otisnuti što dublje u sredstvo veće dielektričnosti. Sukladno zakonu akcije i reakcije, može se reći da se sredstvo manje dielektričnosti i električni naboj u sredstvu veće dielektričnosti međusobno odbijaju. Ako se naboj nalazi u sredstvu manje dielektričnosti, onda se sredstvo veće dielektričnosti i električni naboj međusobno privlače. Dakle, sila na električni naboj, koji je stvorio elektrostatičko polje, uvijek je suprotnog smjera u odnosu na silu na granici dvaju dielektrika. Sve rečeno opisano je izrazom (14.350).

14.27. Zadaci

Zadatak 14.1. Na temelju rješenja Laplaceove diferencijalne jednačbe u cilindričnom koordinatnom sustavu, odredite linijsku gustoću naboja beskonačno dugog cilindričnog kondenzatora. Neka je između obloga kondenzatora dielektrik relativne dielektričnosti $\varepsilon_r = 10$. Neka je unutarnji cilindar na skalarnom električnom potencijalu $\varphi = \varphi_a = 100$ V, a vanjski cilindar na skalarnom električnom potencijalu $\varphi = \varphi_b = 0$ V. Neka je $a = 1$ cm, $b = 2$ cm. Neka se os z cilindričnog koordinatnog sustava poklapa s osi cilindričnog kondenzatora. Neka je linijska gustoća naboja po pojedinom cilindru konstantna.



Slika 14.68. Beskonačno dugi cilindrični kondenzator

Rješenje:

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) , Laplaceova diferencijalna jednačba skalarnog električnog potencijala opisana je izrazom (14.168), koja za osnosimetrični problem, odnosno za $\varphi = \varphi(r)$, glasi:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r \cdot \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (14.351)$$

odakle slijedi da je:

$$r \cdot \frac{d\varphi}{dr} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad (14.352)$$

pa je:

$$\varphi = C_1 \cdot \int \frac{dr}{r} = C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad (14.353)$$

gdje su C_1 i C_2 nepoznate konstante.

Iz rješenja (14.353) Laplaceove diferencijalne jednačbe (14.351) i zadanih graničnih uvjeta:

$$\varphi|_{r=a} = \varphi_a = 100 \text{ V} \quad ; \quad \varphi|_{r=b} = \varphi_b = 0 \text{ V} \quad (14.354)$$

dobije se sljedeći sustav linearnih jednačbi:

$$C_1 \cdot \ln a + C_2 = \varphi_a \quad (14.355)$$

$$C_1 \cdot \ln b + C_2 = \varphi_b \quad (14.356)$$

čija su rješenja:

$$C_1 = -\frac{\varphi_a - \varphi_b}{\ln \frac{b}{a}} \quad ; \quad C_2 = \varphi_b + \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \ln b \quad (14.357)$$

U ovom posebnom slučaju, jakost električnog polja u dielektriku cilindričnog kondenzatora definirana je sljedećim izrazom:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \vec{e}_r \quad (14.358)$$

pa je prema izrazima (14.353) i (14.358):

$$\vec{E} = -\frac{C_1}{r} \cdot \vec{e}_r \quad (14.359)$$

Pomoću Gaussovog zakona lako se dobije izraz (14.33) za jakost električnog polja u dielektriku cilindričnog kondenzatora, koji glasi:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \cdot \vec{e}_r \quad (14.360)$$

Iz izraza (14.359) i (14.360) slijedi da je linijska gustoća naboja cilindričnog kondenzatora:

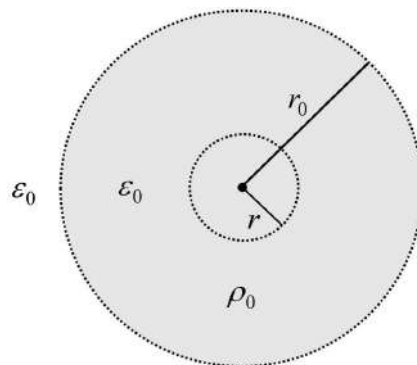
$$\lambda = -2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot C_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \cdot (\varphi_a - \varphi_b) \quad (14.361)$$

pa se, nakon uvrštenja zadanih podataka, dobije da je:

$$\lambda = \frac{2000 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\ln 2} = 8,0260736 \cdot 10^{-8} \text{ C/m} = 80,260736 \text{ nC/m} \quad (14.362)$$

Budući da je unutarnji cilindar na višem skalarnom električnom potencijalu u odnosu na vanjski cilindar, na unutarnjem cilindru se nalazi pozitivni naboj linijske gustoće λ , a na vanjskom cilindru negativni naboj linijske gustoće $-\lambda$, kao što je prikazano na Slici 14.19.

Zadatak 14.2. U zraku prostorni električni naboj formira kuglu i ima konstantnu volumnu gustoću $\rho_0 = 1 \text{ nC/m}^3$. Pomoću Gaussovog zakona odredite funkciju skalarnog električnog potencijala u svim točkama prostora sfernog koordinatnog sustava. Neka je polumjer kugle $r_0 = 1 \text{ m}$.



Slika 14.69. Električni naboj u obliku kugle

Rješenje:

Unutar kugle (područje 1) vrijedi da je:

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 \cdot dV = Q_{ob} \quad (14.363)$$

gdje je zatvorena ploha S sfera polumjera $r \leq r_0$ (Slika 14.69).

Raspodjela vektora električnog pomaka je centralno simetrična pa iz izraza (14.363) slijedi da je:

$$D_1 \cdot S = D_1 \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi = \rho_0 \cdot V = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \quad (14.364)$$

odakle slijedi da je:

$$D_1 = \frac{\rho_0}{3} \cdot r \quad ; \quad E_1 = \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot r \quad (14.365)$$

Izvan kugle (područje 2) vrijedi da je:

$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 \cdot dV = Q_{ob} \quad (14.366)$$

gdje je zatvorena ploha S sfera polumjera $r > r_0$ (Slika 14.69).

Raspodjela vektora električnog pomaka je centralno simetrična pa iz izraza (14.366) slijedi da je:

$$D_2 \cdot S = D_2 \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi = \rho_0 \cdot V_0 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \cdot r_0^3 \cdot \pi \quad (14.367)$$

odakle slijedi da je:

$$D_2 = \frac{\rho_0}{3} \cdot \frac{r_0^3}{r^2} \quad ; \quad E_2 = \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_0^3}{r^2} \quad (14.368)$$

Jakost električnog polja definirana je sljedećim izrazom:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \vec{e}_r \quad (14.369)$$

pa je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana sljedećim izrazima:

$$\varphi_1 = -\int E_1 \cdot dr = -\int \frac{\rho_0 \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot dr = -\frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (14.370)$$

$$\varphi_2 = -\int E_2 \cdot dr = -\int \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_0^3}{r^2} \cdot dr = \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_0^3}{r} + C_2 \quad (14.371)$$

Uobičajena je pretpostavka da je referentna točka, u kojoj je skalarni električni potencijal jednak nuli, u beskonačnosti, odakle slijedi da je konstanta $C_2 = 0$ pa je:

$$\varphi_2 = \frac{\rho_0}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_0^3}{r} \quad \text{za } r > r_0 \quad (14.372)$$

Iz uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=r_0} = \varphi_2|_{r=r_0} \quad (14.373)$$

lako se dobije da je:

$$C_1 = \frac{\rho_0 \cdot r_0^2}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\rho_0 \cdot r_0^2}{2 \cdot \varepsilon_0} \quad (14.374)$$

pa je, prema izrazima (14.370) i (14.374), raspodjela skalarnog električnog potencijala u području 1 opisana sljedećim izrazom:

$$\varphi_1 = \frac{\rho_0}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right) \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (14.375)$$

Nakon uvrštenja zadanih podataka, dobije se da je:

$$\varphi_1 = 56,4704533 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{3}\right) \text{ V} \quad \text{za } r \leq 1 \text{ m} \quad (14.376)$$

$$\varphi_2 = \frac{37,64696889}{r} \text{ V} \quad \text{za } r > 1 \text{ m} \quad (14.377)$$

Zadatak 14.3. U zraku prostorni naboj formira kuglu i ima konstantnu volumnu gustoću $\rho_0 = 1 \text{ nC/m}^3$. Na temelju rješenja Poissonove diferencijalne jednačbe odredite funkciju skalarnog električnog potencijala u svim točkama prostora sfernog koordinatnog sustava. Neka je polumjer kugle $r_0 = 1 \text{ m}$.

Rješenje:

Ovaj je zadatak tekstualno gotovo isti kao i prethodni zadatak pa mu se može pridružiti Slika 14.69, a ova se dva zadatka razlikuju samo u načinu rješavanja.

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, ϕ) laplasijski skalarnog električnog potencijala opisan je izrazom (14.87), koji za centralno simetrični problem, odnosno za $\varphi = \varphi(r)$, glasi:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (14.378)$$

pa za centralno simetrični problem Poissonova diferencijalna jednačba glasi:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (14.379)$$

U ovom konkretnom slučaju vrijedi da je:

$$\Delta \varphi_1 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (14.380)$$

$$\Delta \varphi_2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 \quad \text{za } r > r_0 \quad (14.381)$$

Nakon dvostruke integracije prethodnih dvaju izraza, dobiju se sljedeći izrazi:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (14.382)$$

$$\varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4 \quad \text{za } r > r_0 \quad (14.383)$$

Iz uobičajene pretpostavke da je referentna točka u beskonačnosti, slijedi da je konstanta $C_4 = 0$. Osim toga, za $r = 0$ skalarni električni potencijal mora biti konačan, odakle slijedi da je konstanta $C_1 = 0$. Nakon uvrštenja ovih konstanti, izrazi (14.382) i (14.383) poprimaju novi oblik:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^2}{2} + C_2 \quad ; \quad \varphi_2 = -\frac{C_3}{r} \quad (14.384)$$

Izrazi (14.384) trebaju zadovoljiti granične uvjete:

$$\varphi_1|_{r=r_0} = \varphi_2|_{r=r_0} \quad ; \quad \varepsilon_0 \cdot \frac{d\varphi_1}{dr} \Big|_{r=r_0} = \varepsilon_0 \cdot \frac{d\varphi_2}{dr} \Big|_{r=r_0} \quad (14.385)$$

Na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta, lako se dobije da je:

$$C_2 = \frac{\rho_0 \cdot r_0^2}{2 \cdot \varepsilon_0} \quad ; \quad C_3 = -\frac{\rho_0 \cdot r_0^3}{3 \cdot \varepsilon_0} \quad (14.386)$$

pa je, prema izrazima (14.384) i (14.386), raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana sljedećim izrazima:

$$\varphi_1 = \frac{\rho_0}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (14.387)$$

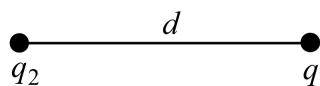
$$\varphi_2 = \frac{\rho_0}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{r_0^3}{r} \quad \text{za } r > r_0 \quad (14.388)$$

Nakon uvrštenja zadanih podataka, dobije da je:

$$\varphi_1 = 56,4704533 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{3} \right) \text{ V} \quad \text{za } r \leq 1 \text{ m} \quad (14.389)$$

$$\varphi_2 = \frac{37,64696889}{r} \text{ V} \quad \text{za } r > 1 \text{ m} \quad (14.390)$$

Zadatak 14.4. Odredite jednadžbu ekvipotencijalne plohe nultog skalarnog električnog potencijala za dva raznoimena točkasta električna naboja zadanog iznosa q_1 i q_2 koji su međusobno udaljeni za d . Pretpostavite da je $|q_1| > |q_2|$. Neka se električni naboji nalaze u neograničenom LIH dielektriku dielektričnosti ε .



Slika 14.70. Dva točkasta naboja u neograničenom LIH dielektriku

Rješenje:

Raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana je sljedećim izrazom:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \quad (14.391)$$

gdje je r_1 udaljenost naboja q_1 od točke promatranja, dok je r_2 udaljenost naboja q_2 od točke promatranja.

Ako su naboji istoimeni, onda je njihova ploha nultog skalarnog električnog potencijala u beskonačnosti. To znači da ima smisla razmatrati samo slučaj kada su naboji raznoimeni, tj. kada je:

$$\text{sign } q_1 = -\text{sign } q_2 \quad (14.392)$$

Tada je $\varphi = 0$ za $r_1, r_2 \rightarrow \infty$ te u slučaju kada je:

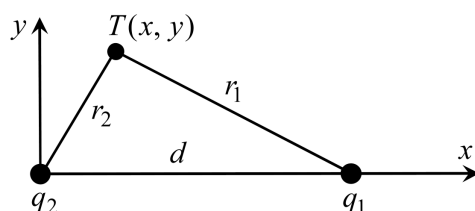
$$\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} = 0 \quad (14.393)$$

odakle slijedi da je:

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{q_1}{q_2} = k > 1 \quad (14.394)$$

zbog uvedene pretpostavke $|q_1| > |q_2|$.

Radi jednostavnosti, može se uzeti da se naboji nalaze u 2D pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y), koji je prikazan na Slici 14.71. To je moguće napraviti jer je ploha nultog skalarnog električnog potencijala osno simetrična s obzirom na koordinatnu os x .



Slika 14.71. Dva točkasta naboja u 2D koordinatnom sustavu (x, y)

Prema Slici 14.71, vrijedi da je:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k \quad (14.395)$$

odakle se, nakon kvadriranja izraza (14.395), lako dobije sljedeći izraz:

$$x^2 + \frac{2 \cdot d}{k^2 - 1} \cdot x + y^2 = \frac{d^2}{k^2 - 1} \quad (14.396)$$

koji, nakon nadopunjavanja na puni kvadrat, poprima sljedeći oblik:

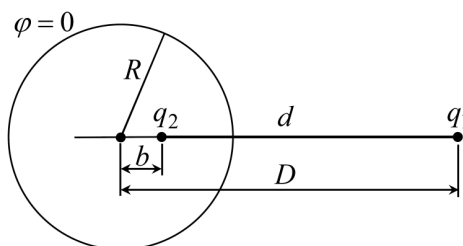
$$\left(x + \frac{d}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2 \cdot k^2}{(k^2 - 1)^2} \quad (14.397)$$

a to je jednačba kružnice $(x - p)^2 + y^2 = R^2$, kojoj je središte na osi x , dok je R polumjer kružnice. Dakle, ploha nultog potencijala je kuglina ploha (sfera) sa središtem na osi x .

Iz izraza (14.397) slijedi da je:

$$b = -p = \frac{d}{k^2 - 1} \quad ; \quad R = \frac{d \cdot k}{k^2 - 1} = b \cdot k \quad (14.398)$$

gdje su parametri b i R zorno prikazani na Slici 14.72.



Slika 14.72. Linija nultog potencijala u 2D koordinatnom sustavu (x, y)

Prema Slici 14.72, parametar b je pomak središta kružnice nultog potencijala ulijevo u odnosu na točku u kojoj se nalazi naboj q_2 , dok je D udaljenost naboja q_1 od središta kružnice nultog potencijala. Vrijedi da je:

$$D = d + b = d + \frac{d}{k^2 - 1} = \frac{d \cdot k^2}{k^2 - 1} = R \cdot k \quad (14.399)$$

odakle slijedi da je:

$$k = \frac{D}{R} = -\frac{q_1}{q_2} \quad (14.400)$$

Iz izraza (14.398) i (14.400), slijedi da je:

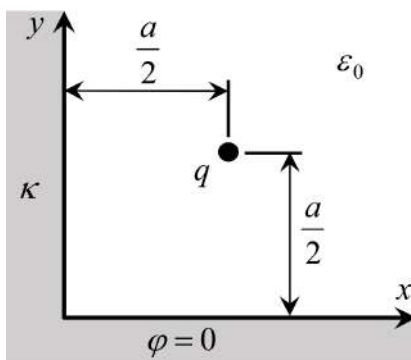
$$b = \frac{R}{k} = \frac{R^2}{D} \quad (14.401)$$

U primjeni metode odslikavanja, bez analitičkog izvoda koriste se dobiveni izrazi:

$$q_2 = -q_1 \cdot \frac{R}{D} ; \quad b = \frac{R^2}{D} \quad (14.402)$$

Ako je $q_1 = -q_2$, onda je jednadžba plohe nultog potencijala $r_1 = r_2$, a to je simetralna ravnina između dvaju električnih naboja

Zadatak 14.5. Odredite iznos jakosti električnog polja u točki $T(x, y, z)$ uzrokovanog pozitivnim točkastim električnim nabojem q koji se nalazi na simetrali prvog kvadranta u ravnini $z = 0$, dok su ravnine $x = 0$ i $y = 0$ vodljive ravnine.

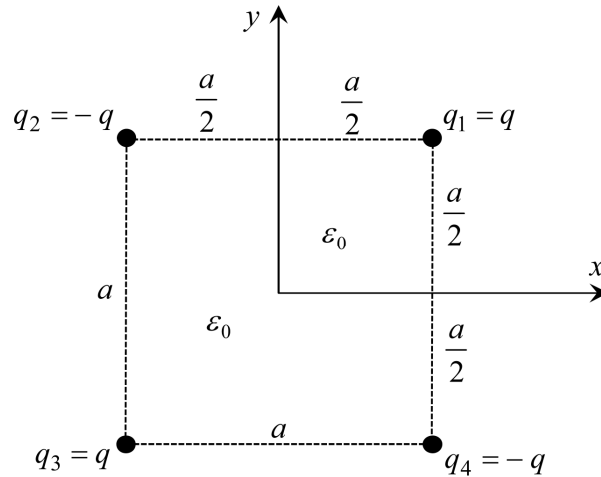


Slika 14.73. Pozitivni točkasti električni naboj ispred dviju vodljivih poluravnina

Rješenje:

Zadatak se može riješiti metodom odslikavanja električnog naboja. Stvarni električni naboj i tri odslikana električna naboja (Slika 14.74), koji se nalaze u ravnini $z = 0$, osiguravaju zadovoljenje graničnih uvjeta:

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{y=0} = 0 \quad (14.403)$$



Slika 14.74. Stvarni električni naboj i odslikani električni naboji

Po metodi odslikavanja, cijeli se prostor proglašava savršenim LIH dielektrikom (zrakom), a dobiveno rješenje vrijedi samo u dijelu prostora za koji vrijedi da je $x \geq 0, y \geq 0$.

Vektor jakosti električnog polja od i -tog električnog naboja opisan je izrazom:

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{r_{ix} \cdot \vec{i} + r_{iy} \cdot \vec{j} + r_{iz} \cdot \vec{k}}{r_i^3} \quad (14.404)$$

gdje je:

$$q_1 = q_3 = q \quad ; \quad q_2 = q_4 = -q \quad (14.405)$$

dok je:

$$r_{1x} = x - \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{1y} = y - \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{1z} = z \quad ; \quad r_1 = \sqrt{r_{1x}^2 + r_{1y}^2 + r_{1z}^2} \quad (14.406)$$

$$r_{2x} = x + \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{2y} = y - \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{2z} = z \quad ; \quad r_2 = \sqrt{r_{2x}^2 + r_{2y}^2 + r_{2z}^2} \quad (14.407)$$

$$r_{3x} = x + \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{3y} = y + \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{3z} = z \quad ; \quad r_3 = \sqrt{r_{3x}^2 + r_{3y}^2 + r_{3z}^2} \quad (14.408)$$

$$r_{4x} = x - \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{4y} = y + \frac{a}{2} \quad ; \quad r_{4z} = z \quad ; \quad r_4 = \sqrt{r_{4x}^2 + r_{4y}^2 + r_{4z}^2} \quad (14.409)$$

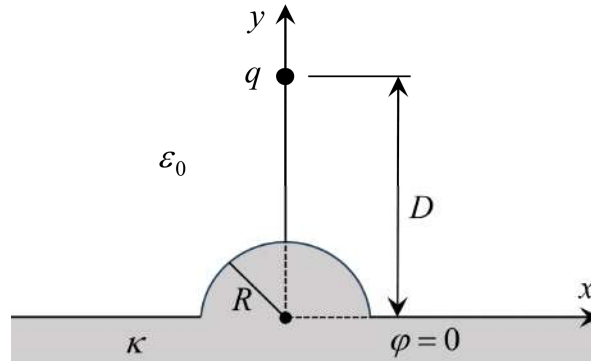
Vektor ukupne jakosti električnog polja opisan je sljedećim izrazom:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^4 \vec{E}_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \left(q_i \cdot \frac{r_{ix} \cdot \vec{i} + r_{iy} \cdot \vec{j} + r_{iz} \cdot \vec{k}}{r_i^3} \right) = \{E_x, E_y, E_z\} \quad (14.410)$$

a njegov iznos opisan je izrazom:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \quad (14.411)$$

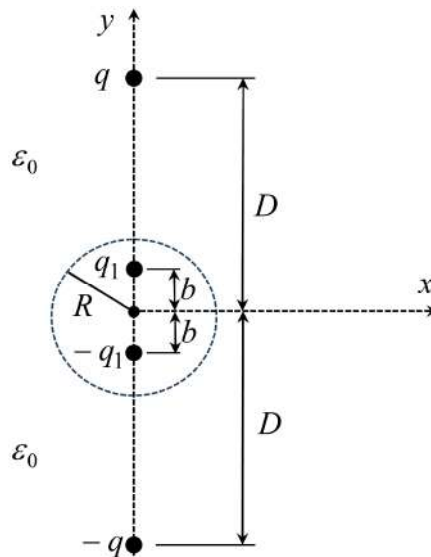
Zadatak 14.6. Odredite raspodjelu skalarnog električnog potencijala oko točkastog električnog naboja q koji se nalazi u zraku iznad vodljive ravnine s polukuglastim ispupčenjem polumjera R . Neka je električni naboj za D udaljen od ravnine $y = 0$ te neka se točkasti električni naboj i središte polukuglastog ispupčenja nalaze u ravnini $z = 0$.



Slika 14.75. Električni naboj iznad vodljive ravnine s polukuglastim ispupčenjem

Rješenje:

Zadatak se može riješiti metodom odslikavanja električnog naboja. Stvarni električni naboj i tri odslikana električna naboja (Slika 14.76), koji se nalaze u ravnini $z = 0$, osiguravaju zadovoljenje граниčnih uvjeta.



Slika 14.76. Stvarni električni naboj i odslikani električni naboji

Prema izrazu (14.402), vrijedi da je:

$$q_1 = -q \cdot \frac{R}{D} \quad ; \quad b = \frac{R^2}{D} \tag{14.412}$$

Slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku opisana sljedećim izrazom:

$$\varphi = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_s} - \frac{R}{r_1 \cdot D} + \frac{R}{r_{1s} \cdot D} \right) \tag{14.413}$$

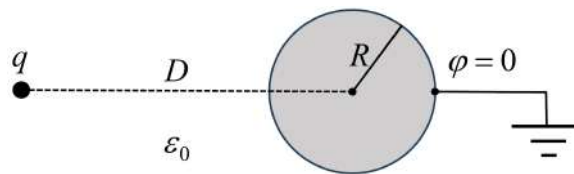
gdje je:

$$r = \sqrt{x^2 + (y - D)^2 + z^2} \quad ; \quad r_s = \sqrt{x^2 + (y + D)^2 + z^2} \quad (14.414)$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - b)^2 + z^2} \quad ; \quad r_{1s} = \sqrt{x^2 + (y + b)^2 + z^2} \quad (14.415)$$

gdje je r udaljenost električnog naboja q od točke promatranja $T(x, y, z)$, r_s udaljenost električnog naboja $-q$ od točke promatranja $T(x, y, z)$, r_1 udaljenost električnog naboja q_1 od točke promatranja $T(x, y, z)$, a r_{1s} udaljenost električnog naboja $-q_1$ od točke promatranja $T(x, y, z)$.

Zadatak 14.7. Točkasti električni naboj $q = 10$ nC nalazi se na udaljenosti $D = 0,1$ m od središta uzemljene vodljive kugle polumjera $R = 0,05$ m. Izračunajte skalarni električni potencijal kugle ako se prekine uzemljenje, a zatim električni naboj q udalji u beskonačnost. Zanimajte utjecaj vodiča uzemljenja na raspodjelu skalarnog električnog potencijala.



Slika 14.77. Električni naboj i uzemljena vodljiva kugla

Rješenje:

Da bi sfera bila na nultom skalarnom električnom potencijalu, na površini uzemljene vodljive kugle nalazi se ukupni električni naboj:

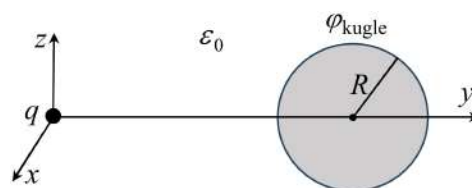
$$q_1 = -q \cdot \frac{R}{D} \quad (14.416)$$

Nakon što se prekine uzemljenje, električni naboj q_1 ostane na površini vodljive kugle, a ako se potom električni naboj q udalji u beskonačnost, onda se električni naboj q_1 jednoliko raspoređi po površini vodljive kugle. Tada je skalarni električni potencijal vodljive kugle:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R} = - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot D} = -898,7551788 \text{ V} \quad (14.417)$$

Iz izraza (14.417) slijedi da skalarni električni potencijal kugle, nakon prekida uzemljenja i udaljavanja naboja q u beskonačnost, ne ovisi o polumjeru kugle R .

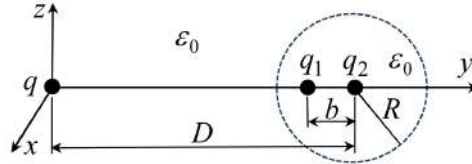
Zadatak 14.8. Točkasti električni naboj q nalazi se u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava na udaljenosti D od središta naelektrizirane vodljive kugle polumjera R . Neka je skalarni električni potencijal naelektrizirane vodljive kugle φ_{kugle} . Odredite iznos skalarnog električnog potencijala i jakosti električnog polja u točki $T(x, y, z)$.



Slika 14.78. Električni naboj i naelektrizirana vodljiva kugla

Rješenje:

Zadatak se može riješiti metodom odslikavanja električnog naboja. Stvarni električni naboj q , odslikani električni naboj q_1 i nadomjesni električni naboj q_2 (Slika 14.79), koji se nalaze na koordinatnoj osi y , osiguravaju zadovoljenje graničnih uvjeta.



Slika 14.79. Stvarni, odslikani i nadomjesni električni naboj u neograničenom LIH dielektriku (zraku)

Električni naboji q i q_1 osiguravaju konstantan skalarni električni potencijal ($\varphi = 0$) na površini vodljive kugle, gdje je:

$$q_1 = -q \cdot \frac{R}{D} \quad (14.418)$$

Da bi kugla bila na potencijalu φ_{kugle} , treba postaviti nadomjesni električni naboj q_2 u središte vodljive kugle, pa je:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} \Rightarrow q_2 = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R \cdot \varphi_{\text{kugle}} \quad (14.419)$$

Slijedi da je raspodjela električnog potencijala u zraku opisana sljedećim izrazom:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r} + \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) \quad (14.420)$$

gdje je:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad r_1 = \sqrt{x^2 + (y - D + b)^2 + z^2} \quad (14.421)$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y - D)^2 + z^2} \quad (14.422)$$

Vektor jakost električnog polja opisan je izrazom:

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{q_1 \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{q_2 \cdot \vec{r}_2}{r_2^3} \right) = \{E_x, E_y, E_z\} \quad (14.423)$$

gdje je:

$$\vec{r} = \{x, y, z\} \quad ; \quad \vec{r}_1 = \{x, y - D + b, z\} \quad ; \quad \vec{r}_2 = \{x, y - D, z\} \quad (14.424)$$

dok je iznos jakosti električnog polja opisan izrazom:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \quad (14.425)$$

Zadatak 14.9. Točkasti električni naboj $q = 0,5$ nC nalazi se na udaljenosti $D = 2$ m od središta uzemljene vodljive kugle polumjera $R = 0,2$ m (Slika 14.77). Odredite funkciju plošne gustoće električnog naboja po površini kugle.

Rješenje:

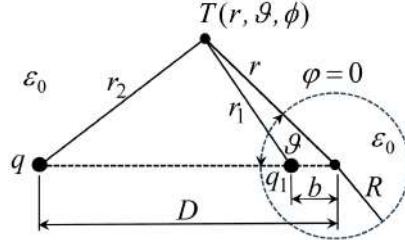
Da bi sfera bila na nultom skalarnom električnom potencijalu, na površini uzemljene vodljive kugle nalazi se ukupni naboj:

$$q_1 = -q \cdot \frac{R}{D} \quad (14.426)$$

koji se može nadomjestiti odslikanim točkastim nabojem q_1 koji je udaljen za:

$$b = \frac{R^2}{D} \quad (14.427)$$

od središta kugle (Slika 14.80).



Slika 14.80. Stvarni i odslikani električni naboj u neograničenom LIH dielektriku (zraku)

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku, što uključuje i površinu kugle, opisana je sljedećim izrazom:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_2} + \frac{q_1}{r_1} \right) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{R}{D \cdot r_1} \right) \quad (14.428)$$

gdje su r_1 i r_2 , prema Slici 14.80, opisani izrazima:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2 \cdot r \cdot b \cdot \cos \vartheta} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{r^2 + D^2 - 2 \cdot r \cdot D \cdot \cos \vartheta} \quad (14.429)$$

gdje su r i ϑ koordinate točke promatranja T u sfernom koordinatnom sustavu, čije se središte poklapa sa središtem kugle.

Osnosimetrična plošna gustoća električnog naboja po površini kugle opisana je sljedećim izrazom:

$$\sigma = -\epsilon_0 \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{q}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial r} - \frac{R}{D \cdot r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (14.430)$$

gdje je:

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = \frac{r - b \cdot \cos \vartheta}{r_1} = \frac{D \cdot r - R^2 \cdot \cos \vartheta}{r_1 \cdot D} \quad (14.431)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial r} = \frac{R - D \cdot \cos \vartheta}{r_2} \quad (14.432)$$

pa je:

$$\sigma = \frac{q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{R - D \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{(R^2 + D^2 - 2 \cdot R \cdot D \cdot \cos \vartheta)^3}} - \frac{q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{R \cdot (R \cdot D - R^2 \cdot \cos \vartheta)}{D^2 \cdot \sqrt{\left(R^2 + \frac{R^4}{D^2} - \frac{2 \cdot R^3}{D} \cdot \cos \vartheta \right)^3}} \quad (14.433)$$

Vrijedi da je:

$$R^2 + \frac{R^4}{D^2} - \frac{2 \cdot R^3}{D} \cdot \cos \vartheta = \frac{R^2}{D^2} \cdot (R^2 + D^2 - 2 \cdot R \cdot D \cdot \cos \vartheta) \quad (14.434)$$

pa izraz (14.433) poprima novi oblik:

$$\sigma = \frac{q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{R - D \cdot \cos \vartheta - \frac{D^2}{R} + D \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{(R^2 + D^2 - 2 \cdot R \cdot D \cdot \cos \vartheta)^3}} \quad (14.435)$$

odakle slijedi da je:

$$\sigma = \sigma(\vartheta) = -\frac{q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(R^2 + D^2 - 2 \cdot R \cdot D \cdot \cos \vartheta)^3}} \cdot \frac{D^2 - R^2}{R} \quad (14.436)$$

Ako se uvede nova oznaka ℓ za udaljenost između naboja q i točke na površini kugle (Slika 14.81), koja je opisana izrazom:

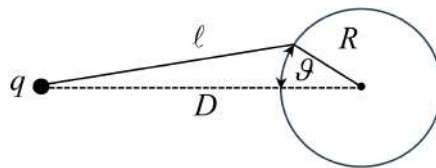
$$\ell = r_2|_{r=R} = \sqrt{R^2 + D^2 - 2 \cdot R \cdot D \cdot \cos \vartheta} \quad (14.437)$$

onda izraz (14.436) poprima novi oblik:

$$\sigma = \sigma(\ell) = -\frac{q}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\ell^3} \cdot \frac{D^2 - R^2}{R} \quad (14.438)$$

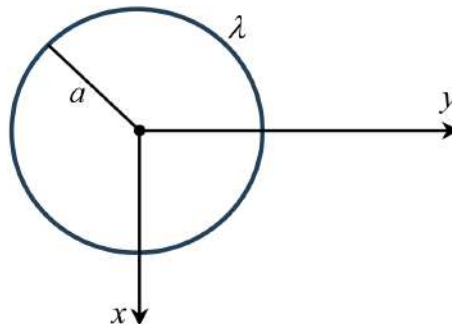
Nakon uvrštenja zadanih podataka, dobije se da je za ℓ u metrima:

$$\sigma = \sigma(\ell) = -\frac{78,78169683}{\ell^3} \frac{\text{nC}}{\text{m}^2} \quad (14.439)$$



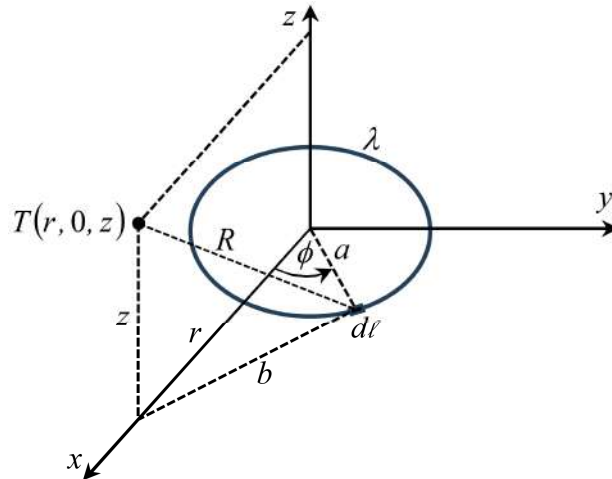
Slika 14.81. Uvođenje novog parametra ℓ

Zadatak 14.10. Neka je kružna tankožičana petlja, polumjera a , naelektrizirana električnim nabojem konstantne linijske gustoće λ . Odredite izraz za prostornu raspodjelu skalarnog električnog potencijala u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) . Neka se tankožičana petlja nalazi u ravnini $z = 0$. Neka je okolno sredstvo zrak.



Slika 14.82. 2D prikaz naelektrizirane kružne tankožičane petlje

Rješenje:



Slika 14.83. 3D prikaz naelektrizirane tankožičane petlje

Raspodjela skalarnog električnog potencijala ne ovisi o kutu ϕ jer je ona osnosimetrična s obzirom na koordinatnu os z . Stoga je dovoljno naći izraz za raspodjelu skalarnog električnog potencijala za kut $\phi = 0$ (Slika 14.83).

Infinitesimalna količina naboja $\lambda \cdot d\ell$ stvara infinitesimalni prirast skalarnog električnog potencijala u promatranoj točki $T(r, 0, z)$:

$$d\varphi = \frac{\lambda \cdot d\ell}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} = \frac{\lambda \cdot a \cdot d\phi}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} \quad (14.440)$$

Prema Slici 14.83, vrijedi da je:

$$R^2 = b^2 + z^2 = r^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \cos\phi + z^2 \quad (14.441)$$

pa je:

$$\varphi = \frac{\lambda \cdot a}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 + a^2 + z^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \cos\phi}} \quad (14.442)$$

Integral sadržan u izrazu (14.442) nema analitičkog rješenja, a može se svesti na izračun tzv. eliptičkih integrala oblika:

$$F(\phi_0, k) = \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\phi}} \quad (14.443)$$

$$E(\phi_0, k) = \int_0^{\phi_0} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\phi} \cdot d\phi \quad (14.444)$$

gdje izraz (14.443) opisuje eliptički integral prve vrste, dok izraz (14.444) opisuje eliptički integral druge vrste.

Ako su granice eliptičkih integrala od 0 do $\pi/2$, onda se takvi eliptički integrali nazivaju potpunim eliptičkim integralima:

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\phi}} \quad (14.445)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi} \cdot d\phi \quad (14.446)$$

gdje izraz (14.445) opisuje potpuni eliptički integral prve vrste, dok izraz (14.446) opisuje potpuni eliptički integral druge vrste.

Radi svođenja izračuna integrala navedenog u izrazu (14.442) na izračun potpunog eliptičkog integrala prve vrste, uvodi se sljedeća supstitucija:

$$\phi = \pi - 2 \cdot \beta \quad ; \quad d\phi = -2 \cdot d\beta \quad (14.447)$$

Ako se supstitucija (14.447) uvrsti u izraz (14.442), dobije se sljedeći izraz:

$$\varphi = -\frac{\lambda \cdot a}{\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{\pi/2}^0 \frac{d\beta}{\sqrt{r^2 + a^2 + z^2 - 2 \cdot a \cdot r \cdot \cos(\pi - 2 \cdot \beta)}} \quad (14.448)$$

Vrijedi da je:

$$\cos(\pi - 2 \cdot \beta) = -\cos(2 \cdot \beta) = -1 + 2 \cdot \sin^2 \beta \quad (14.449)$$

pa izraz (14.448) poprima sljedeći oblik:

$$\varphi = \frac{\lambda \cdot a}{\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{4 \cdot a \cdot r}{(a+r)^2 + z^2} \cdot \sin^2 \beta}} \quad (14.450)$$

Uz supstituciju:

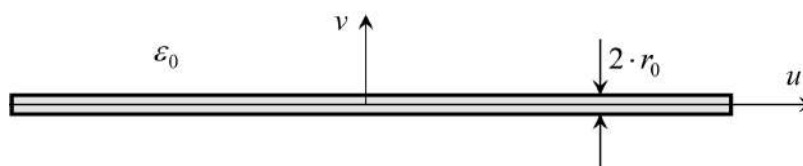
$$k^2 = \frac{4 \cdot a \cdot r}{(a+r)^2 + z^2} \quad (14.451)$$

izraz (14.450) poprima sljedeći oblik:

$$\varphi = \frac{\lambda \cdot a}{\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{k}{\sqrt{4 \cdot a \cdot r}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \beta}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \sqrt{\frac{a}{r}} \cdot k \cdot F(k) \quad (14.452)$$

Vrijednosti potpunog eliptičkog integrala prve vrste $F(k)$ mogu se pronaći u matematičkim tablicama za k pridružen promatranoj točki T , a može se i numerički riješiti potpuni eliptički integral (14.445). Umjesto toga, može se za promatranu točku T numerički riješiti i integral (14.442).

Zadatak 14.11. Neka je tankožičani osamljeni cilindrični vodič polumjera r_0 , duljine ℓ , naelektriziran električnim nabojem Q . Uz pretpostavku da je električni naboj jednoliko raspoređen po plaštu vodiča, uz korištenje tankožičane aproksimacije, odredite izraze za skalarni električni potencijal i električni kapacitet vodiča: a) po metodi kolokacije u točki (MKT), gdje se kolokacijska točka nalazi u središnjoj točki plašta vodiča, b) po metodi srednjeg potencijala (MSP). Neka se vodič nalazi u zraku.



Slika 14.84. Tankožičani cilindrični vodič u lokalnom koordinatnom sustavu (u , v)

Rješenje:

Prema izrazu (14.296), raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana je sljedećim izrazom:

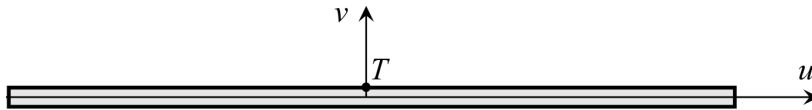
$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{v^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (14.453)$$

dok je, prema izrazu (14.297), raspodjela potencijala duž samog vodiča opisana izrazom:

$$\varphi = \varphi(u, r_0) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (14.454)$$

a) Rješenje po metodi kolokacije u točki

U zadatku je zadano da se kolokacijska točka nalazi na sredini plašta tankožičanog vodiča (Slika 14.85), tj. da je kolokacijska točka $T(0, r_0)$.



Slika 14.85. Izabrana kolokacijska točka T

Po metodi kolokacije u točki, skalarni električni potencijal vodiča aproksimira se potencijalom točke:

$$\Phi = \Phi_{\text{MKT}} = \varphi(0, r_0) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} - \frac{\ell}{2}} \quad (14.455)$$

Iz numeričkih razloga, dobro je izraz (14.455) preinačiti tako da se racionalizira nazivnik. Nakon racionalizacije nazivnika, slijedi da je:

$$\Phi_{\text{MKT}} = \varphi(0, r_0) = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} + \frac{\ell}{2}}{r_0} \quad (14.456)$$

Električni kapacitet vodiča po metodi kolokacije u točki opisan je sljedećim izrazom:

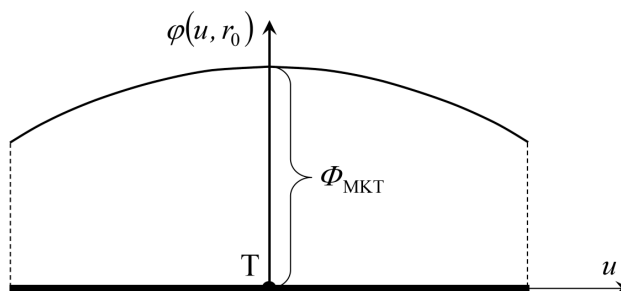
$$C_{\text{MKT}} = \frac{Q}{\Phi_{\text{MKT}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell}{\ln \frac{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} + \frac{\ell}{2}}{r_0}} \quad (14.457)$$

Budući da je $r_0 \ll \ell$, može se uvesti dodatna aproksimacija pa je:

$$\Phi_{\text{MKT}} \approx \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\ell}{r_0} \quad (14.458)$$

$$C_{\text{MKT}} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell}{\ln \frac{\ell}{r_0}} \quad (14.459)$$

Fizikalno konstantni skalarni električni potencijal vodiča aproksimira se skalarnim električnim potencijalom kolokacijske točke (Slika 14.86). Rješenje bitno ovisi o izboru kolokacijske točke. Dakle, numerički gledano, metoda kolokacije u točki je relativno loša metoda.



Slika 14.86. Aproksimacija skalarnog električnog potencijala vodiča po MKT

b) Rješenje po metodi srednjeg potencijala

Prema izrazima (14.299) i (14.300), skalarni električni potencijal vodiča aproksimiran po metodi srednjeg potencijala opisan je izrazom:

$$\Phi = \Phi_{\text{sr}} = \Phi_{\text{MSP}} = G(\ell, r_0) \cdot Q \quad (14.460)$$

gdje je:

$$G(\ell, r_0) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + r_0^2} + \ell}{r_0} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + r_0^2} + r_0} \right] \quad (14.461)$$

Električni kapacitet vodiča po metodi srednjeg potencijala opisan je sljedećim izrazom:

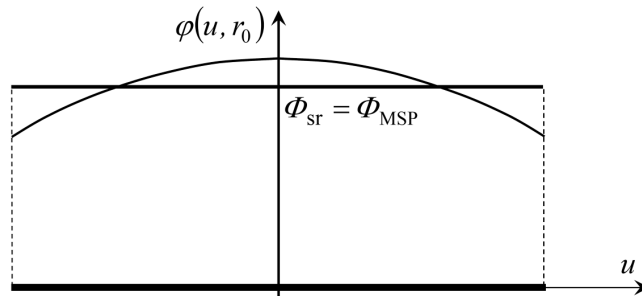
$$C_{\text{MSP}} = \frac{Q}{\Phi_{\text{MSP}}} = \frac{1}{G(\ell, r_0)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell^2}{\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + r_0^2} + \ell}{r_0} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + r_0^2} + r_0}} \quad (14.462)$$

Budući da je $r_0 \ll \ell$, može se uvesti dodatna aproksimacija pa je:

$$\Phi_{\text{MSP}} \approx \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell} \cdot \left[\ln \frac{2 \cdot \ell}{r_0} - 1 \right] \quad (14.463)$$

$$C_{\text{MSP}} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \ell}{\ln \frac{2 \cdot \ell}{r_0} - 1} \quad (14.464)$$

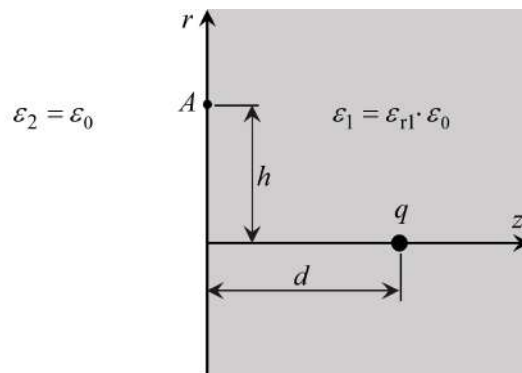
Po metodi srednjeg potencijala, fizikalno konstantni skalarni električni potencijal vodiča aproksimira se srednjom vrijednošću skalarnog električnog potencijal duž vodiča (Slika 14.87). Numerički gledano, ova metoda je puno točnija od metode kolokacije u točki.



Slika 14.87. Aproximacija skalarnog električnog potencijala vodiča po MSP

Vodič je u stvarnosti ekvipotencijalan, a linijska se gustoća naboja mijenja duž osi vodiča. Numeričkim postupkom se dolazi do zadovoljavajućeg približnog rješenja tako da se vodič podijeli na više tankožičanih odsječaka s konstantnim λ po pojedinom odsječku. Nepoznanice su Q_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ te skalarni električni potencijal vodiča Φ , koje su rješenje sustava linearnih jednadžbi. Pritom je suma svih Q_i jednaka ukupnom električnom naboju Q .

Zadatak 14.12. Točkasti naboj q nalazi se u LIH poluprostoru relativne dielektričnosti $\epsilon_{r1} = 3$ (LIH sredstvo 1) udaljen za $d = 0,5$ m od granične ravnine između savršenog LIH dielektrika i zraka (LIH sredstvo 2). Izračunajte kutove koje silnica u točki A ($h = 0,4$ m) zatvara s normalom na graničnu ravninu.

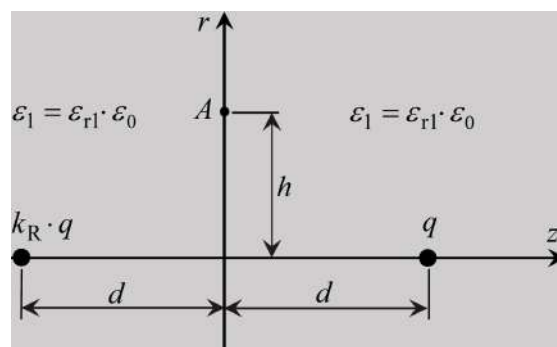


Slika 14.88. Točkasti naboj u poluprostoru ispunjenom savršenim LIH dielektrikom

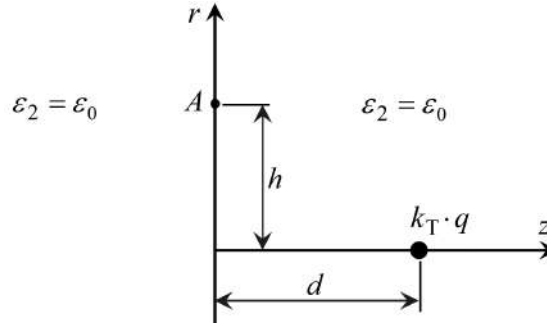
Rješenje:

Zadatak je najlakše riješiti korištenjem metode odslikavanja. Budući da je raspodjela jakosti električnog polja osnosimetrična, koristit će se cilindrični koordinatni sustav (Slika 14.88).

Vektor jakosti električnog polja u točki A u sredstvu 1 računa se prema Slici 14.89, dok se vektor jakosti električnog polja u točki A u sredstvu 2 računa prema Slici 14.90.



Slika 14.89. Izračun jakosti električnog polja u sredstvu 1



Slika 14.90. Izračun jakosti električnog polja u sredstvu 2

Prema Slici 14.89, lako je zaključiti da je vektor jakosti električnog polja u točki A u sredstvu 1 opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{E}_1 = E_{r1} \cdot \vec{e}_r + E_{z1} \cdot \vec{e}_z = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_1} \cdot \left[\frac{h \cdot (1 + k_R) \cdot \vec{e}_r - d \cdot (1 - k_R) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(d^2 + h^2)^3}} \right] \quad (14.465)$$

dok je, prema Slici 14.90, vektor jakosti električnog polja u točki A u sredstvu 2 opisan izrazom:

$$\vec{E}_2 = E_{r2} \cdot \vec{e}_r + E_{z2} \cdot \vec{e}_z = \frac{q \cdot k_T}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_2} \cdot \left[\frac{h \cdot \vec{e}_r - d \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(d^2 + h^2)^3}} \right] \quad (14.466)$$

jer je u neograničenom savršenom LIH dielektriku, dielektričnosti ϵ , vektor jakosti električnog polja u točki udaljenoj za r od osamljenog točkastog električnog naboja q opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (14.467)$$

Dakle, izrazi (14.465) i (14.466) dobiveni su na temelju Slika 14.89 i 14.90 te ne temelju izraza (14.467), a kod tvorbe izraza (14.165) korištena je i metoda superpozicije.

Prema izrazu (14.129), faktor refleksije je:

$$k_R = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2} \quad (14.468)$$

dok je, prema izrazu (14.130), faktor transmisije:

$$k_T = \frac{2 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{2}{1 + 3} = \frac{1}{2} \quad (14.469)$$

pa, nakon uvrštenja ovih faktora u izraze (14.465) i (14.466), ti izrazi glase:

$$\vec{E}_1 = E_{r1} \cdot \vec{e}_r + E_{z1} \cdot \vec{e}_z = \frac{q}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_1} \cdot \left[\frac{3 \cdot h \cdot \vec{e}_r - d \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(d^2 + h^2)^3}} \right] \quad (14.470)$$

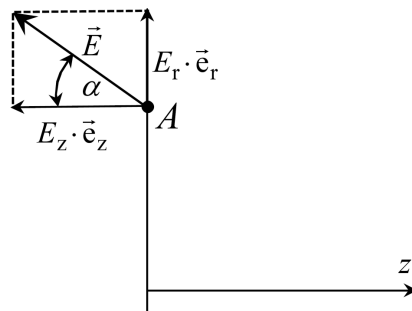
$$\vec{E}_2 = E_{r2} \cdot \vec{e}_r + E_{z2} \cdot \vec{e}_z = \frac{q}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_2} \cdot \left[\frac{h \cdot \vec{e}_r - d \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(d^2 + h^2)^3}} \right] \quad (14.471)$$

Prema Slici 14.91, vektor jakosti električnog polja u točki A , u pojedinom sredstvu, ima dvije komponente, a silnica (vektor jakosti električnog polja) u odnosu na normalu granične ravnine zatvara kut α koji je opisan izrazom:

$$\text{tg } \alpha = \left| E_r / E_z \right| \quad (14.472)$$

pa je:

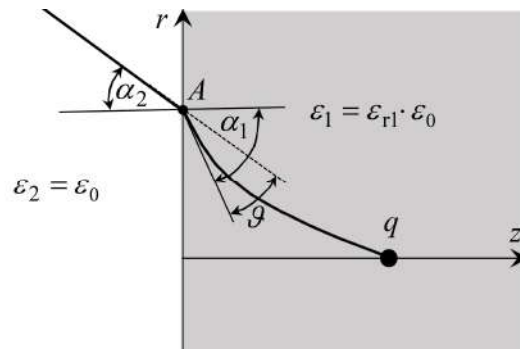
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = |E_{r1} / E_{z1}| = \frac{3 \cdot h}{d} = 2,4 \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = |E_{r2} / E_{z2}| = \frac{h}{d} = 0,8 \quad (14.473)$$



Slika 14.91. Komponente vektora jakosti električnog polja u točki A

Iz izraza (14.473) slijedi da je:

$$\alpha_1 = 67,380135^\circ \quad ; \quad \alpha_2 = 38,659808^\circ \quad (14.474)$$

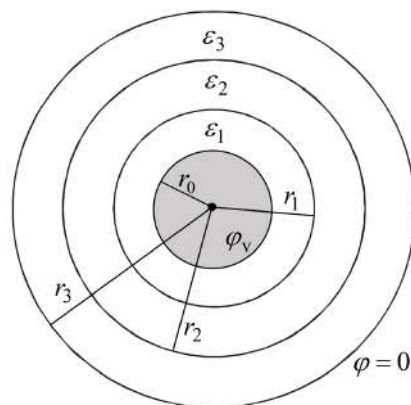


Slika 14.92. Kut pod kojim se lomi silnica u točki A

Silnica koja prolazi kroz točku A želi ostati u sredstvu veće dielektričnosti, a to je sredstvo 1, pa ima oblik prema Slici 14.92. Iz Slike 14.92 i izraza (14.474) slijedi da se silnica u točki A lomi pod kutom:

$$g = \alpha_1 - \alpha_2 = 28,7203278^\circ \quad (14.475)$$

Zadatak 14.13. Izolator jednožilnog visokonaponskog 10 kV kabela sastoji se od tri šuplja cilindra relativnih dielektričnosti $\epsilon_{r1} = 4$, $\epsilon_{r2} = 3$, $\epsilon_{r3} = 2$, a njihovi vanjski polumjeri su $r_1 = 0,02$ m, $r_2 = 0,03$ m, $r_3 = 0,04$ m, dok je polumjer vodiča $r_0 = 0,01$ m. Odredite raspodjelu jakosti električnog polja duž osi r cilindričnog koordinatnog sustava. Neka je kabel ukopan u tlo te neka je vodič na skalarnom električnom potencijalu $\varphi_v = 10$ kV.



Slika 14.93. Vodič i njegov troslojni izolator

Rješenje:

Troslojni izolator je, ustvari, dielektrik troslojnog cilindričnog kondenzatora. Uz zanemarenje rubnih efekata, odnosno uz pretpostavku da je cilindrični kondenzator beskonačno dug, u i -tom je sloju višeslojnog dielektrika raspodjela jakosti električnog polja opisana sljedećim izrazom:

$$E_i = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_i \cdot r} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{ri} \cdot r} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (14.476)$$

gdje je λ linijska gustoća električnog naboja koji se nalazi na površini vodiča.

Nadalje, vrijedi da je napon vodiča u odnosu na okolno tlo:

$$U = \sum_{i=1}^3 \int_{r_{i-1}}^{r_i} E_i \cdot dr = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\varepsilon_{ri}} \cdot \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dr}{r} \quad ; \quad U = \varphi_v \quad (14.477)$$

odakle se nakon provedene integracije dobije sljedeći izraz za napon vodiča:

$$U = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} \right) = \frac{\lambda}{C} = \frac{\lambda \cdot K}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \quad (14.478)$$

gdje je:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{K} \quad (14.479)$$

jedinični kapacitet jednožilnog kabela, dok je pomoćni parametar K :

$$K = \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} \quad (14.480)$$

Iz izraza (14.478) slijedi da se linijska gustoća naboja može opisati izrazom:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot U}{K} \quad (14.481)$$

pa iz izraza (14.476) slijedi da je raspodjela jakosti električnog polja u i -tom sloju višeslojnog izolatora (dielektrika) opisana izrazom:

$$E_i = \frac{U}{\varepsilon_{ri} \cdot r \cdot K} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (14.482)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je pomoćni parametar:

$$K = \frac{1}{4} \cdot \ln \frac{2}{1} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{4}{3} = 0,45228287 \quad (14.483)$$

dok je:

$$E_i = \frac{2,2210057 \cdot 10^4}{\varepsilon_{ri} \cdot r} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (14.484)$$

Jakost električnog polja u rubnim točkama izolatora je:

$$E|_{r=r_0} = E_1|_{r=r_0} = 5,5275143 \cdot 10^5 \text{ V/m} \quad (14.485)$$

$$E|_{r=r_3} = E_3|_{r=r_3} = 2,7637571 \cdot 10^5 \text{ V/m} \quad (14.486)$$

Ako bi cjelokupni savršeni dielektrik bio homogen, odnosno ako bi svi slojevi imali istu dielektričnost, onda bi vrijedio sljedeći izraz:

$$E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{r_3}{r_0}} \quad (14.487)$$

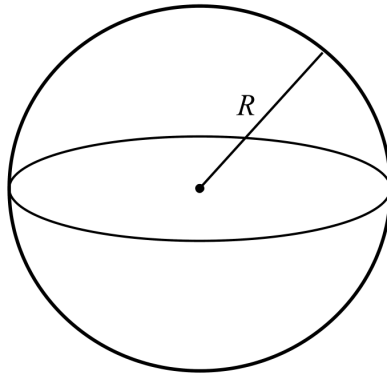
pa bi u tom slučaju jakost električnog polja u rubnim točkama LIH izolatora (savršenog dielektrika) bila:

$$E|_{r=r_0} = 7,2134752 \cdot 10^5 \text{ V/m} \quad (14.488)$$

$$E|_{r=r_3} = 1,8033688 \cdot 10^5 \text{ V/m} \quad (14.489)$$

što znači da u ovom slučaju jakost električnog polja na samom vodiču ima veću vrijednost, odnosno da je veća vjerojatnost da će doći do proboja izolatora.

Zadatak 14.14. Pomoću napreznja izračunajte silu kojom se odbijaju dvije polovice osamljene vodljive kugle polumjera $R = 0,1$ m, naelektrizirane električnim nabojem $Q = 1 \mu\text{C}$. Neka se kugla nalazi u zraku. Zadatak riješite integracijom po razdjelnoj ravnini između dvije polovice kugle.



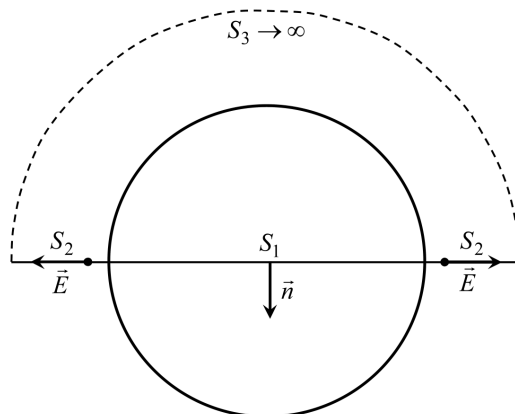
Slika 14.94. Proizvoljno odabrane dvije polovice vodljive kugle

Rješenje:

Električni naboj Q je jednoliko raspoređen po površini kugle; jakost električnog polja je unutar kugle jednaka nuli, dok je jakost električnog polja izvan kugle opisana izrazom:

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (14.490)$$

gdje je r udaljenost točke promatranja od središta kugle.



Slika 14.95. Integracijska ploha S zatvorena kroz beskonačnost oko polovice vodljive kugle

Integracijska ploha $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ oko polovice kugle može se zatvoriti tako da se ta ploha poklapa s graničnom plohom razmatrane polovice kugle. Međutim, za izračun sile jednostavnije je oko polovice kugle zatvoriti plohu tako da se kugla raspolovi ravninom, dok se ostatak plohe S zatvara kroz beskonačnost (Slika 14.95), a u beskonačnosti električno polje iščezava.

Na plohama S_1 i S_3 jakost električnog polja jednaka je nuli pa je na tim plohama i vektor električnog napreznja jednak nuli.

Slijedi da je sila na "gornju" polovicu kugle opisana izrazom:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_e \cdot dS = \int_{S_2} \vec{t}_e \cdot dS = \vec{n} \cdot \int_{S_2} \vec{t}_e \cdot dS \quad (14.491)$$

gdje je \vec{n} jedinični vektor normale plohe S_2 (Slika 14.95).

Prema izrazu (14.115), vektor električnog napreznja na plohi S_2 opisan je izrazom:

$$\vec{t}_e = \epsilon_0 \cdot \left[\vec{E} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{n}) - \frac{E^2}{2} \cdot \vec{n} \right] = -\frac{\epsilon_0}{2} \cdot E^2 \cdot \vec{n} = -\frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot r^4} \cdot \vec{n} \quad (14.492)$$

pa je sila na "gornju" polovicu kugle:

$$\vec{F} = (-\vec{n}) \cdot \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{r^4} = \vec{n} \cdot \frac{Q^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot r^2} \Big|_R^\infty \quad (14.493)$$

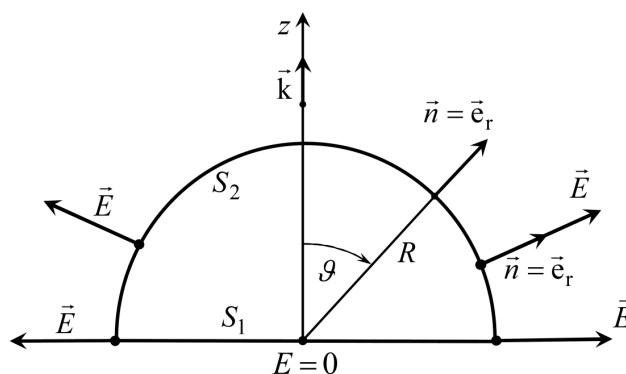
odakle se dobije da je:

$$\vec{F} = (-\vec{n}) \cdot \frac{Q^2}{32 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} = (-\vec{n}) \cdot 0,1123444 \text{ N} \quad (14.494)$$

Zadatak 14.15. Pomoću napreznja izračunajte silu kojom se odbijaju dvije polovice osamljene vodljive kugle polumjera $R = 0,1$ m, naelektrizirane električnim nabojem $Q = 1 \mu\text{C}$. Neka se kugla nalazi u zraku. Zadatak riješite integracijom po polovici kugline plohe (sfere). Proizvoljno odabrane dvije polovice vodljive kugle prikazane su na Slici 14.94.

Rješenje:

U ovom je zadatku, za razliku od integracijske plohe u prethodnom zadatku, integracijska ploha $S = S_1 \cup S_2$ vanjska ploha razmatrane polovice kugle na koju djeluje odbojna sila (Slika 14.96).



Slika 14.96. Integracijska ploha oko polovice vodljive kugle

Na plohi S_1 jakost električnog polja jednaka je nuli pa je na toj plohi i vektor električnog napreznja jednak nuli.

Slijedi da je sila na "gornju" polovicu kugle opisana izrazom:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_e \cdot dS = \int_{S_2} \vec{t}_e \cdot dS = \int_{S_2} t_e \cdot \vec{e}_r \cdot dS \quad (14.495)$$

gdje je \vec{e}_r jedinični vektor normale plohe S_2 (Slika 14.96).

Električni naboj Q je jednoliko raspoređen po površini kugle. Jakost električnog na površini kugle (u zraku) opisana je izrazom:

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \quad (14.496)$$

gdje je R polumjer kugle.

Prema izrazu (14.115), u ovom slučaju za $r = R$, odnosno na plohi S_2 , vektor električnog napreznja ima konstantan iznos i opisan je izrazom:

$$\vec{t}_e = \epsilon_0 \cdot \left[\vec{E} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{n}) - \frac{E^2}{2} \cdot \vec{n} \right] = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot E^2 \cdot \vec{n} = \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R^4} \cdot \vec{e}_r \quad (14.497)$$

dok je vektor električnog napreznja na plohi S_1 jednak nuli.

Sila na "gornju" polovicu kugle djeluje u smjeru osi z , odnosno u smjeru jediničnog vektora \vec{k} . To znači da je dovoljno integrirati samo z -komponentu vektora električnog napreznja:

$$\vec{F} = \vec{k} \cdot \int_{S_2} t_{ez} \cdot dS = \vec{k} \cdot t_e \cdot \int_{S_2} \cos \vartheta \cdot dS \quad (14.498)$$

Slijedi da je:

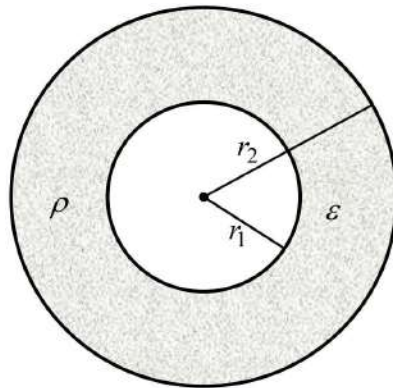
$$\vec{F} = \vec{k} \cdot \frac{Q^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot R^4} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot R^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \quad (14.499)$$

pa je:

$$\vec{F} = \vec{k} \cdot \frac{Q^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \vec{k} \cdot \frac{Q^2}{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \quad (14.500)$$

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{32 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} \cdot \vec{k} = 0,1123444 \cdot \vec{k} \text{ N} \quad (14.501)$$

Zadatak 14.16. Prostor između dviju koncentričnih sfera ispunjen je dielektrikom ($\epsilon_r = 3$) unutar kojeg se nalazi pozitivni električni naboj. Prostorna je gustoća električnog naboja sferno simetrična i opisana izrazom $\rho = 10^{-5} \cdot r^2 \text{ C/m}^3$. Neka u preostalom prostoru (zraku) nema električnog naboja. Pomoću napreznja odredite silu kojom se odbijaju dvije polovice dielektrika. Neka je $r_1 = 0,05 \text{ m}$, $r_2 = 0,1 \text{ m}$.



Slika 14.97. Električni naboj između dviju koncentričnih sfera

Rješenje:

Ovaj je zadatak vrlo sličan prethodnom zadatku pa on stoga nije detaljno riješen.

Za $r_1 \leq r \leq r_2$ vrijedi da je:

$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \int_{r_1}^r \rho \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot dr \quad (14.502)$$

odakle se nakon integracije dobije da je:

$$E_1 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \left(r^3 - \frac{r_1^5}{r^2} \right) \quad (14.503)$$

pa je na ravnini koja raspolavlja dvije polovice dielektrika (slično kao na Slici 14.95):

$$\vec{t}_{e1} = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E_1^2 \cdot \vec{n} = t_{e1} \cdot \vec{n} \quad (14.504)$$

$$\vec{F}_1 = \vec{n} \cdot \int_{S_1} t_{e1} \cdot dS = \vec{n} \cdot \int_{r_1}^{r_2} t_{e1} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (14.505)$$

a nakon integracije dobije se da je:

$$\vec{F}_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-12}}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \left(\frac{r_2^8 - r_1^8}{8} - \frac{2 \cdot r_1^5 \cdot (r_2^3 - r_1^3)}{3} + \frac{r_1^{10} \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2} \right) \cdot (-\vec{n}) \quad (14.506)$$

Za $r > r_2$ vrijedi da je:

$$\oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \cdot E_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \int_{r_1}^{r_2} \rho \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot dr \quad (14.507)$$

odakle se nakon integracije dobije da je:

$$E_2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2^5 - r_1^5}{r^2} \quad (14.508)$$

pa je na ravnini koja raspolavlja dvije polovice dielektrika (slično kao na Slici 14.95):

$$\vec{t}_{e2} = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_2^2 \cdot \vec{n} = t_{e2} \cdot \vec{n} \quad (14.509)$$

$$\vec{F}_2 = \vec{n} \cdot \int_{S_2} t_{e2} \cdot dS = \vec{n} \cdot \int_{r_2}^{\infty} t_{e2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \quad (14.510)$$

a nakon integracije dobije se da je:

$$\vec{F}_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-12}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{(r_2^5 - r_1^5)^2}{2 \cdot r_2^2} \cdot (-\vec{n}) \quad (14.511)$$

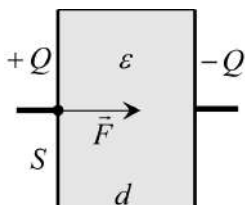
Sila kojom se odbijaju dvije polovice dielektrika je:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (14.512)$$

a konačni rezultat je:

$$\vec{F} = (-\vec{n}) \cdot 7,1696 \cdot 10^{-9} \text{ N} \quad (14.513)$$

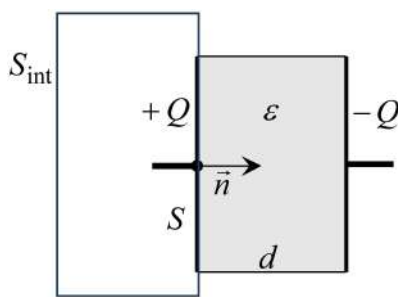
Zadatak 14.17. Pločasti električni kondenzator ima razmak između ploča $d = 0,05$ m, površinu pojedine ploče $S = 0,04$ m² i naelektriziran je nabojem iznosa $Q = 1,5$ μC. Dielektrik između ploča ima relativnu dielektričnost 90. Uz zanemarenje rubnih efekata, pomoću napreznja izračunajte silu koja djeluje na pozitivnu ploču električnog kondenzatora.



Slika 14.98. Sila na pozitivnu ploču pločastog električnog kondenzatora

Rješenje:

Oko pozitivne ploče pločastog električnog kondenzatora treba zatvoriti integracijsku plohu kao što je prikazano na Slici 14.99.



Slika 14.99. Integracijska ploha

Jakost električnog polja je različita od nule samo u dielektriku pločastog električnog kondenzatora i opisana je sljedećim izrazom:

$$\vec{E} = \frac{Q}{C \cdot d} \cdot \vec{n} = \frac{Q}{\epsilon \cdot S} \cdot \vec{n} \quad (14.514)$$

gdje je \vec{n} vektor jedinične normale pozitivne obloge kondenzatora (Slika 14.99), dok je S površina ploče električnog kondenzatora.

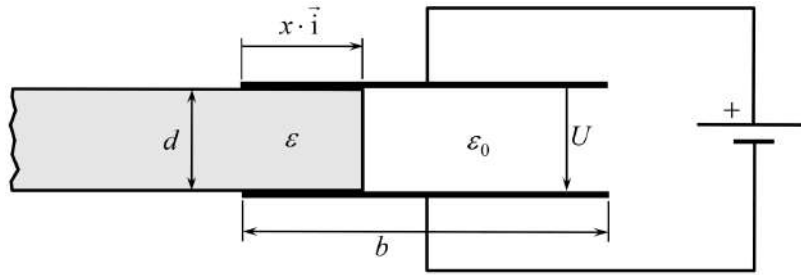
Prema izrazu (14.115), vektor električnog napreznja na pozitivnoj ploči električnog kondenzatora (u dielektriku) opisan je izrazom:

$$\vec{t}_e = \epsilon \cdot \left[\vec{E} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{n}) - \frac{E^2}{2} \cdot \vec{n} \right] = \frac{\epsilon}{2} \cdot E^2 \cdot \vec{n} = \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon \cdot S^2} \cdot \vec{n} \quad (14.515)$$

pa je sila na pozitivnu oblogu:

$$\vec{F} = \oint_{S_{\text{int}}} \vec{t}_e \cdot dS = t_e \cdot S \cdot \vec{n} = \frac{Q^2}{2 \cdot \epsilon \cdot S} \cdot \vec{n} = 0,035294033 \cdot \vec{n} \text{ N} \quad (14.516)$$

Zadatak 14.18. Komad dielektrika debljine d samo djelomice ulazi među pravokutne ploče pločastog električnog kondenzatora, priključenog na idealni naponski izvor koji napon električnog kondenzatora U drži konstantnim. Neka je površina ploče kondenzatora S . Odredite silu na komad dielektrika u ovisnosti o x i to na dva načina: a) iz elektrostatičke energije, b) pomoću napreznja (sila na granici dvaju dielektrika). Zanemarite rubne efekte. Neka je: $U = 12$ V, $S = 0,25$ m², $d = 0,02$ m, $b = 0,5$ m, $\epsilon_r = 20$.



Slika 14.100. Sila na komad dielektrika – neizolirani sustav

Rješenje:

a) Izračun sile iz elektrostatičke energije

U ovom konkretnom slučaju, sila u neizoliranom sustavu opisana je izrazom:

$$\vec{F} = \vec{i} \cdot \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{U=\text{konst.}} = \vec{i} \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \quad (14.517)$$

gdje je W_e energija pohranjena u elektrostatičkom polju.

Uz zanemarenje rubnih efekata, kapacitet kondenzatora je opisan sljedećim izrazom:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d} \cdot \frac{x}{b} + \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \cdot \frac{b-x}{b} \quad (14.518)$$

gdje je S površina pojedine ploče električnog kondenzatora.

Slijedi da je sila na komad dielektrika opisana sljedećim izrazom:

$$\vec{F} = \vec{i} \cdot \frac{U^2}{2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d \cdot b} \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \vec{i} = 3,0281322 \cdot 10^{-7} \cdot \vec{i} \text{ N} \quad (14.519)$$

Sila na komad dielektrika djeluje tako da ga želi što više uvući među ploče kondenzatora. Ako se dva različita dielektrika nalaze u električnom polju, onda dielektrik veće dielektričnosti nastoji potisnuti dielektrik manje dielektričnosti.

Iz izraza (14.519) slijedi da sila na komad dielektrika ne ovisi o x . To je posljedica uvedenih zanemarenja koja imaju za posljedicu da je, u neizoliranom sustavu, električno polje između obloga kondenzatora homogeno.

b) Izračun sile pomoću naprezanja – sila na granici dvaju dielektrika

Prema izrazu (14.118), tlak na granici ovih dvaju dielektrika opisan je izrazom:

$$t_n^e = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1)}{2} \cdot \left(\frac{D_n^2}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0^2} + E_t^2 \right) \quad (14.520)$$

gdje je:

$$D_n = 0 \quad ; \quad E_t = \frac{U}{d} \quad (14.521)$$

pa je:

$$t_n^e = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot U^2}{2 \cdot d^2} \quad (14.522)$$

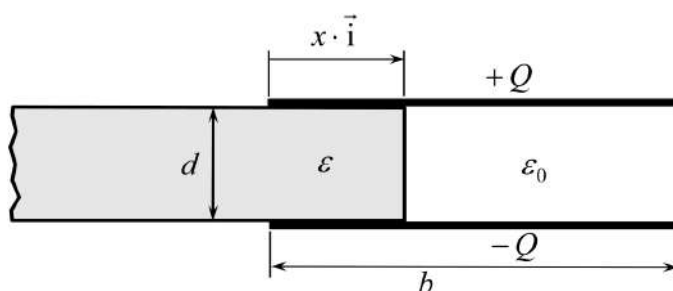
Sila na granici dvaju dielektrika jednaka je integralu tlaka po granici:

$$\vec{F} = \int_{S_{gr}} t_n^e \cdot \vec{n} \cdot dS = t_n^e \cdot \frac{S \cdot d}{b} \cdot \vec{i} \quad (14.523)$$

pa je:

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot U^2 \cdot S}{2 \cdot d \cdot b} \cdot \vec{i} = 3,0281322 \cdot 10^{-7} \cdot \vec{i} \text{ N} \quad (14.524)$$

Zadatak 14.19. Komad dielektrika debljine d samo djelomice ulazi među pravokutne ploče pločastog električnog kondenzatora, koji je prethodno nabijen električnim nabojem Q i potom odspojen od izvora. Neka je površina ploče kondenzatora S . Odredite silu na komad dielektrika u ovisnosti o x i to na dva načina: a) iz elektrostatičke energije, b) pomoću naprezanja (sila na granici dvaju dielektrika). Zanemarite rubne efekte. Neka je: $Q = 12 \mu\text{C}$, $S = 0,25 \text{ m}^2$, $d = 0,02 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$, $\epsilon_r = 20$.



Slika 14.101. Sila na komad dielektrika – izolirani sustav

Rješenje:

a) Izračun sile iz elektrostatičke energije

U ovom konkretnom slučaju, sila u izoliranom sustavu opisana je izrazom:

$$\vec{F} = -\vec{i} \cdot \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{Q=\text{konst.}} = -\vec{i} \cdot \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{\partial(1/C)}{\partial x} = \vec{i} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot C^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \quad (14.525)$$

gdje je W_e energija pohranjena u elektrostatičkom polju.

Uz zanemarenje rubnih efekata, kapacitet kondenzatora je opisan sljedećim izrazom:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d} \cdot \frac{x}{b} + \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \cdot \frac{b-x}{b} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d \cdot b} \cdot [(\epsilon_r - 1) \cdot x + b] \quad (14.526)$$

Slijedi da je sila na komad dielektrika opisana sljedećim izrazom:

$$\vec{F} = \vec{i} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot C^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{Q^2}{2 \cdot C^2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d \cdot b} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \vec{i} \quad (14.527)$$

pa se nakon uvrštenja izraza (14.526) u izraz (14.527) dobije da je:

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d \cdot b}{\epsilon_0 \cdot S} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{[(\epsilon_r - 1) \cdot x + b]^2} \cdot \vec{i} = \frac{6,1801264}{(19 \cdot x + 0,5)^2} \cdot \vec{i} \text{ N} \quad (14.528)$$

Sila na komad dielektrika djeluje tako da ga želi što više uvući među ploče kondenzatora. Ako se dva različita dielektrika nalaze u električnom polju, onda dielektrik veće dielektričnosti nastoji potisnuti dielektrik manje dielektričnosti.

Iz izraza (14.528) slijedi da sila na komad dielektrika opada s porastom parametra x jer se tada povećava kapacitet električnog kondenzatora, a onda u izoliranom sustavu pada električni napon kondenzatora. Ako pada napon električnog kondenzatora, onda pada i jakost električnog polja između ploča kondenzatora.

b) Izračun sile pomoću naprezanja – sila na granici dvaju dielektrika

Prema izrazu (14.118), tlak na granici ovih dvaju dielektrika opisan je izrazom:

$$t_n^e = \frac{\epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1)}{2} \cdot \left(\frac{D_n^2}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0^2} + E_t^2 \right) \quad (14.529)$$

gdje je:

$$D_n = 0 \quad ; \quad E_t = \frac{Q}{C \cdot d} \quad (14.530)$$

pa je:

$$t_n^e = \frac{\epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot Q^2}{2 \cdot d^2 \cdot C^2} \quad (14.531)$$

gdje je kapacitet kondenzatora opisan izrazom (14.526).

Sila na granici dvaju dielektrika jednaka je integralu tlaka po granici:

$$\vec{F} = \int_{S_{gr}} t_n^e \cdot \vec{n} \cdot dS = t_n^e \cdot \frac{S \cdot d}{b} \cdot \vec{i} \quad (14.532)$$

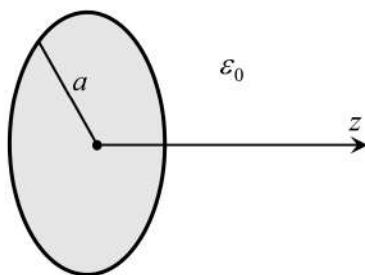
pa je:

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot Q^2 \cdot S}{2 \cdot d \cdot b \cdot C^2} \cdot \vec{i} \quad (14.533)$$

Nakon uvrštenja izraza (14.526) u izraz (14.533), dobije se da je:

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d \cdot b}{\epsilon_0 \cdot S} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{[(\epsilon_r - 1) \cdot x + b]^2} \cdot \vec{i} = \frac{6,1801264}{(19 \cdot x + 0,5)^2} \cdot \vec{i} \text{ N} \quad (14.534)$$

Zadatak 14.20. Tanka osamljena vodljiva kružna ploča nalazi se u zraku i naelektrizirana je ukupnim električnim nabojem $Q = 100 \text{ pC}$. Iz zahtjeva da je površina ploče ekvipotencijalna ploha slijedi da je ukupna plošna gustoća električnog naboja (s obje strane ploče) opisana izrazom $\sigma = k \cdot Q / \sqrt{a^2 - r^2}$, gdje je $a = 0,1 \text{ m}$ polumjer ploče, r udaljenost točke na ploči od središta ploče. Izračunajte: a) konstantu k , b) raspodjelu skalarnog električnog potencijala duž osi z okomite na ploču, c) skalarni električni potencijal ploče.



Slika 14.102. Osamljena vodljiva kružna ploča

Rješenje:

a) Izračun konstante k

Električni naboj na ploči može se izračunati integracijom ukupne plosne gustoće naboja σ po jednoj strani ploče:

$$\int_S \sigma \cdot dS = k \cdot Q \cdot \int_0^a \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = Q \quad ; \quad \sigma = k \cdot \frac{Q}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (14.535)$$

Budući da je:

$$\int_0^a \frac{r \cdot dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^a = a \quad (14.536)$$

slijedi da je:

$$k = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \quad ; \quad \sigma = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (14.537)$$

b) Raspodjela skalarnog električnog potencijala duž osi z

Vrijedi da je:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{R} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{\sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (14.538)$$

pa je:

$$\varphi(z) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a} \cdot \int_0^a \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2 + r^2} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (14.539)$$

Budući da je:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2 + r^2} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} &= \left(\begin{array}{l} a^2 - r^2 = t^2 \\ -r \cdot dr = t \cdot dt \end{array} \right) \\ &= \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{z^2 + a^2 - t^2}} = \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \Big|_0^a \\ &= \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \arctg \frac{a}{|z|} \end{aligned} \quad (14.540)$$

slijedi da je:

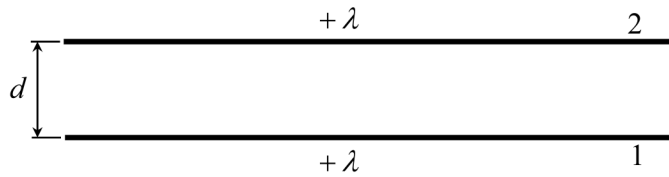
$$\varphi(z) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot a} \cdot \arctg \frac{a}{|z|} \quad (14.541)$$

c) Skalarni električni potencijal ploče

Skalarni električni potencijal ekvipotencijalne ploče može se dobiti iz izraza (14.541) za $z = 0$:

$$\Phi_{pl} = \varphi(0) = \frac{Q}{8 \cdot \varepsilon_0 \cdot a} = 14,1176133 \text{ V} \quad (14.542)$$

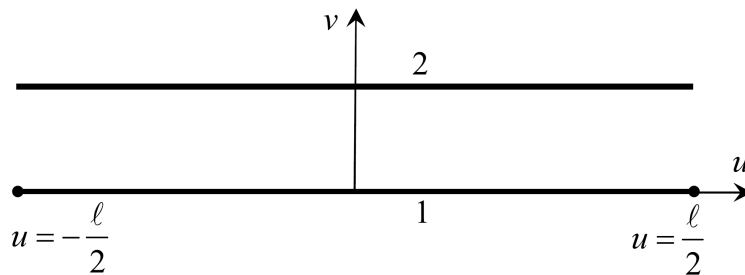
Zadatak 14.21. Dva međusobno paralelna i jednaka tankožičana vodiča duljine ℓ nalaze se u zraku. Neka su oba vodiča jednoliko naelektrizirana pozitivnim električnim nabojem linijske gustoće λ . Neka je razmak između vodiča d . Odredite izraz za silu kojom se vodiči međusobno odbijaju.



Slika 14.103. Dva osamljena naelektrizirana tankožičana vodiča

Rješenje:

Neka se računa sila kojom vodič 1 odbija vodič 2. Stoga se koristi lokalni koordinatni sustav (u, v) vodiča 1 (Slika 14.104).



Slika 14.104. Lokalni koordinatni sustav (u, v)

Prema izrazu (14.294), raspodjela skalarnog električnog potencijala uslijed njegovog električnog naboja u u lokalnom koordinatnom sustavu opisana je sljedećim izrazom, prikladnim za deriviranje:

$$\varphi = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\operatorname{Arsh} \frac{u + \frac{\ell}{2}}{v} - \operatorname{Arsh} \frac{u - \frac{\ell}{2}}{v} \right) \quad (14.543)$$

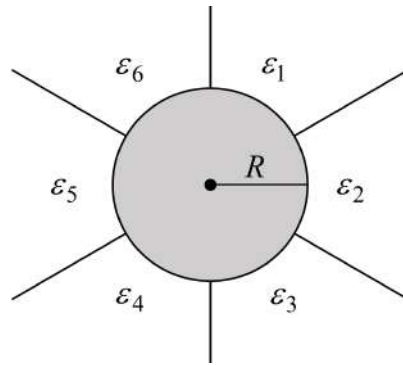
odakle slijedi da je v -komponenta jakosti električnog polja, uslijed električnog naboja vodiča 1, opisana sljedećim izrazom:

$$E_v = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\lambda}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot v} \cdot \left[\frac{u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2}} - \frac{u - \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2}} \right] \quad (14.544)$$

pa je sila na vodič 2:

$$\vec{F} = \vec{e}_v \cdot \int_{-\ell/2}^{\ell/2} E_v|_{v=d} \cdot \lambda \cdot du = \dots = \frac{\lambda^2}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d} \cdot \left(\sqrt{d^2 + \ell^2} - d \right) \cdot \vec{e}_v \quad (14.545)$$

Zadatak 14.22. Vodljiva kugla polumjera $R = 0,1$ m nalazi se sa po jednom svojom šestinom u sredstvu različite dielektričnosti. Odredite električni kapacitet kugle. Neka je: $\varepsilon_{r1} = 2, \varepsilon_{r2} = 4, \varepsilon_{r3} = 6, \varepsilon_{r4} = 3, \varepsilon_{r5} = 5, \varepsilon_{r6} = 10$.



Slika 14.105. Vodljiva kugla okružena heterogenim dielektrikom

Rješenje:

Na graničnim plohama između dvaju susjednih dielektrika postoji kontinuitet jakosti električnog polja, koje ima samo tangencijalnu komponentu. Slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala takva kao da se radi o jedinstvenom homogenom savršenom LIH dielektriku.

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u i -tom dielektriku opisana je sljedećim izrazom:

$$\varphi_i = \frac{6 \cdot Q_i}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_i \cdot r} \quad (14.546)$$

gdje je Q_i električni naboj pridružen i -tom dijelu kugle.

Iz izraza (14.546) slijedi da je skalarni električni potencijal kugle:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{6 \cdot Q_i}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_i \cdot R} = \frac{Q_i}{C_i} \quad (14.547)$$

gdje je C_i električni kapacitet i -tog dijela kugle i njemu pripadnog dielektrika, koji je opisan izrazom:

$$C_i = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_i \cdot R}{6} \quad (14.548)$$

Slijedi da je ukupni kapacitet kugle:

$$C = \sum_{i=1}^6 C_i = \frac{4 \cdot \pi \cdot R}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i \quad (14.549)$$

pa je:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon_{r1} + \dots + \varepsilon_{r6}}{6} \cdot R = 55,6325028 \text{ pF} \quad (14.550)$$

Iz izraza (14.549) slijedi da je dielektričnost nadomjesnog savršenog LIH dielektrika jednaka aritmetičkoj sredini dielektričnosti svih šest dielektrika jer je kapacitet kugle u savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε opisan izrazom:

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R \quad (14.551)$$

Vrijede i sljedeći izrazi:

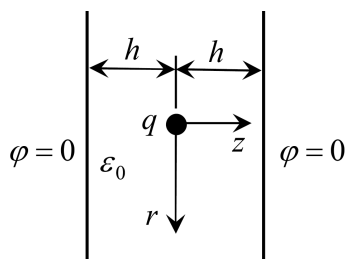
$$\frac{Q_i}{\varepsilon_i} = k \quad ; \quad \sum_{i=1}^6 Q_i = k \cdot \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i = Q \quad (14.552)$$

gdje je Q ukupni električni naboj na vodljivoj kugli.

Iz izraza (14.552) slijedi da je:

$$Q_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_6} \cdot Q = \frac{\varepsilon_{ri}}{\varepsilon_{r1} + \dots + \varepsilon_{r6}} \cdot Q \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (14.553)$$

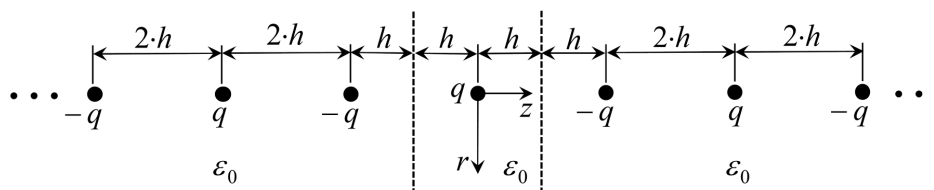
Zadatak 14.23. Neka se točkasti električni naboj q nalazi između dviju vodljivih ravnina, čije su jednačbe $z = \pm h$. Neka su ravnine na nultom skalarnom električnom potencijalu. Odredite analitički izraz (beskonačnu sumu) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u dijelu prostora između vodljivih ravnina. Zadatak riješite izravnom primjenom metode odslikavanja.



Slika 14.106. Točkasti električni naboj između dviju vodljivih ravnina

Rješenje:

Problem je osnosimetričan pa se koristi cilindrični koordinatni sustav (r, z) . Po metodi odslikavanja ima beskonačno mnogo slika (Slika 14.106).

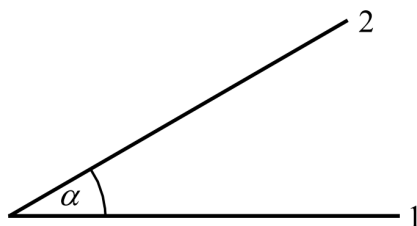


Slika 14.107. Stvarni električni naboj i odslikani električni naboji

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u dijelu prostora između vodljivih ravnina opisana je izrazom:

$$\varphi = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 4 \cdot k \cdot h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - 4 \cdot k \cdot h)^2}} \right) - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 4 \cdot k \cdot h - 2 \cdot h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - 4 \cdot k \cdot h + 2 \cdot h)^2}} \right) \quad (14.554)$$

Zadatak 14.24. Dvije vodljive ekvipotencijalne poluravnine nalaze se u zraku i spojene su pod kutom $\alpha = \pi/6$. Neka je skalarni električni potencijal prve poluravnine $\varphi_1 = 1$ kV, a skalarni električni potencijal druge poluravnine $\varphi_2 = 0,1$ kV. Odredite raspodjelu skalarnog električnog potencijala u prostoru između poluravnina kojemu je pridružen kut α .



Slika 14.108. Dvije vodljive ekvipotencijalne poluravnine

Rješenje:

Rješenje treba tražiti u cilindričnom koordinatnom sustavu, a raspodjela skalarnog električnog potencijala ovisi samo o kutu ϕ . U tom slučaju Laplaceova diferencijalna jednačina glasi:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (14.555)$$

a njeno rješenje je:

$$\varphi = C_1 \cdot \phi + C_2 \quad (14.556)$$

dok su zadani rubni uvjeti:

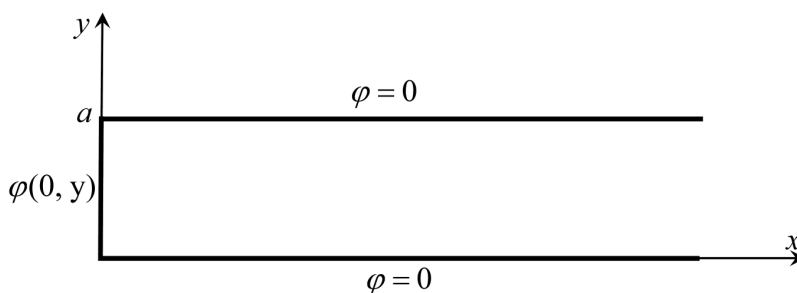
$$\varphi|_{\phi=0} = \varphi_1 = 1 \text{ kV} \quad ; \quad \varphi|_{\phi=\pi/6} = \varphi_2 = 0,1 \text{ kV} \quad (14.557)$$

Nakon što se, na temelju izraza (14.556) i (14.557), odrede konstante C_1 i C_2 , dobije se konačni izraz koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala:

$$\varphi = \frac{6}{\pi} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \phi + \varphi_1 = 1 - 5,4 \cdot \frac{\phi}{\pi} \text{ kV} \quad (14.558)$$

Zadatak 14.25. Odredite funkciju skalarnog električnog potencijala u unutrašnjosti sustava koji se sastoji od dvije vodljive poluravnine na nultom skalarnom električnom potencijalu, razmaknute za $a = 0,1$ m i zatvorene s jedne strane trakom duž koje je raspodjela potencijala opisana izrazom:

$$\varphi = \varphi(0, y) = 100 \cdot \sin(\pi \cdot y / a) + 50 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot y / a) \text{ V.}$$



Slika 14.109. Dvije vodljive poluravnine i traka

Rješenje:

Ovo je 2D problem u (x, y) koordinatnom sustavu, gdje je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana Laplaceovom diferencijalnom jednačinom, a njeno opće rješenje koje može zadovoljiti rubne uvjete glasi:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot e^{-\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}} + B_n \cdot e^{\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}} \right) \cdot \left(C_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} + D_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \quad (14.559)$$

gdje su koeficijenti B_n ; $n \geq 1$ jednaki nuli jer za beskonačni x skalarni električni potencijal mora biti konačan. Osim toga, koeficijenti D_n ; $n \geq 1$ jednaki su nuli jer zadani rubni uvjet $\varphi(0, y)$ sadrži samo sinusne funkcije. Slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana izrazom:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot e^{-\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} \quad (14.560)$$

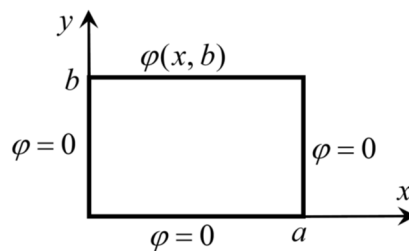
pa se nakon zadovoljenja zadanog rubnog uvjeta $\varphi(0, y)$ dobije tražena funkcija skalarnog električnog potencijala:

$$\varphi = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \cdot x}{a}} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{a} + 50 \cdot e^{-\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{a}} \cdot \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot y}{a} \quad (14.561)$$

Ako se uvrsti zadana brojučana vrijednost za parametar $a = 0,1$ m, onda se dobije da je:

$$\varphi = 100 \cdot e^{-10 \cdot \pi \cdot x} \cdot \sin(10 \cdot \pi \cdot y) + 50 \cdot e^{-30 \cdot \pi \cdot x} \cdot \sin(30 \cdot \pi \cdot y) \text{ V} \quad (14.562)$$

Zadatak 14.26. Na temelju rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe u 2D pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y) , odredite funkciju skalarnog električnog potencijala unutar pravokutnika na slici. Neka je zadano: $a = 0,2$ m, $b = 0,1$ m, $\varphi(x, b) = 10 \cdot \sin(\pi \cdot x/a) + 20 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x/a)$ V.



Slika 14.110. Geometrija 2D problema i granični uvjeti

Rješenje:

Ovo je 2D problem u (x, y) koordinatnom sustavu, gdje je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana Laplaceovom diferencijalnom jednadžbom, a njeno opće rješenje koje može zadovoljiti rubne uvjete glasi:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} + B_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \cdot \left(C_n \cdot \text{sh} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} + D_n \cdot \text{ch} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \quad (14.563)$$

gdje su koeficijenti $B_n; n \geq 1$ jednaki nuli jer zadani rubni uvjet $\varphi(x, b)$ sadrži samo sinusne funkcije. Osim toga, koeficijenti $D_n; n \geq 1$ jednaki su nuli jer to zahtijeva rubni uvjet $\varphi(x, 0) = 0$. Slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala opisana izrazom:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sh} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} \quad (14.564)$$

Iz zadanog rubnog uvjeta:

$$\varphi(x, b) = 10 \cdot \sin(\pi \cdot x/a) + 20 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x/a) \quad (14.565)$$

slijedi da je:

$$\varphi = G_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \text{sh} \frac{\pi \cdot y}{a} + G_3 \cdot \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sh} \frac{3 \cdot \pi \cdot y}{a} \quad (14.566)$$

Iz izraza (14.565) i (14.566), slijedi da je:

$$10 = G_1 \cdot \text{sh} \frac{\pi \cdot b}{a} \Rightarrow G_1 = \frac{10}{\text{sh} \frac{\pi \cdot b}{a}} \quad (14.567)$$

$$20 = G_3 \cdot \text{sh} \frac{3 \cdot \pi \cdot b}{a} \Rightarrow G_3 = \frac{20}{\text{sh} \frac{3 \cdot \pi \cdot b}{a}} \quad (14.568)$$

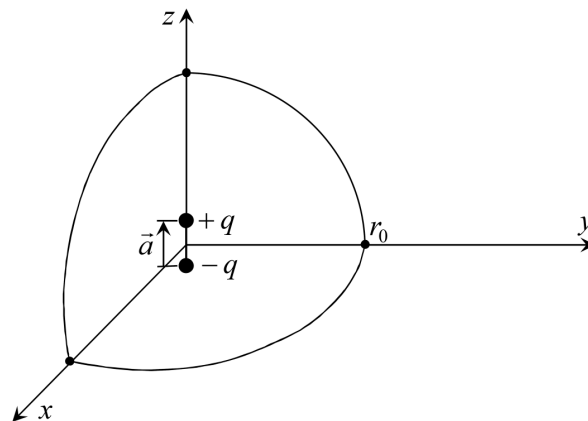
pa je:

$$\varphi = 10 \cdot \frac{\sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \text{sh} \frac{\pi \cdot y}{a}}{\text{sh} \frac{\pi \cdot b}{a}} + 20 \cdot \frac{\sin \frac{3 \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sh} \frac{3 \cdot \pi \cdot y}{a}}{\text{sh} \frac{3 \cdot \pi \cdot b}{a}} \quad (14.569)$$

Ako se uvrste zadane brojčane vrijednosti $a = 0,2$ m, $b = 0,1$ m, onda se dobije da je:

$$\varphi = 10 \cdot \frac{\sin(5 \cdot \pi \cdot x) \cdot \text{sh}(5 \cdot \pi \cdot y)}{\text{sh} \frac{\pi}{2}} + 20 \cdot \frac{\sin(15 \cdot \pi \cdot x) \cdot \text{sh}(15 \cdot \pi \cdot y)}{\text{sh} \frac{3 \cdot \pi}{2}} \quad (14.570)$$

Zadatak 14.27. Električni dipol ima središte u ishodištu koordinatnog sustava i nalazi se u zraku. Oko dipola se nalazi sfera s centrom u ishodištu koordinatnog sustava, polumjera $r_0 = 1$ m. Odredite električni tok koji izlazi kroz dio sfere koji se nalazi u prvom oktantu pravokutnog koordinatnog sustava (x, y, z) . Neka je: $q = 1 \mu\text{C}$, $a = 0,01$ m. Pretpostavite da je $r_0 \gg a$.



Slika 14.111. Električni dipol i osmina kugline sfere

Skalarni električni potencijal električnog dipola, koji se nalazi u centru sfernog koordinatnog sustava (r, ϑ, ϕ) , opisan je izrazom (14.81), koji u zraku glasi:

$$\varphi = \frac{p \cdot \cos \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{q \cdot a \cdot \cos \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \quad (14.571)$$

pa je r -komponenta jakosti električnog polja opisana izrazom:

$$E_r = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3} = \frac{q \cdot a \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3} \quad (14.572)$$

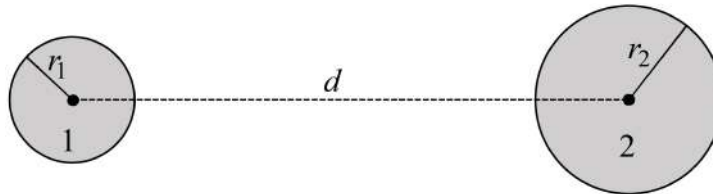
Električni tok koji prolazi kroz zadanu osminu kugline sfere stvara normalna komponenta jakosti električnog polja, a to je r -komponenta jakosti električnog polja. Vrijedi da je:

$$\Phi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \varepsilon_0 \cdot E_r \cdot dS = \frac{q \cdot a}{2 \cdot \pi \cdot r_0^3} \cdot \int_0^{\pi/2} d\phi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot r_0^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \quad (14.573)$$

pa je:

$$\Phi = \frac{q \cdot a}{4 \cdot r_0} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{q \cdot a}{8 \cdot r_0} = 1,25 \text{ nC} \quad (14.574)$$

Zadatak 14.28. Dvije osamljene vodljive kugle polumjera $r_1 = 0,1 \text{ m}$ i $r_2 = 0,15 \text{ m}$ nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti $d = 5 \text{ m}$. Odredite: a) kapacitivne koeficijente (međusobne i vlastite), b) parcijalne kapacitete, c) električni kapacitet između kugla, d) električni kapacitet kugle 2 ako je uzemljena kugla 1, e) električni kapacitet kugle 1 ako je uzemljena kugla 2. Pretpostavite da je $d \gg r_1, d \gg r_2$.



Slika 14.112. Dvije osamljene vodljive kugle

Rješenje:

Skalarni električni potencijali kugla opisani su sljedećim izrazima:

$$\varphi_1 = \alpha_{1,1} \cdot Q_1 + \alpha_{1,2} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d} \quad (14.575)$$

$$\varphi_2 = \alpha_{2,1} \cdot Q_1 + \alpha_{2,2} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_2} \quad (14.576)$$

gdje su $\alpha_{i,k}$ potencijalni koeficijenti.

Sustav linearnih jednadžbi (14.575) i (14.576) u matričnom zapisu glasi:

$$\{\varphi\} = [\alpha] \cdot \{Q\} \quad (14.577)$$

gdje je matrica potencijalnih koeficijenata opisana izrazom:

$$[\alpha] = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \quad (14.578)$$

a) Izračun kapacitivnih koeficijenata

Matrica kapacitivnih koeficijenata jednaka je inverznoj matrici potencijalnih koeficijenata:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\frac{1}{r_1 \cdot r_2} - \frac{1}{d^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \quad (14.579)$$

pa je:

$$[\beta] = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot d^2}{d^2 - r_1 \cdot r_2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{d} \\ -\frac{1}{d} & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \quad (14.580)$$

Vlastiti i međusobni kapacitivni koeficijenti su:

$$\beta_{1,1} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1 \cdot d^2}{d^2 - r_1 \cdot r_2} = 1,11331805 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (14.581)$$

$$\beta_{2,2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_2 \cdot d^2}{d^2 - r_1 \cdot r_2} = 1,66997707 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (14.582)$$

$$\beta_{1,2} = \beta_{2,1} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot d}{d^2 - r_1 \cdot r_2} = -3,33995414 \cdot 10^{-13} \text{ F} \quad (14.583)$$

b) Izračun parcijalnih kapaciteta

Parcijalni kapaciteti su:

$$C_{1,1} = \beta_{1,1} + \beta_{1,2} = 1,07991851 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (14.584)$$

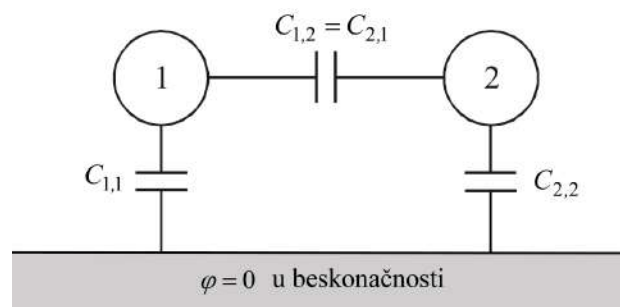
$$C_{2,2} = \beta_{2,1} + \beta_{2,2} = 1,63657753 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (14.585)$$

$$C_{1,2} = C_{2,1} = -\beta_{1,2} = 3,33995414 \cdot 10^{-13} \text{ F} \quad (14.586)$$

c) Izračun električnog kapaciteta između kugla

Električni kapacitet između kugla je, prema Slici 14.113, opisan izrazom

$$C = C_{1,2} + \frac{C_{1,1} \cdot C_{2,2}}{C_{1,1} + C_{2,2}} = \dots = 6,84006184 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (14.587)$$

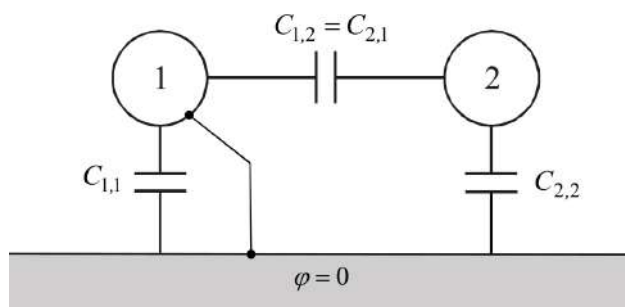


Slika 14.113. Parcijalni kapaciteti dviju osamljenih kugla

d) Izračun električnog kapaciteta kugle 2 ako je uzemljena kugla 1

Ako je kugla 1 uzemljena (Slika 14.114), onda je njen skalarni električni potencijal jednak nuli, pa je električni kapacitet kugle 2:

$$C_2 = C_{1,2} + C_{2,2} = C_{2,1} + C_{2,2} = \beta_{2,2} = 1,66997707 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (14.588)$$

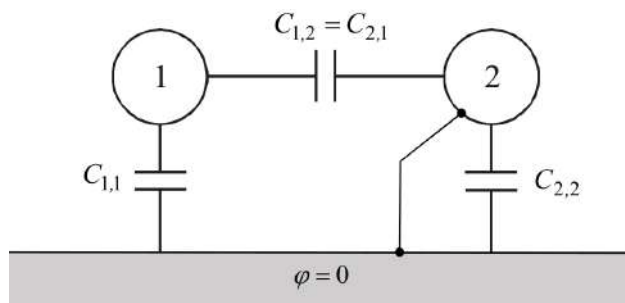


Slika 14.114. Potencijal kugle 1 jednak nuli

e) Izračun električnog kapaciteta kugle 1 ako je uzemljena kugla 2

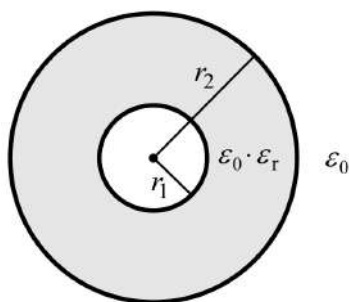
Ako je uzemljena kugla 2 (Slika 14.115), onda je njen skalarni električni potencijal jednak nuli, pa je električni kapacitet kugle 1:

$$C_1 = C_{1,2} + C_{1,1} = \beta_{1,1} = 1,11331805 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (14.589)$$



Slika 14.115. Potencijal kugle 2 jednak nuli

Zadatak 14.29. Dvije vodljive sfere polumjera $r_1 = 0,05 \text{ m}$ i $r_2 = 0,15 \text{ m}$ nalaze se u neograničenom zraku. Neka je između njih savršeni LIH dielektrik relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 10$. Izračunajte sve parcijalne kapacitete.



Slika 14.116. Dvije vodljive sfere u neograničenom zraku

Rješenje:

Da bi se izračunali svi parcijalni kapaciteti, treba pretpostaviti da se na unutarnjoj kugli nalazi električni naboj Q_1 , a na vanjskoj kugli električni naboj Q_2 .

Jakost električnog polja je opisana izrazima:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2} \quad \text{za } r_1 \leq r \leq r_2 \quad (14.590)$$

$$E_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{za } r > r_2 \quad (14.591)$$

Skalarni električni potencijal kugle 2 je opisan izrazom:

$$\varphi_2 = \int_{r_2}^{\infty} E_2 \cdot dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_2} \quad (14.592)$$

dok je skalarni električni potencijal kugle 1 opisan izrazom:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \int_{r_1}^{r_2} E_1 \cdot dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_2} + \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (14.593)$$

Izrazi (14.592) i (14.593) u matičnom zapisu glase:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varphi\} = [\alpha] \cdot \{Q\} \quad (14.594)$$

gdje je matrica potencijalnih koeficijenata opisana izrazom:

$$[\alpha] = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \begin{bmatrix} \frac{r_2 + (\epsilon_r - 1) \cdot r_1}{\epsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \quad (14.595)$$

Nadalje je:

$$\{Q\} = [\beta] \cdot \{\varphi\} = [\alpha]^{-1} \cdot \{\varphi\} \quad (14.596)$$

gdje je matrica kapacitivnih koeficijenata:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix} \quad (14.597)$$

Slijedi da je:

$$[\beta] = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2^2}{r_2 - r_1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_2} & -\frac{1}{r_2} \\ -\frac{1}{r_2} & \frac{r_2 + (\epsilon_r - 1) \cdot r_1}{\epsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2} \end{bmatrix} \quad (14.598)$$

Matrica parcijalnih kapaciteta je opisana izrazom:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} + \beta_{1,2} & -\beta_{1,2} \\ -\beta_{2,1} & \beta_{2,1} + \beta_{2,2} \end{bmatrix} \quad (14.599)$$

Slijedi da je:

$$[C] = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2^2}{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2} \end{bmatrix} \quad (14.600)$$

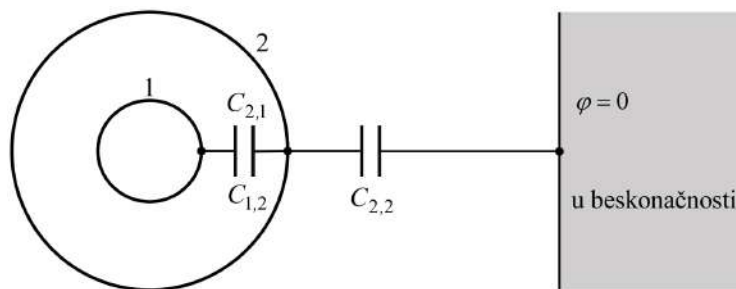
Dakle, parcijalni kapaciteti su (Slika 14.117):

$$C_{1,1} = 0 \quad (14.601)$$

$$C_{1,2} = C_{2,1} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} = 8,3448754 \text{ pF} \quad (14.602)$$

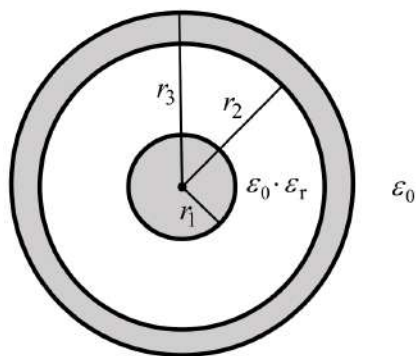
$$C_{2,2} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_2 = 16,6897508 \text{ pF} \quad (14.603)$$

Rezultat bi bio isti ako bi unutarnja kugla bila puna vodljiva kugla.



Slika 14.117. Parcijalni kapaciteti

Zadatak 14.30. Vodljiva puna kugla polumjera $r_1 = 0,02 \text{ m}$ i njoj koncentrična šuplja vodljiva kugla unutarnjeg polumjera $r_2 = 0,05 \text{ m}$ i vanjskog polumjera $r_3 = 0,06 \text{ m}$ nalaze se osamljene u zraku. Između kugla nalazi se dielektrik relativne dielektričnosti $\varepsilon_r = 10$. Izračunajte: a) sve parcijalne kapacitete, b) ukupni kapacitet između kugla ako je uzemljena kugla 1, c) ukupni kapacitet između kugla ako je uzemljena kugla 2.



Slika 14.118. Dvije koncentrične vodljive kugle

Rješenje:

a) Izračun parcijalnih kapaciteta

Da bi se izračunali svi parcijalni kapaciteti, treba pretpostaviti da se na unutarnjoj kugli (kugli 1) nalazi električni naboj Q_1 , a na vanjskoj kugli (kugli 2) električni naboj Q_2 . Da bi u kugli 2 jakost električnog polja bila jednaka nuli, na njenoj unutarnjoj sferi ($r = r_2$) nalazi se električni naboj $-Q_1$, a na njenoj vanjskoj sferi ($r = r_3$) nalazi se električni naboj $Q_1 + Q_2$.

U dielektricima je jakost električnog polja opisana izrazima:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2} \quad \text{za } r_1 \leq r \leq r_2 \quad (14.604)$$

$$E_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{za } r > r_3 \quad (14.605)$$

Skalarni električni potencijal kugle 2 je opisan izrazom:

$$\varphi_2 = \int_{r_3}^{\infty} E_2 \cdot dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_3} \quad (14.606)$$

dok je skalarni električni potencijal kugle 1 opisan izrazom:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \int_{r_1}^{r_2} E_1 \cdot dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_3} + \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (14.607)$$

Izrazi (14.606) i (14.607) u matičnom zapisu glase:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\varphi\} = [\alpha] \cdot \{Q\} \quad (14.608)$$

gdje je matrica potencijalnih koeficijenata opisana izrazom:

$$[\alpha] = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \begin{bmatrix} \frac{r_3 \cdot (r_2 - r_1) + \varepsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2}{\varepsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} & \frac{1}{r_3} \\ \frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_3} \end{bmatrix} \quad (14.609)$$

Nadalje je:

$$\{Q\} = [\beta] \cdot \{\varphi\} = [\alpha]^{-1} \cdot \{\varphi\} \quad (14.610)$$

gdje je matrica kapacitivnih koeficijenata:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix} \quad (14.611)$$

Slijedi da je:

$$[\beta] = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2 - r_1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_3} & -\frac{1}{r_3} \\ -\frac{1}{r_3} & \frac{r_3 \cdot (r_2 - r_1) + \varepsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2}{\varepsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \end{bmatrix} \quad (14.612)$$

Matrica parcijalnih kapaciteta je opisana izrazom (14.599) pa je:

$$[C] = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2 - r_1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_3} \\ \frac{1}{r_3} & \frac{r_2 - r_1}{\varepsilon_r \cdot r_1 \cdot r_2} \end{bmatrix} \quad (14.613)$$

Dakle, parcijalni kapaciteti su (Slika 14.117):

$$C_{1,1} = 0 \quad (14.614)$$

$$C_{1,2} = C_{2,1} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} = 37,0883352 \text{ pF} \quad (14.615)$$

$$C_{2,2} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_3 = 6,67590034 \text{ pF} \quad (14.616)$$

Napomena: Rezultat bi bio isti ako bi unutarnja kugla bila šuplja vodljiva kugla.

b) Izračun električnog kapaciteta između kugla ako je uzemljena kugla 1

Ako je uzemljena kugla 1, onda je njen skalarni električni potencijal jednak nuli, pa je električni kapacitet između kugla:

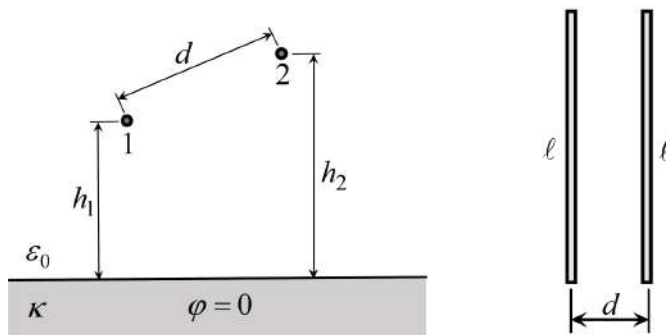
$$C = C_{2,1} + C_{2,2} = \beta_{2,2} = 43,76423554 \text{ pF} \quad (14.617)$$

c) Izračun električnog kapaciteta između kugla ako je uzemljena kugla 2

Ako je uzemljena kugla 2, onda je njen skalarni električni potencijal jednak nuli, pa je električni kapacitet između kugla:

$$C = C_{1,2} = -\beta_{1,2} = 37,0883352 \text{ pF} \quad (14.618)$$

Zadatak 14.31. Dva međusobno paralelna tankožičana vodiča, duljine $\ell = 10 \text{ m}$, polumjera $r_0 = 5 \text{ mm}$, nalaze se u zraku iznad tla na visini $h_1 = 5 \text{ m}$ i $h_2 = 7 \text{ m}$. Neka je razmak između vodiča $d = 3 \text{ m}$. Pomoću metode srednjeg potencijala izračunajte sve kapacitivne koeficijente i ukupni kapacitet između vodiča. Neka je $r_0 \ll d$.

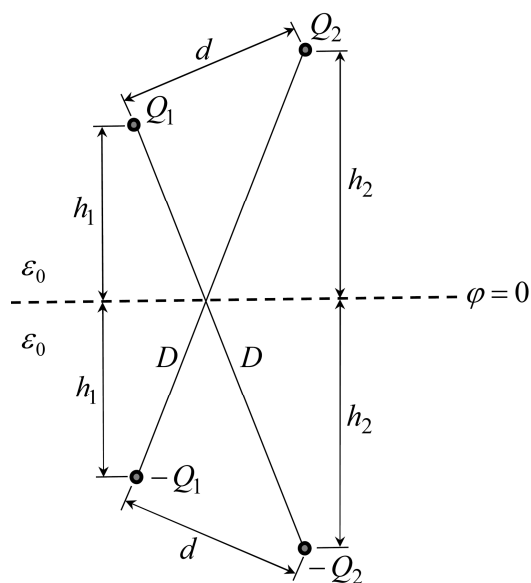


Slika 14.119. Dva međusobno paralelna tankožičana vodiča iznad tla

Rješenje:

Da bi se po metodi srednjeg potencijala izračunali svi parcijalni kapaciteti, treba pretpostaviti da su oba vodiča naelektrizirana električnim nabojima Q_1 i Q_2 koji su u numeričkom modelu jednoliko raspoređeni duž osi vodiča.

Utjecaj tla na raspodjelu skalarnog električnog potencijala može se uzeti u račun tako da se granični uvjet na površini tla zadovolji korištenjem metode odslikavanja. Po metodi odslikavanja dva naelektrizirana vodiča u zraku (dielektričnom poluprostoru) nadomještaju četiri vodiča u neograničenom savršenom LIH dielektriku kojemu je dielektričnost jednaka dielektričnosti zraka (Slika 14.120). Pritom je odslikani električni naboj suprotnog predznaka od pripadnog stvarnog naboja.



Slika 14.120. Stvarni vodiči i njihove zrcalne slike

Po metodi srednjeg potencijala, skalarni električni potencijali vodiča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = \alpha_{1,1} \cdot Q_1 + \alpha_{1,2} \cdot Q_2 \quad ; \quad \Phi_2 = \alpha_{2,1} \cdot Q_1 + \alpha_{2,2} \cdot Q_2 \quad (14.619)$$

koji u matričnom zapisu glase:

$$\{\Phi\} = [\alpha] \cdot \{Q\} \quad (14.620)$$

Matrica potencijalnih koeficijenata opisana je izrazom:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_1) & G(\ell, d) - G(\ell, D) \\ G(\ell, d) - G(\ell, D) & G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_2) \end{bmatrix} \quad (14.621)$$

gdje je:

$$G(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (14.622)$$

Matrica kapacitivnih koeficijenata glasi:

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \frac{1}{\det[\alpha]} \begin{bmatrix} G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_2) & G(\ell, D) - G(\ell, d) \\ G(\ell, D) - G(\ell, d) & G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_1) \end{bmatrix} \quad (14.623)$$

gdje je:

$$\det[\alpha] = [G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_1)] \cdot [G(\ell, r_0) - G(\ell, 2 \cdot h_2)] - (G(\ell, d) - G(\ell, D))^2 \quad (14.624)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$G(\ell, r_0) = 1,311202842 \cdot 10^{10} \quad ; \quad G(\ell, 2 \cdot h_1) = 8,397249834 \cdot 10^8 \quad (14.625)$$

$$G(\ell, 2 \cdot h_2) = 6,181018902 \cdot 10^8 \quad ; \quad G(\ell, d) = 2,111833483 \cdot 10^9 \quad (14.626)$$

$$D = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2} - \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2} = \sqrt{d^2 + 4 \cdot h_1 \cdot h_2} = 12,20655562 \text{ m} \quad (14.627)$$

$$G(\ell, D) = 7,015641548 \cdot 10^8 \quad (14.628)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1,227230344 & 0,1410269328 \\ 0,1410269328 & 1,249392653 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \quad (14.629)$$

$$[\beta] = [\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,249392653 & -0,1410269328 \\ -0,1410269328 & 1,227230344 \end{bmatrix} \cdot \frac{10^{-10}}{1,51340398} \quad (14.630)$$

$$\beta_{1,1} = 82,555132 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (14.631)$$

$$\beta_{2,1} = \beta_{1,2} = -9,318525305 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (14.632)$$

$$\beta_{2,2} = 81,0907306 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (14.633)$$

pa su parcijalni kapaciteti:

$$C_{1,1} = \beta_{1,1} + \beta_{1,2} = 73,2366067 \text{ pF} \quad (14.634)$$

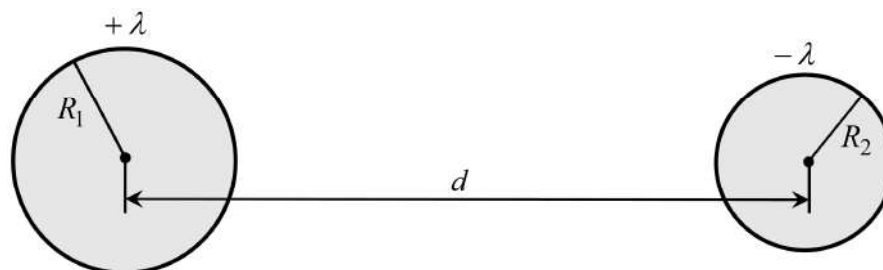
$$C_{1,2} = C_{2,1} = -\beta_{1,2} = 9,318525305 \text{ pF} \quad (14.635)$$

$$C_{2,2} = \beta_{2,1} + \beta_{2,2} = 71,7722053 \text{ pF} \quad (14.636)$$

Ukupni kapacitet između vodiča je:

$$C = C_{1,2} + \frac{C_{1,1} \cdot C_{2,2}}{C_{1,1} + C_{2,2}} = 45,56703117 \text{ pF} \quad (14.637)$$

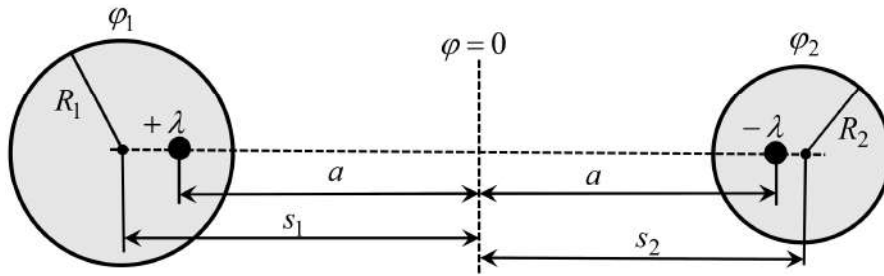
Zadatak 14.32. Dva osamljena beskonačno duga, međusobno paralelna, cilindrična vodiča polumjera $R_1 = 0,1 \text{ m}$ i $R_2 = 0,05 \text{ m}$ nalaze se u zraku i središta su im razmaknuta za $d = 0,5 \text{ m}$. Neka su cilindri naelektrizirani nabojima konstantne linijske gustoće $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda = 1 \text{ } \mu\text{C/m}$. Izračunajte skalarni električni potencijal pojedinog cilindra i jedinični kapacitet između cilindara.



Slika 14.121. Dva beskonačno duga međusobno paralelna cilindrična vodiča

Rješenje:

Zadatak se rješava na temelju Slike 14.122. Nadomjesni naboji se smještaju na zamišljene beskonačno duge pravocrtne tankožičane vodiče.



Slika 14.122. Grafički prikaz parametara potrebnih za rješenje zadatka

Vrijede sljedeći izrazi:

$$s_1^2 - a^2 = R_1^2 \quad (14.638)$$

$$s_2^2 - a^2 = R_2^2 \quad (14.639)$$

$$s_1 + s_2 = d \quad (14.640)$$

Iz izraza (14.638) i (14.639), slijedi da je:

$$s_1^2 - s_2^2 = (s_1 - s_2) \cdot (s_1 + s_2) = R_1^2 - R_2^2 \quad (14.641)$$

pa je:

$$s_1 - s_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{d} \quad (14.642)$$

Iz sustava dviju linearnih jednadžbi (14.640) i (14.642), slijedi da je:

$$s_1 = \frac{d}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot d} = 0,2575 \text{ m} \quad (14.643)$$

$$s_2 = d - s_1 = 0,2425 \text{ m} \quad (14.644)$$

$$a = \sqrt{s_1^2 - R_1^2} = 0,23728938 \text{ m} \quad (14.645)$$

Skalarni električni potencijali cilindričnih vodiča opisani su izrazima:

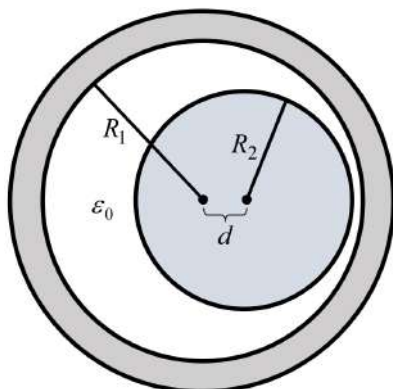
$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{s_1 + a}{R_1} = 2,87452266 \cdot 10^4 \text{ V} \quad (14.646)$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{s_2 - a}{R_2} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{R_2}{s_2 + a} = -4,06475369 \cdot 10^4 \text{ V} \quad (14.647)$$

Jedinični kapacitet između cilindričnih vodiča je:

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{(s_1 + a) \cdot (s_2 + a)}{R_1 \cdot R_2}} = 14,41072454 \text{ pF/m} \quad (14.648)$$

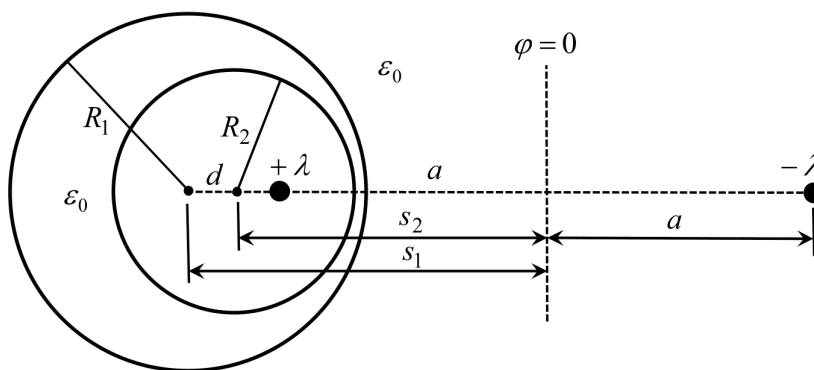
Zadatak 14.33. Između dva beskonačno duga, međusobno paralelna, ekscentrična vodljiva cilindra polumjera $R_1 = 0,2$ m i $R_2 = 0,1$ m nalazi se zrak, a središta su im razmaknuta za $d = 0,05$ m. Izračunajte njihov jedinični električni kapacitet.



Slika 14.123. Dva beskonačno duga ekscentrična cilindrična vodiča

Rješenje:

Zadatak se rješava na temelju Slike 14.124. Nadomjesni naboji se smještaju na zamišljene beskonačno duge pravocrtne tankožičane vodiče.



Slika 14.124. Grafički prikaz parametara potrebnih za rješenje zadatka

Vrijede sljedeći izrazi:

$$s_1^2 - a^2 = R_1^2 \quad ; \quad s_2^2 - a^2 = R_2^2 \quad ; \quad s_1 - s_2 = d \quad (14.649)$$

odakle se lako dobije da je:

$$s_1 = \frac{d}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot d} = 0,325 \text{ m} \quad (14.650)$$

$$s_2 = s_1 - d = 0,275 \text{ m} \quad (14.651)$$

$$a = \sqrt{s_1^2 - R_1^2} = 0,2561737691 \text{ m} \quad (14.652)$$

Skalarni električni potencijali cilindričnih vodiča opisani su izrazima:

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{s_1 + a}{R_1} \quad (14.653)$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{s_2 + a}{R_2} \quad (14.654)$$

pa je električni napon između cilindričnih vodiča opisan izrazom:

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{(s_2 + a) \cdot R_1}{(s_1 + a) \cdot R_2} \quad (14.655)$$

Jedinični kapacitet cilindričnih vodiča je:

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\lambda}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}{\ln \frac{(s_2 + a) \cdot R_1}{(s_1 + a) \cdot R_2}} = 92,23099936 \text{ pF/m} \quad (14.656)$$

15. STACIONARNO STRUJNO POLJE

Elektrostatičko polje stvaraju mirujući električni naboji u savršenom dielektriku. Stacionarno strujno polje stvaraju električni naboji u jednolikom gibanju u vodljivom sredstvu. Drugim riječima, to je elektromagnetsko polje koje u vodljivom sredstvu stvaraju vremenski konstantne električne struje, koje se u literaturi, između ostalog, nazivaju vremenski neovisnim električnim strujama ili pak stacionarnim električnim strujama.

Vektor plošne gustoća vremenski konstantne električne struje u vodljivom sredstvu opisan je izrazom:

$$\vec{J} = N \cdot q \cdot \vec{v} \quad (15.1)$$

gdje je:

N - ukupan broj slobodnih nositelja električnog naboja u jedinici volumena (metru kubnom),

q - količina električnog naboja pojedinog slobodnog nositelja električnog naboja,

\vec{v} - vektor brzine slobodnih nositelja naboja.

Iz izraza (15.1) slijedi da je:

$$\vec{v} = \frac{\vec{J}}{N \cdot q} \quad (15.2)$$

pa je, prema izrazu (8.1), Lorentzova sila na slobodni nositelj električnog naboja opisana izrazom:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \vec{E} + \frac{1}{N} \cdot (\vec{J} \times \vec{B}) = q \cdot \vec{E}_{\text{ekv}} \quad (15.3)$$

gdje je jakost ekvivalentnog električnog polja:

$$\vec{E}_{\text{ekv}} = \vec{E} + \frac{1}{N \cdot q} \cdot (\vec{J} \times \vec{B}) \quad (15.4)$$

pa je u slučaju *krutih* i *tekućih* vodljivih sredstava:

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}_{\text{ekv}} = \kappa \cdot \left(\vec{E} + \frac{1}{N \cdot q} \cdot (\vec{J} \times \vec{B}) \right) \quad (15.5)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{N \cdot q} \quad (15.6)$$

gdje je κ električna provodnost vodljivog sredstva.

U slučaju dobrih vodiča, može se uzeti da je:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} \quad ; \quad \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (15.7)$$

jer je u dobrim vodičima:

$$\frac{J}{\kappa} \gg \frac{J \cdot B}{N \cdot q} \quad (15.8)$$

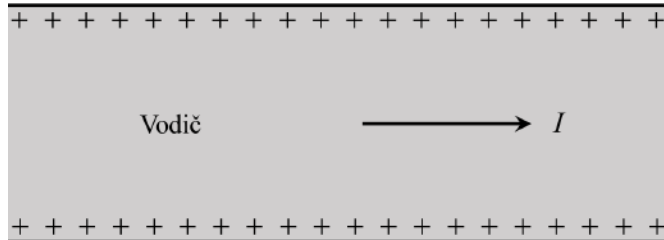
To znači da se pretpostavlja da raspodjela vremenski konstantne električne struje u dobrim vodičima ne ovisi o statičkom magnetskom polju koje ta struja stvara. Takvo se električno polje naziva: *stacionarno strujno polje* ili pak *statičko strujno polje*.

Dakle, vremenski konstantne električne struje koje teku dobrim vodičima stvaraju stacionarno strujno polje i magnetostatičko polje, koja se, uz odličnu aproksimaciju, mogu smatrati neovisnim. Stacionarno strujno polje stvara magnetostatičko polje, ali se zanemaruje utjecaj magnetostatičkog polja na stacionarno strujno polje.

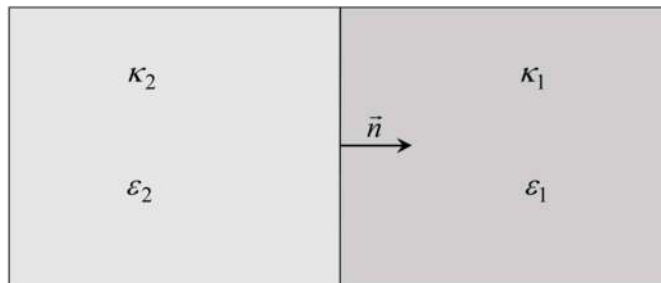
15.1. Nepokretni naboj na granici dvaju sredstava

Nepokretni električni naboj može se nalaziti na granici između dvaju LIH sredstava, tj. na granici dvaju LIH vodiča kojima teku vremenski konstantne električne struje te na granici vodiča i dielektrika (Slika 15.1).

Zaključak: Na granici vodiča i dielektrika u slučaju stacionarnog strujnog polja kao i u slučaju elektrostatičkog polja nalazi se nepokretni električni naboj.



Slika 15.1. Nepokretni električni naboj na površini vodiča okruženog dielektrikom



Slika 15.2. Dva vodljiva LIH sredstva

Na granici između vodljivog LIH sredstva 1 koje ima značajke κ_1 i ϵ_1 i vodljivog LIH sredstva 2 koje ima značajke κ_2 i ϵ_2 (Slika 15.2), prema izrazima navedenim u potpoglavlju 11.1, trebaju biti zadovoljeni sljedeći granični uvjeti:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad ; \quad \vec{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad ; \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (15.9)$$

ili drukčije pisano:

$$E_{t1} = E_{t2} = E_t \quad ; \quad J_{n1} = J_{n2} = J_n \quad ; \quad D_{n1} - D_{n2} = \sigma \quad (15.10)$$

Iz izraza (15.10), slijedi da je:

$$D_{n1} - D_{n2} = \left(\frac{\epsilon_1}{\kappa_1} - \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} \right) \cdot J_n = \sigma \quad (15.11)$$

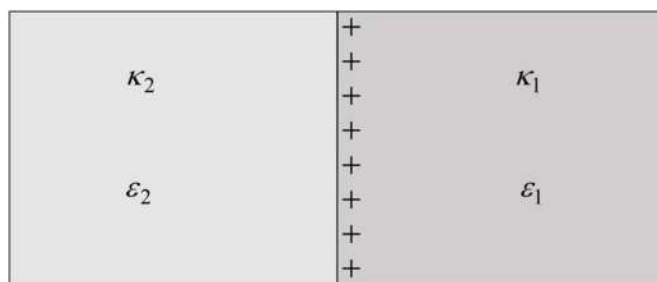
pa je za:

$$\frac{\epsilon_1}{\kappa_1} > \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} \quad (15.12)$$

plošna gustoća nepokretnog električnog naboja $\sigma > 0$ (Slika 15.3), dok je za:

$$\frac{\epsilon_1}{\kappa_1} < \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} \quad (15.13)$$

plošna gustoća nepokretnog električnog naboja $\sigma < 0$.



Slika 15.3. Pozitivni nepokretni električni naboj na granici dvaju vodljivih LIH sredstava

15.2. Maxwellove jednadžbe stacionarnog strujnog polja

Prema izrazima (6.47) i (6.48), stacionarno strujno polje u mirujućem vodljivom sredstvu opisano je dvjema Maxwellovim diferencijalnim jednadžbama:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (15.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \cdot \vec{J}_s = g_{st} \quad (15.15)$$

gdje je novouvedena veličina g_{st} volumna gustoća vremenski konstantne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno vodljivo sredstvo.

Iz Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi stacionarnog strujnog polja (15.14) i (15.15), ili pak iz izraza (6.95) i (6.96), slijedi da su Maxwellove integralne jednadžbe stacionarnog strujnog polja opisane izrazima:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (15.16)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V g_{st} \cdot dV = I_{st} \quad (15.17)$$

gdje je I_{st} jakost vremenski konstantne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u vodljivo sredstvo unutar volumena V . Krivulja K opisana je Slikom 1.4, a volumen V i zatvorena ploha ∂V Slikom 1.3.

Maxwellova diferencijalna jednadžba (15.15) jest ujedno i diferencijalna jednadžba kontinuiteta u vodljivom sredstvu. Maxwellova integralna jednadžba (15.17) jest ujedno integralna jednadžba kontinuiteta u vodljivom sredstvu kao i prvi Kirchhoffov zakon u općem obliku koji uključuje i nezavisni izvor električne struje.

15.3. Analogija između statičkih polja

Postoji analogija između stacionarnog strujnog polja u vodljivom LIH sredstvu i elektrostatičkog polja u savršenom LIH dielektriku, koja je prikazana u Tablici 15.1.

Analogne su sljedeće veličine stacionarnog strujnog polja i elektrostatičkog polja:

$$\vec{J} \Leftrightarrow \vec{D} \quad ; \quad I \Leftrightarrow Q \quad ; \quad \kappa \Leftrightarrow \varepsilon \quad ; \quad g_{st} \Leftrightarrow \rho_s \quad (15.18)$$

U slučaju linearnih izotropnih područja bez izvora polja, postoji analogija između stacionarnog strujnog polja, elektrostatičkog polja i magnetostatičkog polja, gdje se magnetostatičko polje iskazuje pomoću skalarnog magnetskog potencijala (Tablica 15.2). U slučaju magnetostatičkog polja, područje bez izvora se naziva bestrujnim područjem.

Tablica 15.1. Analogija između elektrostatičkog i stacionarnog strujnog polja

Elektrostatičko polje	Stacionarno strujno polje
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{E} = 0$
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s$	$\nabla \cdot \vec{J} = g_{st}$
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$
$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon}$	$\Delta \varphi = -\frac{g_{st}}{\kappa}$
$\vec{E} = -\nabla \varphi$	$\vec{E} = -\nabla \varphi$

Tablica 15.2. Analogija između triju statičkih polja u području bez izvora

Elektrostatičko polje	Stacionarno strujno polje	Magnetostatičko polje
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{H} = 0$
$\nabla \cdot \vec{D} = 0$	$\nabla \cdot \vec{J} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$
$\Delta \varphi = 0$	$\Delta \varphi = 0$	$\Delta \varphi_m = 0$
$\vec{E} = -\nabla \varphi$	$\vec{E} = -\nabla \varphi$	$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$

Važno je istaknuti da je stacionarno strujno polje konzervativno (potencijalno) polje kao i elektrostatičko polje te da vrijedi da je električni napon između dviju točaka A i B jednak razlici skalarnih električnih potencijala tih dviju točaka:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad (15.19)$$

U općem slučaju, raspored izvora vremenski konstantne električne struje može biti takav da ona izvire iz prostora V (prostorna električna struja nezavisnog izvora - volumne gustoće g_{st}), iz plohe S (plošna električna struja nezavisnog izvora - normalne komponente plošne gustoće J_n), iz krivulje K (linijska električna struja nezavisnog izvora - linijske gustoće τ) te da postoji skup točkastih izvora električne struje. Analogno izrazu (6.14), opća integralna jednadžba skalarnog električnog potencijala glasi:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\int_V \frac{g_{st} \cdot dV}{r} + \int_S \frac{J_n \cdot dS}{r} + \int_K \frac{\tau \cdot dl}{r} + \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{r_i} \right) \quad (15.20)$$

gdje je r udaljenost između točke izvora i točke promatranja.

15.4. Točkasti izvor vremenski konstantne električne struje

Analogno izrazima (14.9) - (14.11), za točkasti izvor vremenski konstantne električne struje jakosti I u neograničenom vodljivom LIH sredstvu vrijedi da je:

$$g_{st} = I \cdot \delta(\vec{r}) \quad ; \quad \Delta\varphi = -\frac{I}{\kappa} \cdot \delta(\vec{r}) \quad ; \quad \varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} \quad (15.21)$$

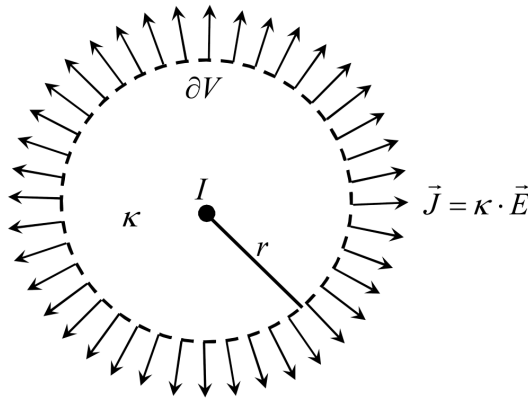
gdje je $\delta(\vec{r})$ Diracova delta funkcija pridružena točki u ishodištu sfernog koordinatnog sustava, u kojoj se nalazi nezavisni izvor polja.

Točkasti izvor vremenski konstantne električne struje jakosti I u neograničenom LIH vodljivom sredstvu električne provodnosti κ stvara sferno simetrično polje (Slika 15.4). Prema izrazu (15.17), vrijedi da je:

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \kappa \cdot E \cdot S = I \cdot \int_V \delta(\vec{r}) \cdot dV = I \quad (15.22)$$

gdje je, prema Slici 15.4, ∂V sfera sa središtem u ishodištu sfernog koordinatnog sustava, pa slijedi da je jakost električnog polja opisana izrazom:

$$E = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r^2} \quad (15.23)$$



Slika 15.4. Jakost električnog polja točkastog izvora vremenski konstantne električne struje

Jakost električnog polja oko točkastog izvora vremenski konstantne električne struje ima samo radijalnu komponentu, tj. vrijedi da je:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \vec{e}_r \quad (15.24)$$

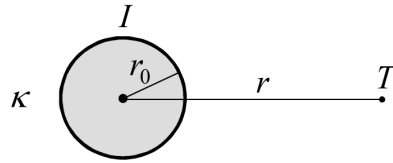
odakle slijedi da je:

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int E \cdot dr = -\frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} \quad (15.25)$$

ako se izabere uobičajena pretpostavka da je skalarni električni potencijal jednak nuli u beskonačnosti.

15.5. Otpor uzemljenja vodljive kugle u neograničenom LIH tlu

Neka se vodljiva kugla, polumjera r_0 , nalazi u neograničenom LIH tlu električne provodnosti κ (Slika 15.5). Neka je kugla načinjena od dobrog vodiča te neka se u odnosu na okolno tlo može smatrati supravodljivom. Neka kugla u okolno tlo, sa svoje sfere, ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I . Treba dobiti izraz za otpor uzemljenja takve kugle, koji vrijedi za stacionarno strujno polje.



Slika 15.5. Vodljiva kugla u neograničenom LIH tlu

U prostoru izvan kugle jakost električnog polja i raspodjela skalarnog električnog potencijala opisani su izrazima (15.23) i (15.25), koji, ujedno, vrijede i u slučaju točkastog izvora vremenski konstantne električne struje.

Unutar vodljive kugle jakost električnog polja jednaka je nuli, a skalarni električni potencijal unutar kugle (uključujući njenu sferu) je konstantan i opisan je sljedećem izrazom:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_0} \quad (15.26)$$

Otpor uzemljenja vodljive kugle u neograničenom LIH tlu je:

$$R_{\text{kugle}} = \frac{\varphi_{\text{kugle}}}{I} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_0} \quad (15.27)$$

Ako se ista kugla nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε , naelektrizirana nabojem Q , onda je njen skalarni električni potencijal:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_0} \quad (15.28)$$

dok je njen kapacitet:

$$C_{\text{kugle}} = \frac{Q}{\varphi_{\text{kugle}}} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_0 \quad (15.29)$$

Slijedi da je:

$$R_{\text{kugle}} \cdot C_{\text{kugle}} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \quad ; \quad R_{\text{kugle}} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot \frac{1}{C_{\text{kugle}}} \quad (15.30)$$

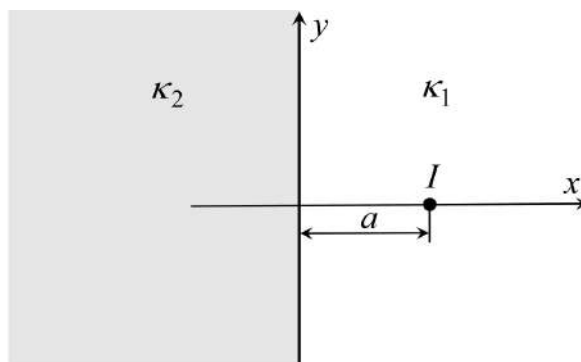
Izraz (15.30) je neovisan o obliku uzemljivača pa se analogija između elektrostatičkog i stacionarnog strujnog polja može iskoristiti kod numeričkog modeliranja ekvipotencijalnih uzemljivača.

15.6. Odslikavanje vremenski konstantne električne struje

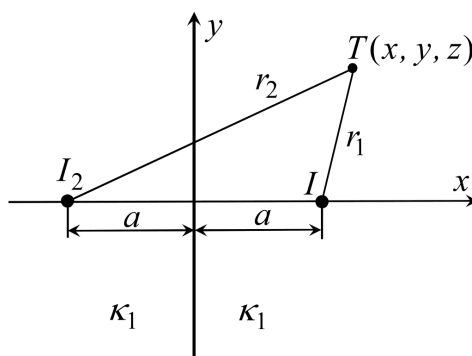
Neka se točkasti izvor vremenski konstantne električne struje jakosti I nalazi ispred vodljivog poluprostora na udaljenosti a . Neka se točkasti izvor električne struje nalazi u poluprostoru električne provodnosti κ_1 , a neka preostali dio prostora ima električnu provodnost κ_2 (Slika 15.6). Neka se, radi jednostavnosti, točkasti izvor električne struje nalazi na x -osi pravokutnog koordinatnog sustava (x, y, z) .

Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba poluprostora mogu se odrediti metodom odslikavanja. Položaj nadomjesnih električnih struja suvislo je odabran, a njihovi iznosi se određuju na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta (Slike 15.7 i 15.8).

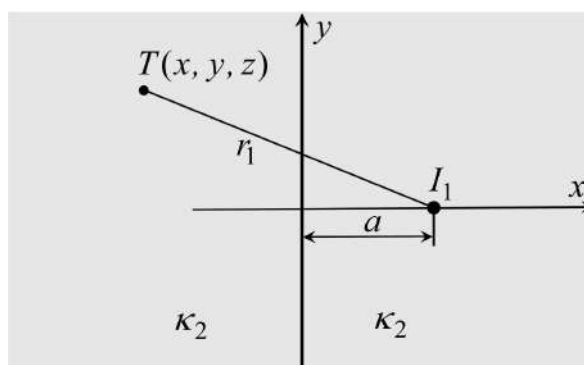
Prema Slici 15.7, skalarni električni potencijal u vodljivom sredstvu 1, koje se proglašava neograničenim, stvaraju stvarna električna struja I i nadomjesna električna struja I_2 , čiji je položaj zrcalan u odnosu na stvarnu električnu struju. Prema Slici 15.8, skalarni električni potencijal u vodljivom sredstvu 2, koje se proglašava neograničenim, stvara električna struja I_1 , koja se nalazi na mjestu stvarne električne struje.



Slika 15.6. Točkasti izvor vremenski konstantne električne struje ispred granice dvaju vodljivih poluprostora



Slika 15.7. Točkasti izvor električne struje i njegova slika kada se skalarni električni potencijal računa u vodljivom sredstvu 1 koje se proglašava neograničenim



Slika 15.8. Nadomjesni točkasti izvor električne struje kada se skalarni električni potencijal računa u vodljivom sredstvu 2 koje se proglašava neograničenim

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u vodljivom sredstvu 1 ($x \geq 0$), prema Slici 15.7, opisana je izrazom:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \left(\frac{I}{r_1} + \frac{I_2}{r_2} \right) \quad (15.31)$$

dok je raspodjela skalarnog električnog potencijala u vodljivom sredstvu 2 ($x \leq 0$), prema Slici 15.8, opisana izrazom:

$$\varphi_2 = \frac{I_1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_2 \cdot r_1} \quad (15.32)$$

gdje je:

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} \quad (15.33)$$

Izrazi (15.31) i (15.32) trebaju zadovoljiti sljedeće granične uvjete:

$$\varphi_1|_{x=0} = \varphi_2|_{x=0} \quad (15.34)$$

$$\kappa_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \kappa_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (15.35)$$

Ako se u granični uvjet (15.34) uvrste izrazi (15.31) i (15.32), uz uvažavanje izraza (15.33), dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{1}{\kappa_1} \cdot (I + I_2) = \frac{1}{\kappa_2} \cdot I_1 \quad (15.36)$$

Ako se u granični uvjet (15.35) uvrste izrazi (15.31) i (15.32), uz uvažavanje izraza (15.33), dobije se sljedeći izraz:

$$I - I_2 = I_1 \quad (15.37)$$

Iz sustava dviju linearnih jednadžbi (15.36) i (15.37), slijedi da je:

$$I_2 = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot I = k_R \cdot I \quad ; \quad k_R = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (15.38)$$

$$I_1 = \frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot I = k_T \cdot I \quad ; \quad k_T = \frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (15.39)$$

gdje je k_R faktor refleksije, dok je k_T faktor transmisije za koje vrijedi da je:

$$k_R + k_T = 1 \quad (15.40)$$

U posebnoj slučaju kada $\kappa_2 \rightarrow 0$, vrijedi da je:

$$\lim_{\kappa_2 \rightarrow 0} k_R = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\kappa_2 \rightarrow 0} I_2 = I \quad (15.41)$$

Prema izrazima (15.31) i (15.38), raspodjela skalarnog električnog potencijala u vodljivom sredstvu 1 ($x \geq 0$) opisana je izrazom:

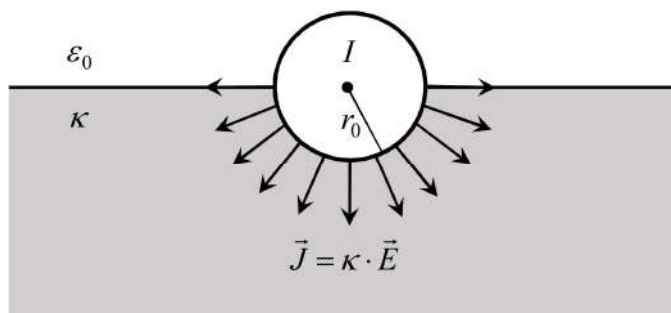
$$\varphi_1 = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{k_R}{r_2} \right) \quad (15.42)$$

dok je, prema izrazima (15.32) i (15.39), raspodjela skalarnog električnog potencijala u vodljivom sredstvu 2 ($x \leq 0$) opisana izrazom:

$$\varphi_2 = \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_2 \cdot r_1} \quad (15.43)$$

15.7. Otpor uzemljenja kugle na površini tla i raspodjela potencijala u zraku

Neka se vodljiva kugla, polumjera r_0 , nalazi na površini LIH tla električne provodnosti κ te neka je jedna polovina kugle ukopana u tlo (Slika 15.9). Neka je kugla načinjena od dobrog vodiča te neka se u odnosu na okolno tlo može smatrati supravodljivom. Neka kugla u okolno tlo, s polovine svoje sfere koja je u izravnom kontaktu s tlom, ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I . Treba dobiti izraz za otpor uzemljenja takve kugle, koji vrijedi za stacionarno strujno polje.



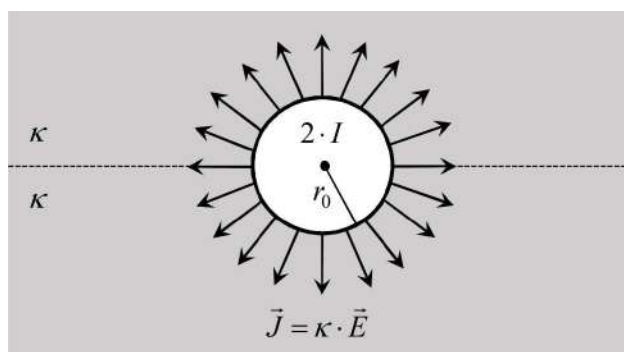
Slika 15.9. Vodljiva kugla na površini LIH tla

Plošna gustoća električne struje po polovini sfere, koja je u izravnom kontaktu s tlom, istog je iznosa kao u slučaju kugle u neograničenom LIH tlu koja ispušta u neograničeno tlo električnu struju jakosti $2 \cdot I$. Granični uvjet na površini tla (izvan kugle) jest zahtjev da električna struja ne izlazi iz tla u zrak, odnosno da je na površini tla:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (15.44)$$

a taj se granični uvjet po metodi odslikavanja zadovoljava tako da se električna struja koju kugla ispušta u tlo odslika u odnosu na površinu tla (Slika 15.10), a rješenje vrijedi samo u donjem poluprostoru u kojem se nalazi tlo. U ovom slučaju faktor refleksije opisan je izrazom:

$$k_R = \frac{\kappa - \kappa_{\text{zraka}}}{\kappa_1 + \kappa_{\text{zraka}}} = 1 \quad ; \quad \kappa_{\text{zraka}} = 0 \quad (15.45)$$



Slika 15.10. Vodljiva kugla i njena slika u odnosu na površinu LIH tla

Prema izrazu (15.26) skalarni električni potencijal kugle je:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_0} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_0} \quad (15.46)$$

pa je otpor uzemljenja vodljive kugle na površini LIH tla:

$$R_{\text{kugle}} = \frac{\varphi_{\text{kugle}}}{I} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_0} \quad (15.47)$$

Iz izraza (15.27) i (15.47), slijedi da je otpor uzemljenja kugle na površini LIH tla dvostruk u odnosu na otpor uzemljenja kugle u neograničenom LIH tlu. Zaključak je fizikalno logičan jer u slučaju kada je kugla na površini tla električnu struju vodi samo polovina neograničenog tla.

Raspodjela skalarlog električnog potencijala u tlu opisana je izrazom:

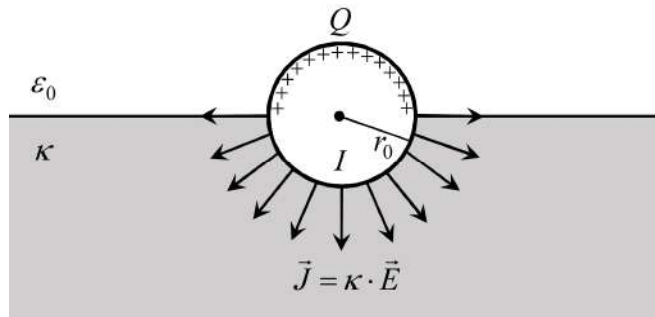
$$\varphi = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} \quad (15.48)$$

gdje je r udaljenost promatrane točke u tlu od središta vodljive kugle. Raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku opisana je izrazom:

$$\varphi = \lim_{\kappa_{\text{zraka}} \rightarrow 0} \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_{\text{zraka}} \cdot r} = \lim_{\kappa_{\text{zraka}} \rightarrow 0} \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_{\text{zraka}} \cdot r} \cdot \frac{2 \cdot \kappa_{\text{zraka}}}{\kappa_{\text{zraka}} + \kappa} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} \quad (15.49)$$

gdje je r udaljenost promatrane točke u zraku od središta vodljive kugle. Iz izraza (15.48) i (15.49) skijedi da je, u ovom posebnom slučaju, raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku i u tlu opisana istom izrazom.

Skalarni električni potencijal mora biti kontinuiran u cijelom prostoru, a skalarni električni potencijal u zraku stvara nepokretni električni naboj koji se nalazi na granici vodiča (vodljive kugle ili tla) i dielektrika (zraka). U općem slučaju, elektrostatičko polje u zraku definirano je skalarnim električnim potencijalom na granici zraka i tla, koji stvara stacionarno strujno polje u tlu. U ovom posebnom slučaju, zbog centralne simetrije vodljive kugle, kontinuitet skalarnog električnog potencijala može osigurati električni naboj Q koji se nalazi na granici između vodljive kugle i zraka (Slika 15.11). Na granici između tla i zraka nema nepokretnog električnog naboja jer je, prema izrazima (15.48) i (15.50), normalna komponenta jakosti električnog polja na površini tla u oba sredstva jednaka nuli.

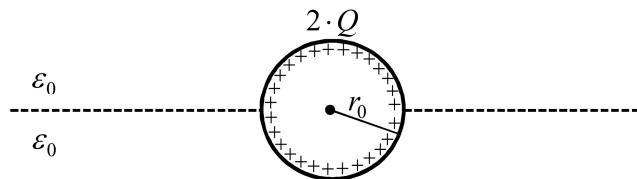


Slika 15.11. Nepokretni električni naboj na granici vodljive kugle i zraka

Da bi se osigurao kontinuitet skalarnog električnog potencijala, onda raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku mora biti opisana sljedećim izrazom (Slika 15.12):

$$\varphi = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \equiv \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} \quad ; \quad \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{I}{\kappa} \quad (15.50)$$

gdje je r udaljenost promatrane točke u zraku od središta vodljive kugle.



Slika 15.12. Stvarni i odslikani električni naboj kada se raspodjela skalarnog električnog potencijala računa u zraku

Izraz (15.50) može se dobiti i iz Gaussovog zakona, uz uvažavanje centralne simetrije električnog polja u cjelokupnom prostoru (Slika 15.13). U ovom slučaju Gaussov zakon glasi:

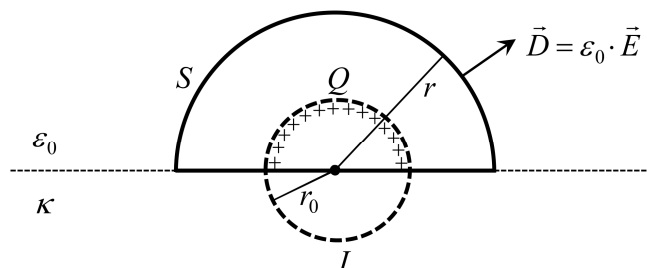
$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \cdot E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 = Q \quad (15.51)$$

odakle slijedi da je vektor jakosti električnog polja u zraku u sfernom koordinatnom sustavu opisan izrazom:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (15.52)$$

pa je raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku opisana izrazom:

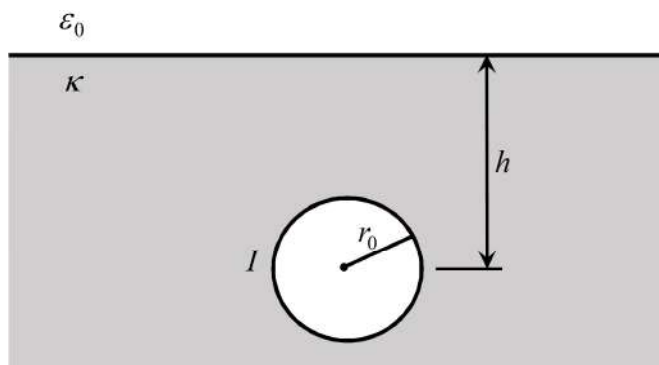
$$\varphi = \int_r^\infty E \cdot dr = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r} \quad (15.53)$$



Slika 15.13. Nepokretni električni naboj i integracijska ploha S zatvorena oko gornje polukugle koja se nalazi u zraku

15.8. Otpor uzemljenja kugle ukopane u tlo i raspodjela potencijala u zraku

Neka je vodljiva kugla, polumjera r_0 , ukopana u LIH tlo električne provodnosti κ na dubini h ispod površina tla (Slika 15.14). Neka je kugla načinjena od dobrog vodiča te neka se u odnosu na okolno tlo može smatrati supravodljivom. Neka kugla, sa svoje sfere, u okolno tlo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I te neka je $r_0 \ll h$. Neka je vodič koji dovodi električnu struju ukopanoj kugli izoliran od tla, što znači da se dovođenje električne struje ne razmatra. Treba izračunati otpor uzemljenja takve kugle, koji vrijedi za stacionarno strujno polje.



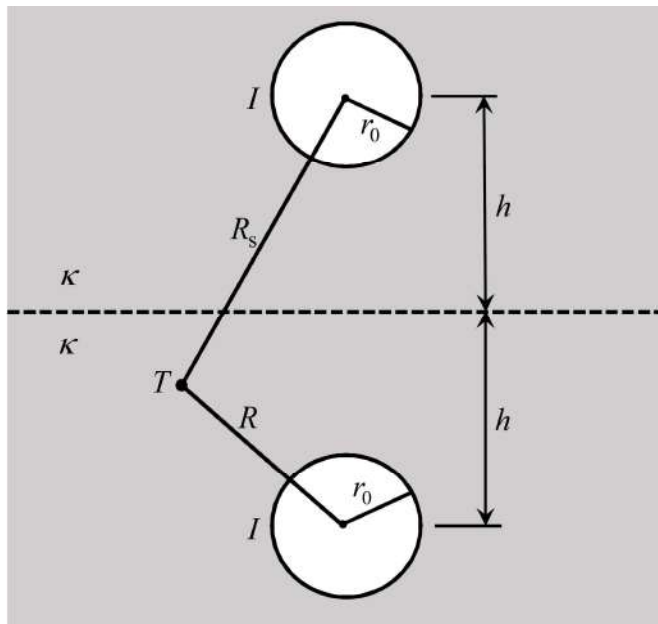
Slika 15.14. Vodljiva kugla ukopana u LIH tlo

Granični uvjet na površini tla jest zahtjev da električna struja ne izlazi iz tla u zrak, što je opisano izrazom (15.44). Taj se granični uvjet po metodi odslikavanja zadovoljava tako da se električna struja koju kugla ispušta u tlo odslika u odnosu na površinu tla (Slika 15.15), a dobiveno rješenje vrijedi samo u donjem poluprostoru u kojem se nalazi tlo. U ovom slučaju faktor refleksije jednak je jedinici.

Dakle, po metodi odslikavanja, kuglu u LIH tlu električne provodnosti κ nadomještaju dvije kugle u neograničenom vodljivom LIH sredstvu električne provodnosti κ . Ako se uvaži pretpostavka da je $r_0 \ll h$, onda je raspodjela skalarnog električnog potencijala u tlu opisana izrazom:

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_s} \right) \quad (15.54)$$

gdje je R udaljenost točke promatranja u tlu od središta stvarne kugle (izvora električne struje), dok je R_s udaljenost točke promatranja od odslikane kugle.



Slika 15.15. Vodljiva kugla i njena slika u odnosu na površinu tla

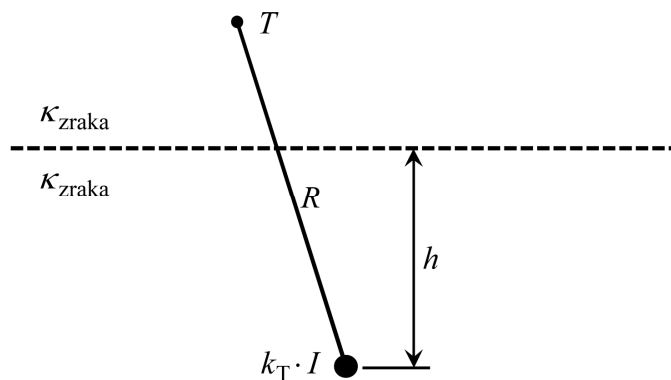
Skalarani električni potencijal kugle opisan je sljedećim izrazom:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2 \cdot h} \right) \quad (15.55)$$

što znači da se doprinos električne struje odslikane kugle skalarnom električnom potencijalu stvarne kugle aproksimira doprinosom električne struje odslikane kugle skalarnom električnom potencijalu u središtu stvarne kugle.

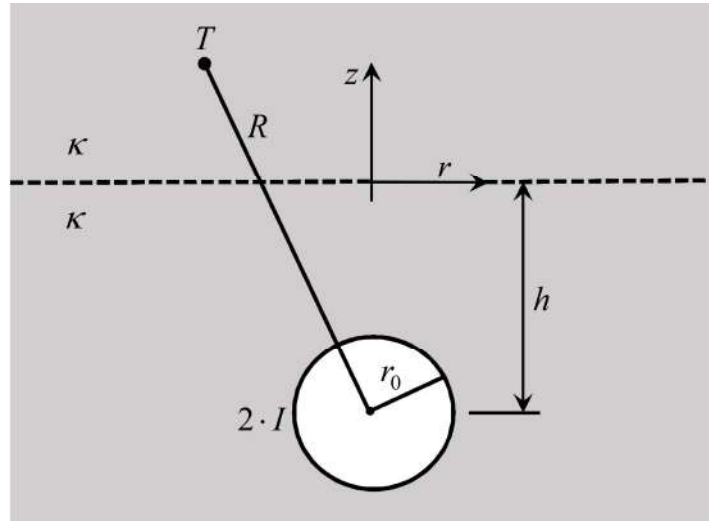
Raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku opisana je izrazom (Slika 15.16):

$$\varphi = \lim_{\kappa_{\text{zraka}} \rightarrow 0} \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_{\text{zraka}} \cdot R} = \lim_{\kappa_{\text{zraka}} \rightarrow 0} \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_{\text{zraka}} \cdot R} \cdot \frac{2 \cdot \kappa_{\text{zraka}}}{\kappa_{\text{zraka}} + \kappa} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R} \quad (15.56)$$



Slika 15.16. Nadomjesni točkasti izvor električne struje koji stvara skalarni električni potencijal u zraku

Dakle, raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku može se izračunati tako da se uzme da je cijeli prostor ispunjen tлом električne provodnosti κ , a na mjestu stvarne kugle nalazi se kugla koja u neograničeno tlo ispušta električnu struju jakosti $2 \cdot I$ (Slika 15.17).



Slika 15.17. Nadomjesni izvor električne struje ako se skalarni električni potencijal računa u zraku

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na površini tla slijedi iz graničnog uvjeta:

$$\sigma = D_{z,zraka} \Big|_{z=0} - D_{z,tla} \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 \cdot E_{z,zraka} \Big|_{z=0} \quad ; \quad D_{z,tla} \Big|_{z=0} = 0 \quad (15.57)$$

Iz izraza (15.56) lako se dobije da je osnosimetrična jakost električnog polja u zraku, u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) prikazanom na Slici 15.17, opisana izrazom:

$$\vec{E}_{zraka} = \frac{I \cdot [r \cdot \vec{e}_r + (z+h) \cdot \vec{e}_z]}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R^3} \quad (15.58)$$

gdje je, prema Slici 15.17:

$$R = \sqrt{r^2 + (z+h)^2} \quad (15.59)$$

Iz izraza (15.58) i (15.59) slijedi da je z-komponenta jakosti električnog polja u zraku opisana izrazom:

$$E_{z,zraka} = \frac{I \cdot (z+h)}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R^3} = \frac{I \cdot (z+h)}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot [r^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \quad (15.60)$$

Ako se izraz (15.60) uvrsti u izraz (15.57), dobije se konačni izraz za plošnu gustoću nepokretnog električnog naboja na površini tla:

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_{z,zraka} \Big|_{z=0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot I \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \sqrt{(r^2 + h^2)^3}} \quad (15.61)$$

Ako se plošna gustoća električnog naboja integrira po površini tla, dobije se da je iznos nepokretnog električnog naboja na granici tla i zraka:

$$Q = \int_0^{\infty} \sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{\varepsilon_0 \cdot I \cdot h}{\kappa} \cdot \int_0^{\infty} \frac{r \cdot dr}{\sqrt{(r^2 + h^2)}^3} = \frac{\varepsilon_0 \cdot I}{\kappa} \quad (15.62)$$

odakle slijedi da je:

$$Q = \frac{\varepsilon_0 \cdot I}{\kappa} \quad (15.63)$$

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku, duž osi z , opisana je integralom:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sigma \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (15.64)$$

Ako se izraz (15.61) uvrsti u izraz (15.64), dobije se da je:

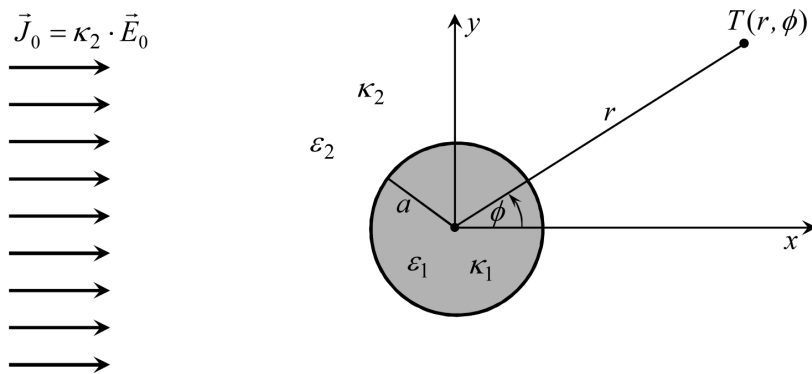
$$\varphi(z) = \frac{I \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int_0^{\infty} \frac{r \cdot dr}{\sqrt{(r^2 + h^2)}^3 \cdot \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot (z + h)} \quad (15.65)$$

što se može dobiti i iz izraza (15.56), uz supstituciju:

$$R = z + h \quad (15.66)$$

15.9. Cilindrični vodič u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka se beskonačno dugi vodljivi cilindar (LIH sredstvo 1), polumjera a , nalazi u stacionarnom strujnom polju koje je daleko od cilindra homogeno, dok je oko cilindra neograničeno vodljivo LIH sredstvo (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je cilindrični koordinatni sustav s ishodištem na osi vodljivog cilindra (Slika 15.18).



Slika 15.18. Vodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka su zadane dielektričnosti i električne provodnosti obaju vodljivih sredstava. Neka kroz oba sredstva, okomito na vodljivi cilindar, teče vremenski konstantna električna struja takva da je daleko od cilindra stacionarno strujno polje homogeno. Rubni uvjet na velikim udaljenostima od cilindra jest to da nema deformacije polja, tj. da ono ostaje homogeno. Tom zahtjevu treba prilagoditi opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe u sredstvu 2, koje prema izrazu (14.183) glasi:

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot [C_n \cdot \sin(n \cdot \phi) + D_n \cdot \cos(n \cdot \phi)] \quad (15.67)$$

Raspodjela skalarnog električnog potencijala jest osnosimetrična s obzirom na os x , odnosno to je parna funkcija s obzirom na kut ϕ . Stoga je:

$$C_n = 0 \quad ; \quad \forall n \quad (15.68)$$

pa opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednačbe (15.67) poprima novi oblik:

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \quad (15.69)$$

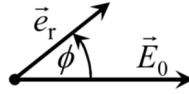
Daljnji postupak izvođenja izraza za raspodjelu skalarnog električnog potencijala sličan je postupku izvođenja izraza za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u slučaju dielektrične kugle u homogenom električnom polju.

Iz općeg rješenja Laplaceove diferencijalne jednačbe (15.69), slijedi da je polazni izraz za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2:

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \quad (15.70)$$

Dovoljno je u beskonačnosti prilagoditi radijalnu komponentu jakosti električnog polja, što je, prema Slici 15.19, opisano sljedećim izrazom:

$$E_0 \cdot \cos \phi = - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} \quad (15.71)$$



Slika 15.19. Radijalna komponenta jakosti električnog polja daleko od cilindra

Ako se izraz (15.70) uvrsti u izraz (15.71), dobije se da je:

$$E_0 \cdot \cos \phi = - \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot n \cdot r^{n-1} - B_n \cdot \frac{n}{r^{n+1}} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \right\}_{r \rightarrow \infty} \quad (15.72)$$

Iz izraza (15.72) slijedi da je $n = 1$, što znači da su svi koeficijenti A_n i B_n jednaki nuli, osim koeficijenata A_1 i B_1 , pa se iz izraza (15.72) dobije da je:

$$E_0 \cdot \cos \phi = - \left(A_1 - B_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right)_{r \rightarrow \infty} \cdot \cos \phi = - A_1 \cdot \cos \phi \quad (15.73)$$

što znači da je:

$$A_1 = - E_0 \quad (15.74)$$

dok je koeficijent B_1 zasad nepoznat, a izraz uz B_1 teži nuli ako r teži u beskonačnost.

Dakle, raspodjela skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2 opisana je izrazom:

$$\varphi_2 = \left(- E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \cos \phi \quad (15.75)$$

pa, radi zadovoljenje graničnih uvjeta između dvaju sredstava, skalarni električni potencijal unutar vodljivog cilindra mora biti opisan izrazom:

$$\varphi_1 = \left(C_1 \cdot r + D_1 \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \cos \phi \quad (15.76)$$

Iz uvjeta da skalarni električni potencijal φ_1 na osi vodljivog cilindra mora biti konačan, slijedi da je koeficijent:

$$D_1 = 0 \quad (15.77)$$

pa je:

$$\varphi_1 = C_1 \cdot r \cdot \cos \phi \quad (15.78)$$

Dakle, raspodjela skalarnog električnog potencijala u oba sredstva opisana je izrazima (15.75) i (15.78), gdje su nepoznata dva koeficijenta, a oni se mogu odrediti na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad (15.79)$$

$$-\kappa_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\kappa_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (15.80)$$

što daje sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$B_1 - a^2 \cdot C_1 = E_0 \cdot a^2 \quad ; \quad B_1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cdot a^2 \cdot C_1 = -E_0 \cdot a^2 \quad (15.81)$$

odakle se lako dobije da je:

$$B_1 = E_0 \cdot a^2 \cdot \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad ; \quad C_1 = -E_0 \cdot \frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (15.82)$$

Nakon zadovoljenja svih graničnih uvjeta, prema izrazima (15.75), (15.78) i (15.82), raspodjela potencijala u oba sredstva opisana je izrazima:

$$\varphi_1 = -\frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \phi = -\frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot x \quad ; \quad r \leq a \quad (15.83)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \cos \phi + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \phi \quad ; \quad r \geq a \quad (15.84)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli na ravnini koja prolazi kroz središte cilindra za koju je $\phi = \pm \pi/2$, a to je ravnina $x = 0$.

Iz izraza (15.83) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 1, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_1 = E_{1r} \cdot \vec{e}_r + E_{1\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (15.85)$$

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot \cos \phi \quad (15.86)$$

$$E_{1\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} = -\frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot \sin \phi \quad (15.87)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{E}_1 = E_{1x} \cdot \vec{i} = \frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot \vec{i} \quad (15.88)$$

odakle slijedi da je, prema očekivanju, jakost električnog polja u cilindru promijenila iznos, ali je električno polje i dalje ostalo homogeno.

Iz izraza (15.84) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (15.89)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \phi \cdot \left(1 + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \quad (15.90)$$

$$E_{2\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} = -E_0 \cdot \sin \phi \cdot \left(1 - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \quad (15.91)$$

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na granici dvaju sredstava slijedi iz izraza:

$$D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot E_{2r}|_{r=a} - \varepsilon_1 \cdot E_{1r}|_{r=a} = \sigma \quad (15.92)$$

gdje su ε_1 i ε_2 dielektričnosti vodljivih sredstava (Slika 15.18).

Iz izraza (15.86), (15.90) i (15.92), slijedi da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja opisana izrazom:

$$\sigma = \left(\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} - \varepsilon_1 \cdot \frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right) \cdot E_0 \cdot \cos \phi \quad (15.93)$$

odakle slijedi da je:

$$\sigma = \frac{\kappa_1 \cdot \varepsilon_2 - \kappa_2 \cdot \varepsilon_1}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot 2 \cdot E_0 \cdot \cos \phi \quad (15.94)$$

Definicija: Neka su električne strujnice linije duž kojih teče električna struja u vodljivom sredstvu. One su analogne električnim silnicama u dielektriku. Jakost električnog polja je tangencijalna u odnosu na električne strujnice kao i na električne silnice.

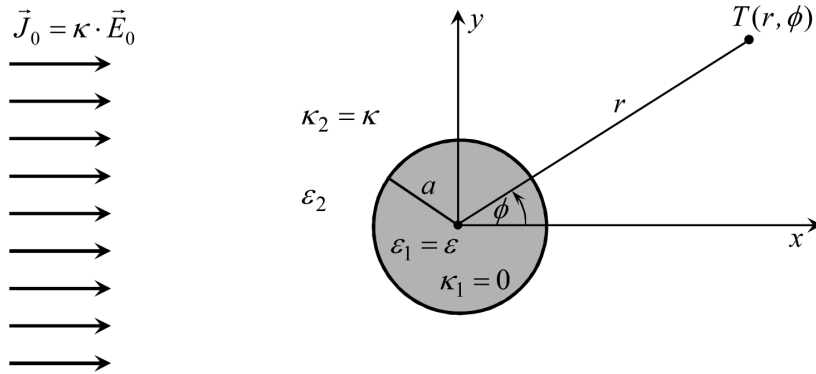
Ako je $\kappa_1 > \kappa_2$, onda električne strujnice imaju isti grafički izgled kao i električne silnice prikazane na Slici 14.36. Ako je $\kappa_1 < \kappa_2$, onda električne strujnice imaju isti grafički izgled kao i električne silnice prikazane na Slici 14.37.

Napomena: Iz analogije elektrostatičkog i stacionarnog strujnog polja, slijedi da je, uz istu geometriju problema, raspodjela skalarnog električnog potencijala u slučaju dielektričnog cilindra, okruženog savršenim LIH dielektrikom, koji se nalazi u homogenom električnom polju, opisana izrazima koji se mogu dobiti iz izraza (15.83) i (15.84), uz supstitucije:

$$\kappa_1 \rightarrow \varepsilon_1 \quad ; \quad \kappa_2 \rightarrow \varepsilon_2 \quad (15.95)$$

15.10. Cilindrični dielektrik u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka se beskonačno dugi dielektrični cilindar (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom stacionarnom strujnom polju, dok je oko cilindra neograničeno vodljivo LIH sredstvo (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je cilindrični koordinatni sustav s ishodištem na osi vodljivog cilindra (Slika 15.20).



Slika 15.20. Dielektrični cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju

Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva mogu se dobiti na dva načina:

- Na isti način kao i za vodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju (potpoglavlje 15.8) do izraza (15.78) i (15.75) koji glase:

$$\varphi_1 = C_1 \cdot r \cdot \cos \phi \quad (15.96)$$

$$\varphi_2 = \left(-E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \cos \phi \quad (15.97)$$

a nakon toga se nepoznate se konstanta B_1 i C_1 određuju iz graničnih uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad (15.98)$$

$$-\kappa_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\kappa_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (15.99)$$

gdje granični uvjet (15.99) znači da strujno polje ne ulazi u cilindrični dielektrik, odnosno električne strujnice zaobilaze dielektrik.

- Koristeći rješenja za raspodjelu skalarnog električnog potencijala (15.83) i (15.84), koja vrijede za vodljivi cilindar (sredstvo 1) u homogenom stacionarnom strujnom polju, uz supstitucije:

$$\kappa_2 \rightarrow \kappa \quad ; \quad \kappa_1 \rightarrow 0 \quad (15.100)$$

Na jedan od dva opisana načina, lako se dobiju izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva, koji glase:

$$\varphi_1 = -2 \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \phi = -2 \cdot E_0 \cdot x \quad ; \quad r \leq a \quad (15.101)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot \cos \phi = -E_0 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad ; \quad r \geq a \quad (15.102)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli na ravnini koja prolazi kroz središte cilindra za koju je $\phi = \pm \pi/2$, a to je ravnina $x = 0$.

Prema izrazima (15.101) i (15.102), raspodjela skalarnog električnog potencijala u dielektričnom cilindru kao i u okolnom vodljivom sredstvu ne ovisi o značajkama ovih dvaju sredstava. Fizikalno je važno samo to da je sredstvo 1 savršeni LIH dielektrik, a sredstvo 2 vodljivo LIH sredstvo.

Iz izraza (15.101) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 1, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_1 = E_{1r} \cdot \vec{e}_r + E_{1\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (15.103)$$

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 2 \cdot E_0 \cdot \cos \phi \quad (15.104)$$

$$E_{1\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} = -2 \cdot E_0 \cdot \sin \phi \quad (15.105)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{E}_1 = E_{1x} \cdot \vec{i} = 2 \cdot E_0 \cdot \vec{i} \quad (15.106)$$

odakle slijedi da je jakost električnog polja u cilindru udvostručila iznos, ali je električno polje i dalje ostalo homogeno.

Iz izraza (15.102) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (15.107)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \phi \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (15.108)$$

$$E_{2\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} = -E_0 \cdot \sin \phi \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (15.109)$$

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na granici dvaju sredstava slijedi iz izraza:

$$D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = -\varepsilon_1 \cdot E_{1r}|_{r=a} = -\varepsilon \cdot E_{1r}|_{r=a} = \sigma \quad (15.110)$$

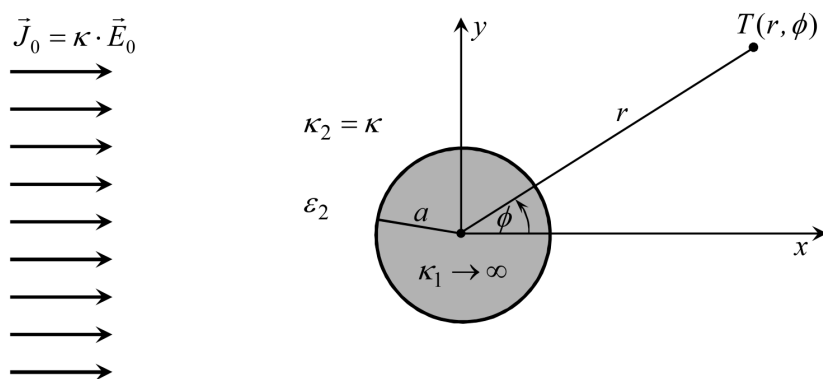
Iz izraza (15.104) i (15.110), slijedi da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja opisana izrazom:

$$\sigma = -2 \cdot \varepsilon \cdot E_0 \cdot \cos \phi \quad (15.111)$$

što znači da je na lijevoj strani cilindra plošni naboj pozitivan, a na desnoj strani cilindra negativan. Taj plošni naboj stvara električno polje u dielektričnom cilindru.

15.11. Supravodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka se beskonačno dugi supravodljivi cilindar (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom stacionarnom strujnom polju, dok je oko cilindra neograničeno vodljivo LIH sredstvo (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je cilindrični koordinatni sustav s ishodištem na osi vodljivog cilindra (Slika 15.21).



Slika 15.21. Supravodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju

Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva mogu se dobiti na dva načina:

- Na isti način kao i za vodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju (potpoglavlje 15.8) do izraza (15.75) koji glasi:

$$\varphi_2 = \left(-E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \cos \phi \quad (15.112)$$

a nakon toga se nepoznata konstanta B_1 određuje iz graničnog uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} = 0 \quad (15.113)$$

jer je u supravodiču:

$$\varphi_1 = \text{konst.} = 0 \quad ; \quad \vec{E}_1 = 0 \quad (15.114)$$

gdje je u ovom posebnom slučaju konstanti skalarni električni potencijal supravodiča jednak nuli.

- Koristeći rješenja za raspodjelu skalarnog električnog potencijala (15.83) i (15.84), koja vrijede za vodljivi cilindar (sredstvo 1) u homogenom stacionarnom strujnom polju, uz supstitucije:

$$\kappa_2 \rightarrow \kappa \quad ; \quad \kappa_1 \rightarrow \infty \quad (15.115)$$

Na jedan od dva opisana načina, lako se dobiju izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva, koji glase:

$$\varphi_1 = 0 \quad ; \quad r \leq a \quad (15.116)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot \cos \phi = -E_0 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad ; \quad r \geq a \quad (15.117)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli na ravnini koja prolazi kroz središte cilindra za koju je $\phi = \pm \pi/2$, a to je ravnina $x = 0$.

Prema izrazima (15.115) i (15.116), raspodjela skalarnog električnog potencijala u supravodljivom cilindru kao i u okolnom vodljivom sredstvu ne ovisi o značajkama ovih dvaju sredstava. Fizikalno je važno samo to da je sredstvo 1 supravodič, a sredstvo 2 vodljivo LIH sredstvo.

Iz izraza (15.116) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (15.118)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \phi \cdot \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (15.119)$$

$$E_{2\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} = -E_0 \cdot \sin \phi \cdot \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (15.120)$$

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na granici dvaju sredstava slijedi iz izraza:

$$D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = D_{2r}|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot E_{2r}|_{r=a} = \sigma \quad (15.121)$$

Iz izraza (15.119) i (15.121), slijedi da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja opisana izrazom:

$$\sigma = 2 \cdot \varepsilon_2 \cdot E_0 \cdot \cos \phi \quad (15.122)$$

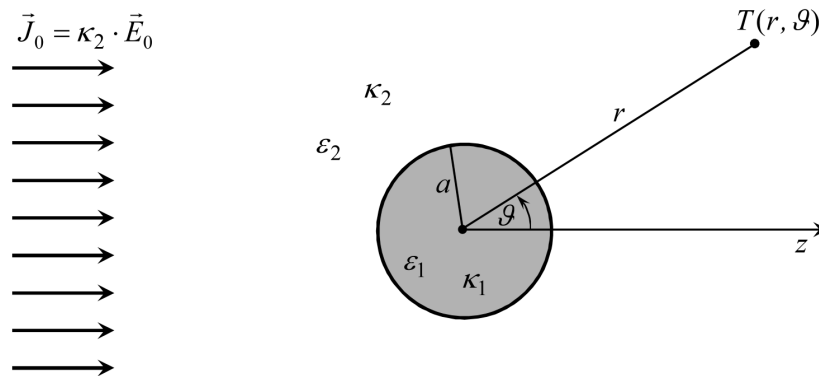
što znači da je na lijevoj strani cilindra plošni naboj negativan, a na desnoj strani cilindra pozitivan.

Postoji analogija između supravodljivog cilindra u vodljivom sredstvu i vodljivog cilindra u dielektričnom sredstvu. U tim slučajevima, električne strujnice i električne silnice, kao i ekvipotencijalne linije, imaju isti grafički izgled kao električne silnice i ekvipotencijalne linije u slučaju vodljive kugle u dielektričnom sredstvu, koje su prikazane na Slici 14.40.

15.12. Vodljiva kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka se vodljiva kugla (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom stacionarnom strujnom polju, dok je oko kugle neograničeno vodljivo LIH sredstvo (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je sferni koordinatni sustav s ishodištem u središtu vodljive kugle (Slika 15.22).

Postoji analogija između vodljive kugle u stacionarnom strujnom polju i dielektrične kugle u homogenom elektrostatičkom polju. Samo treba dielektričnost pojedinog sredstva preinačiti u električnu provodnost sredstva.



Slika 15.22. Vodljiva kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju

Polazi se od općeg rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe u sfernom koordinatnom sustavu (14.203) i potom treba zadovoljiti sve granične uvjete. Prema analognim izrazima (14.217) i (14.218), raspodjela skalarnog električnog potencijala u oba sredstva opisana je izrazima:

$$\varphi_1 = -\frac{3 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta = -\frac{3 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot E_0 \cdot z \quad ; \quad r \leq a \quad (15.123)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq a \quad (15.124)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli u središtu kugle, odnosno na ravnini koja prolazi kroz središte kugle za koju je $\vartheta = \pi/2$, a to je ravnina $z = 0$.

Iz izraza (15.123) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 1, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_1 = E_{1r} \cdot \vec{e}_r + E_{1\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (15.125)$$

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{3 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (15.126)$$

$$E_{1\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot E_0 \cdot \sin \vartheta \quad (15.127)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{E}_1 = E_{1z} \cdot \vec{k} = \frac{3 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot E_0 \cdot \vec{k} \quad (15.128)$$

Iz izraza (15.124) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (15.129)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \vartheta \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right) \quad (15.130)$$

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = -E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right) \quad (15.131)$$

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na granici dvaju sredstava slijedi iz izraza:

$$D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot E_{2r}|_{r=a} - \varepsilon_1 \cdot E_{1r}|_{r=a} = \sigma \quad (15.132)$$

gdje su ε_1 i ε_2 dielektričnosti vodljivih sredstava (Slika 15.12).

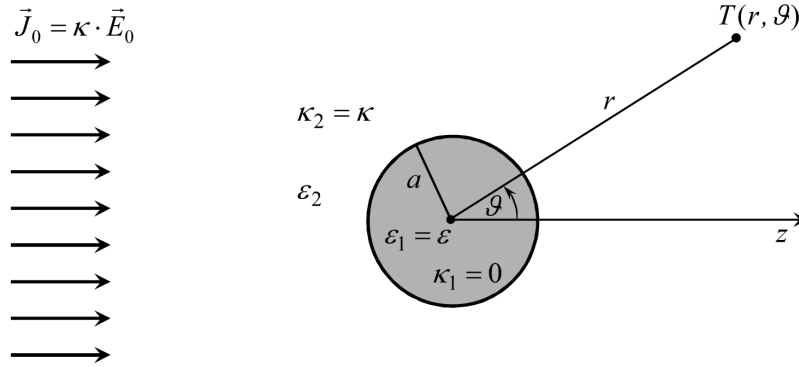
Iz izraza (15.126), (15.130) i (15.132), slijedi da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja opisana izrazom:

$$\sigma = \left(\varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} - \varepsilon_1 \cdot \frac{3 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \right) \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (15.133)$$

odakle slijedi da je:

$$\sigma = \frac{\kappa_1 \cdot \varepsilon_2 - \kappa_2 \cdot \varepsilon_1}{\kappa_1 + 2 \cdot \kappa_2} \cdot 3 \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (15.134)$$

15.13. Dielektrična kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju



Slika 15.23. Dielektrična kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka se dielektrična kugla (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom stacionarnom strujnom polju, dok je oko kugle neograničeno vodljivo LIH sredstvo (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je sferni koordinatni sustav s ishodištem u središtu dielektrične kugle (Slika 15.23).

Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva mogu se dobiti na dva načina:

- Na isti način kao i za dielektričnu kuglu u homogenom elektrostatickom polju (potpoglavlje 14.18) do izraza (14.212) i (14.209) koji glase:

$$\varphi_1 = C_1 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad (15.135)$$

$$\varphi_2 = \left(-E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \cos \vartheta \quad (15.136)$$

a nakon toga se nepoznate konstante B_1 i C_1 određuju iz graničnih uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} \quad (15.137)$$

$$-\kappa_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\kappa \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (15.138)$$

gdje granični uvjet (15.138) znači da strujno polje ne ulazi u dielektričnu kuglu, odnosno električne strujnice zaobilaze dielektrik.

- Koristeći rješenja za raspodjelu skalarnog električnog potencijala (15.123) i (15.124), koja vrijede za vodljivu kuglu (sredstvo 1) u homogenom stacionarnom strujnom polju, uz supstitucije:

$$\kappa_2 \rightarrow \kappa \quad ; \quad \kappa_1 \rightarrow 0 \quad (15.139)$$

Na jedan od dva opisana načina, lako se dobiju izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva, koji glase:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{2} \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta = -\frac{3}{2} \cdot E_0 \cdot z \quad ; \quad r \leq a \quad (15.140)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot \left(1 + \frac{a^3}{2 \cdot r^3} \right) \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq a \quad (15.141)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli na ravnini koja prolazi kroz središte kugle za koju je $\vartheta = \pi/2$, a to je ravnina $z = 0$.

Prema izrazima (15.140) i (15.141), raspodjela skalarnog električnog potencijala u dielektričnoj kugli kao i u okolnom vodljivom sredstvu ne ovisi o značajkama ovih dvaju sredstava. Fizikalno je važno samo to da je sredstvo 1 savršeni LIH dielektrik, a sredstvo 2 vodljivo LIH sredstvo.

Iz izraza (15.140) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 1, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_1 = E_{1r} \cdot \vec{e}_r + E_{1\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (15.142)$$

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{3}{2} \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (15.143)$$

$$E_{1\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{2} \cdot E_0 \cdot \sin \vartheta \quad (15.144)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{E}_1 = E_{1z} \cdot \vec{k} = \frac{3}{2} \cdot E_0 \cdot \vec{k} \quad (15.145)$$

odakle slijedi da je jakost električnog polja u kugli povećala iznos, ali je električno polje i dalje ostalo homogeno.

Iz izraza (15.141) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (15.146)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \vartheta \cdot \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \quad (15.147)$$

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = -E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 + \frac{a^3}{2 \cdot r^3}\right) \quad (15.148)$$

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na granici dvaju sredstava slijedi iz izraza:

$$D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = -\varepsilon_1 \cdot E_{1r}|_{r=a} = -\varepsilon \cdot E_{1r}|_{r=a} = \sigma \quad (15.149)$$

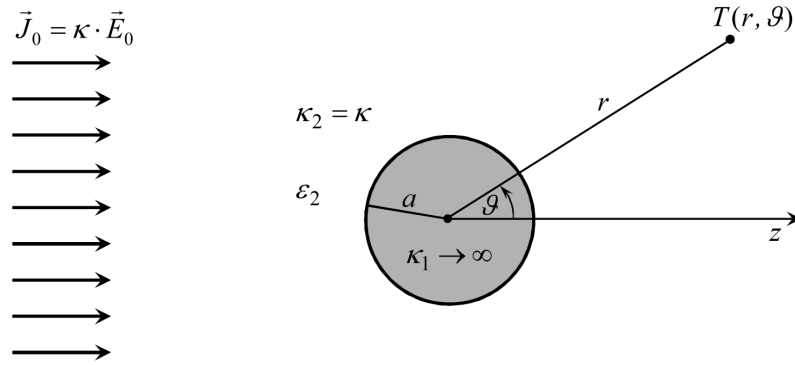
Iz izraza (15.143) i (15.149), slijedi da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja opisana izrazom:

$$\sigma = -\frac{3}{2} \cdot \varepsilon \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (15.150)$$

što znači da je na lijevoj strani kugle plošni naboj pozitivan, a na desnoj strani kugle negativan. Taj plošni naboj stvara električno polje u dielektričnoj kugli.

15.14. Supravodljiva kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju

Neka se supravodljiva kugla (sredstvo 1), polumjera a , nalazi u homogenom stacionarnom strujnom polju, dok je oko cilindra neograničeno vodljivo LIH sredstvo (sredstvo 2). Za rješenje ovog problema prikladan je sferni koordinatni sustav s ishodištem u središtu supravodljive kugle (Slika 15.24).



Slika 15.24. Supravodljiva kugla u homogenom stacionarnom strujnom polju

Izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva mogu se dobiti na dva načina:

- Na isti način kao i za dielektričnu kuglu u homogenom elektrostatičkom polju (potpoglavlje 14.18) do izraza (14.209) koji glasi:

$$\varphi_2 = \left(-E_0 \cdot r + B_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \cos \vartheta \quad (15.151)$$

a nakon toga se nepoznata konstanta B_1 može odrediti iz graničnog uvjeta:

$$\varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a} = 0 \quad (15.152)$$

jer je u supravodiču:

$$\varphi_1 = \text{konst.} = 0 \quad ; \quad \vec{E}_1 = 0 \quad (15.153)$$

gdje je u ovom posebnom slučaju konstanti skalarni električni potencijal supravodiča jednak nuli.

- Koristeći rješenja za raspodjelu skalarnog električnog potencijala (15.123) i (15.124), koja vrijede za vodljivu kuglu (sredstvo 1) u homogenom stacionarnom strujnom polju, uz supstitucije:

$$\kappa_2 \rightarrow \kappa \quad ; \quad \kappa_1 \rightarrow \infty \quad (15.154)$$

Na jedan od dva opisana načina, lako se dobiju izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u oba sredstva, koji glase:

$$\varphi_1 = 0 \quad ; \quad r \leq a \quad (15.155)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta + \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq a \quad (15.156)$$

iz kojih slijedi da je skalarni električni potencijal jednak nuli na ravnini koja prolazi kroz središte kugle za koju je $\vartheta = \pi/2$, a to je ravnina $z = 0$.

Prema izrazima (15.155) i (15.156), raspodjela skalarnog električnog potencijala u supravodljivoj kugli kao i u okolnom vodljivom sredstvu ne ovisi o značajkama ovih dvaju sredstava. Fizikalno je važno samo to da je sredstvo 1 supravodič, a sredstvo 2 vodljivo LIH sredstvo.

Iz izraza (15.156) koji opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti električnog polja u sredstvu 2, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \cdot \vec{e}_r + E_{2\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (15.157)$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = E_0 \cdot \cos \vartheta \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a^3}{r^3}\right) \quad (15.158)$$

$$E_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vartheta} = -E_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \quad (15.159)$$

Plošna gustoća nepokretnog električnog naboja na granici dvaju sredstava slijedi iz izraza:

$$D_{2r}|_{r=a} - D_{1r}|_{r=a} = D_{2r}|_{r=a} = \varepsilon_2 \cdot E_{2r}|_{r=a} = \sigma \quad (15.160)$$

Iz izraza (15.158) i (15.160), slijedi da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja opisana izrazom:

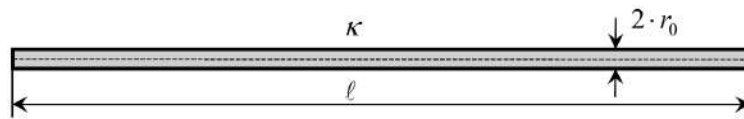
$$\sigma = 3 \cdot \varepsilon_2 \cdot E_0 \cdot \cos \vartheta \quad (15.161)$$

što znači da je na lijevoj strani kugle plošni naboj negativan, a na desnoj strani kugle pozitivan.

Postoji analogija između supravodljive kugle u vodljivom sredstvu i vodljive kugle u dielektričnom sredstvu. U tim slučajevima, električne strujnice i električne silnice, kao i ekvipotencijalne linije, imaju isti grafički izgled kao na Slici 14.40.

15.15. Tankožičani vodič u vodljivom sredstvu i metoda srednjeg potencijala

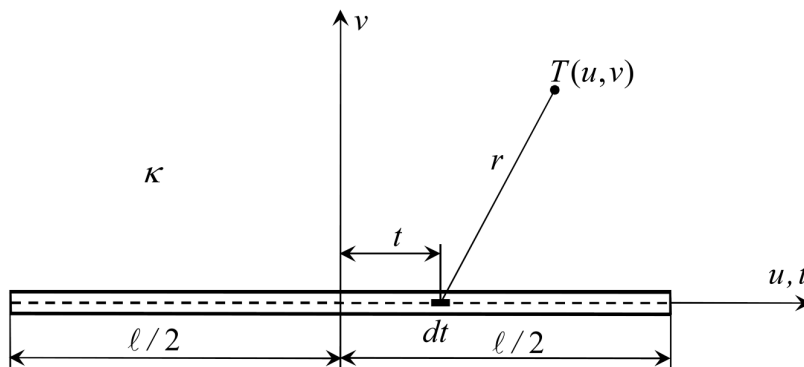
Neka pravocrtni odsječak (segment) cilindričnog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , u okolno vodljivo sredstvo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I (Slika 15.25). Neka je plošna gustoća električne struje konstantna po plaštu odsječka vodiča. Neka se odsječak vodiča nalazi u neograničenom vodljivom LIH sredstvu električne provodnosti κ .



Slika 15.25. Pravocrtni odsječak cilindričnog vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu

Ako je $r_0 \ll \ell$, može se koristiti tankožičana aproksimacija po kojoj se pretpostavlja da električna struja izvire iz osi odsječka vodiča, a traži se raspodjela skalarnog električnog potencijala u točkama izvan odsječka vodiča, uključujući površinu odsječka vodiča. Potencijal unutar odsječka vodiča jednak je potencijalu na njegovoj površini. Budući da u numeričkom modelu vremenski konstantna električna struja jakosti I izvire iz osi odsječka vodiča, ona se opisuje linijskom gustoćom električne struje:

$$\tau = \frac{I}{\ell} = \text{konst.} \quad (15.162)$$



Slika 15.26. Odsječak cilindričnog vodiča u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v)

Radi jednostavnosti, odsječak se zadaje u lokalnom 2D koordinatnom sustavu (u, v) , u kojem leže os odsječka vodiča i točka promatranja $T(u, v)$. Položaj odsječka u (x, y, z) sustavu je proizvoljan. Prema Slici 15.26, točka $T(u, v)$ u kojoj se računa skalarni električni potencijal može biti u prvom ili u drugom kvadrantu lokalnog koordinatnog sustava (u, v) .

Postoji analogija između odsječka cilindričnog vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu koji u okolno vodljivo sredstvo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I i odsječka cilindričnog vodiča u neograničenom savršenom LIH dielektriku koji je naelektriziran nabojem Q . Budući da je analogni elektrostatički problem detaljno opisan u potpoglavlju 14.24, u ovom je potpoglavlju odsječak cilindričnog vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu opisan ukratko.

Raspodjela skalarnog električnog polja oko odsječka vodiča opisana je izrazom:

$$\varphi = \frac{\tau}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(u-t)^2 + v^2}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dt}{\sqrt{(u-t)^2 + v^2}} \quad (15.163)$$

a nakon integracije dobije se da je:

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell} \cdot \left(\operatorname{Arsh} \frac{u + \frac{\ell}{2}}{v} - \operatorname{Arsh} \frac{u - \frac{\ell}{2}}{v} \right) \quad (15.164)$$

ili drukčije pisano:

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{v^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (15.165)$$

Raspodjela skalarnog električnog potencijala je osnosimetrična s obzirom na lokalnu os u , ekvipotencijalne plohe su rotacijski elipsoidi sa žarištima na krajevima osi vodiča, što znači da su u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v) ekvipotencijalne linije elipse sa žarištima na krajevima osi vodiča (Slika 14.54).

Raspodjela skalarnog električnog potencijala duž plašta odsječka vodiča opisana je izrazom:

$$\varphi = \varphi(u, r_0) = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (15.166)$$

Po metodi srednjeg potencijala, skalarni električni potencijal odsječka vodiča Φ aproksimira se srednjim potencijalom duž plašta odsječka vodiča tako da je:

$$\Phi = \Phi_{\text{sr}} = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \varphi(u, r_0) \cdot du = P(\ell, r_0) \cdot I \quad (15.167)$$

gdje je $P(\ell, r_0)$ vlastiti otpor odsječka vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu, dobiven metodom srednjeg potencijala. Vrijedi da je:

$$P(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \operatorname{Arsh} \frac{\ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (15.168)$$

ili drukčije pisano:

$$P(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (15.169)$$

Ujedno vrijedi da je:

$$P(\ell, v) = \frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot G(\ell, v) \quad (15.170)$$

gdje je pomoćna funkcija $G(\ell, v)$ opisana izrazima (14.300) i (14.301), a vrijedi za odsječak cilindričnog vodiča u neograničenom savršenom LIH dielektriku.

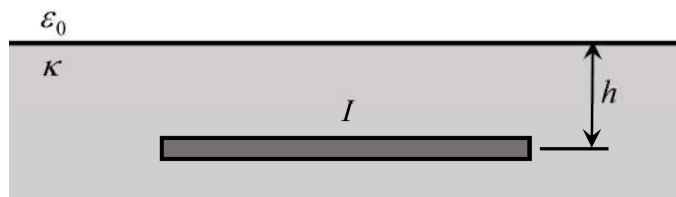
Dakle, u neograničenom vodljivom LIH sredstvu za odsječak vodiča vrijedi da je:

$$\Phi = \Phi_{sr} = P(\ell, r_0) \cdot I = R \cdot I \quad (15.171)$$

gdje je $R = P(\ell, r_0)$ vlastiti otpor odsječka cilindričnog vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu, dobiven metodom srednjeg potencijala. To je otpor između odsječka vodiča i referentne točke u beskonačnosti, ili, drukčije rečeno, to je doprinos jedinične struje odsječka vodiča srednjem potencijalu odsječka vodiča.

15.16. Otpor uzemljenja vodoravnog odsječka vodiča u LIH tlu

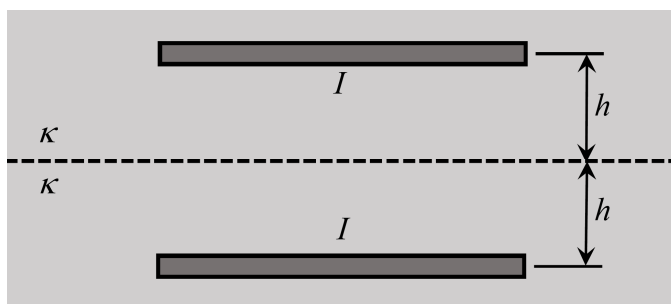
Neka je odsječak cilindričnog tankožičanog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , ukopan u LIH tlo električne provodnosti κ (Slika 15.27). Ako ovaj odsječak vodiča ispušta u tlo vremenski konstantnu električnu struju jakosti I , onda je on jedan elementarni vodoravni uzemljivač pa se, u ovom posebnom slučaju, može govoriti o otporu uzemljenja odsječka cilindričnog vodiča umjesto o vlastitom otporu odsječka cilindričnog vodiča. Vodoravni uzemljivač može biti vodljiva traka, cilindrični vodič ili uža, a može se izvesti kao: zrakasti, prstenasti ili mrežasti uzemljivač ili pak kao njihova kombinacija. Cilj je dobiti izraz za otpor uzemljenja ovog ekvipotencijalnog odsječka cilindričnog vodiča po metodi srednjeg potencijala.



Slika 15.27. Vodoravni odsječak cilindričnog vodiča u LIH tlu

Radi izračuna vlastitog otpora odsječka cilindričnog vodiča, po metodi srednjeg potencijala, treba u numeričkom modelu pretpostaviti da odsječak vodiča, iz svoje osi, u tlo jednoliko ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I .

Po metodi odslikavanja, jedan odsječak vodiča u LIH poluprostoru električne provodnosti κ nadomještaju dva odsječka vodiča u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ (Slika 15.28).



Slika 15.28. Stvarni i odslikani vodoravni odsječak cilindričnog vodiča

Skalarni električni potencijal odsječka cilindričnog vodiča, dobiven metodom srednjeg potencijala, opisan je izrazom:

$$\Phi = \Phi_{sr} = R \cdot I \quad ; \quad R = P(\ell, r_0) + P(\ell, 2 \cdot h) \quad (15.172)$$

gdje je:

R - ukupni vlastiti otpor odsječka cilindričnog vodiča u heterogenom sredstvu, koje se sastoji od tla i zraka,

$P(\ell, r_0)$ - vlastiti otpor odsječka cilindričnog vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu, opisan izrazom (15.169),

$P(\ell, 2 \cdot h)$ - međusobni otpor stvarnog odsječka cilindričnog vodiča i odslikanog odsječka cilindričnog vodiča u neograničenom vodljivom LIH sredstvu, koji je opisan izrazom (15.169).

Budući da je vodoravni uzemljivač aproksimiran samo jednim pravocrtnim tankožičanim odsječkom cilindričnog vodiča, onda je:

$$R_{uz} = R \quad (15.173)$$

gdje je R_{uz} otpor uzemljenja odsječka cilindričnog vodiča.

15.17. Otpor uzemljenja dvaju paralelnih odsječaka vodiča u LIH tlu

Neka su dva jednaka, međusobno paralelna, odsječka cilindričnog tankožičanog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , ukopana u LIH tlo električne provodnosti κ (Slika 15.29). Neka ova dva odsječka vodiča tvore ekvipotencijalni uzemljivač koji u okolno tlo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I_{uz} . Neka je dovod električne struje odsječcima vodiča izoliran od tla. Cilj je dobiti izraz za skalarni električni potencijal i otpor uzemljenja ovog ekvipotencijalnog uzemljivača po metodi srednjeg potencijala.

Heterogenost sredstva se uvažava tako da se odsječci vodiča odslikaju po metodi odslikavanja. Dva odsječka vodiča u LIH poluprostoru električne provodnosti κ nadomještaju četiri odsječka vodiča u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ (Slika 15.30).

Skalarni električni potencijali odsječaka vodiča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = R_{1,1} \cdot I_1 + R_{1,2} \cdot I_2 \quad (15.174)$$

$$\Phi_2 = R_{2,1} \cdot I_1 + R_{2,2} \cdot I_2 \quad (15.175)$$

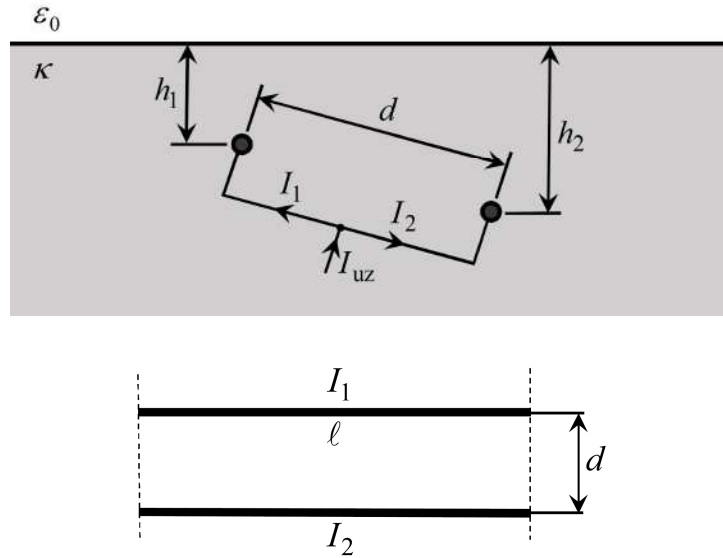
gdje su vlastiti i međusobni otpori odsječaka vodiča dobiveni metodom srednjeg potencijala:

$$R_{1,1} = P(\ell, r_0) + P(\ell, 2 \cdot h_1) \quad (15.176)$$

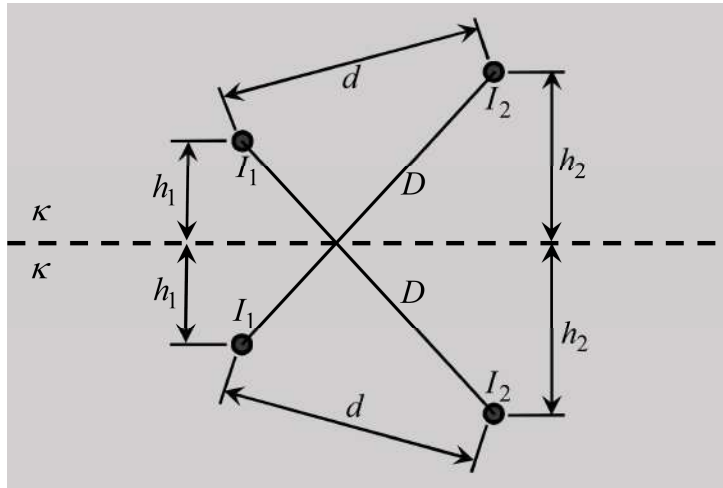
$$R_{1,2} = R_{2,1} = P(\ell, d) + P(\ell, D) \quad (15.177)$$

$$R_{2,2} = P(\ell, r_0) + P(\ell, 2 \cdot h_2) \quad (15.178)$$

gdje je funkcija $P(\ell, v)$ opisana izrazom (15.169).



Slika 15.29. Dva paralelna odsječka tankožičanog cilindričnog vodiča



Slika 15.30. Stvarni i odslikani odsječci cilindričnog vodiča

Budući da odsječci vodiča tvore ekvipotencijalni uzemljivač, vrijedi da je:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{uz} \quad (15.179)$$

$$I_1 + I_2 = I_{uz} \quad (15.180)$$

Simetrični sustav jednažbi u matričnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & -1 \\ R_{2,1} & R_{2,2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \Phi_{uz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{uz} \end{bmatrix} \quad (15.181)$$

U posebnom slučaju kada je $h_1 = h_2$, vrijedi da je:

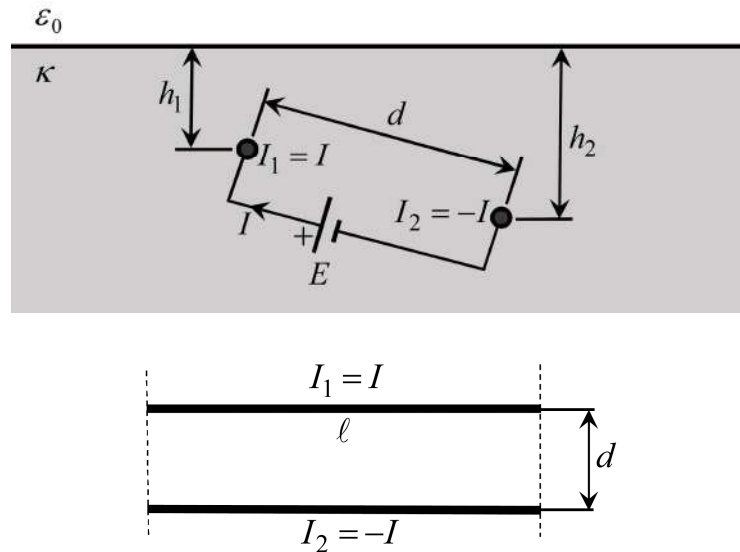
$$I_1 = I_2 = \frac{I_{uz}}{2} \quad (15.182)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{uz} = \frac{R_{1,1} + R_{1,2}}{2} \cdot I_{uz} \quad (15.183)$$

15.18. Otpor između dvaju paralelnih odsječaka vodiča u LIH tlu

Neka je su dva jednaka, međusobno paralelna, odsječka cilindričnog tankožičanog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , ukopana u LIH tlo električne provodnosti κ (Slika 15.31). Neka između ova dva ekvipotencijalna odsječka vodiča teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Neka je dovod struje odsječcima vodiča izoliran od tla. Cilj je dobiti izraz za otpor između ova dva odsječka po metodi srednjeg potencijala. U ovom slučaju, svaki od ova dva odsječka vodiča jest horizontalni ekvipotencijalni uzemljivač.

Heterogenost sredstva se uvažava tako da se odsječci vodiča odslikaju po metodi odslikavanja. Dva odsječka vodiča u LIH poluprostoru električne provodnosti κ nadomještaju četiri odsječka vodiča u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ (Slika 15.32).



Slika 15.31. Dva paralelna odsječka cilindričnog vodiča

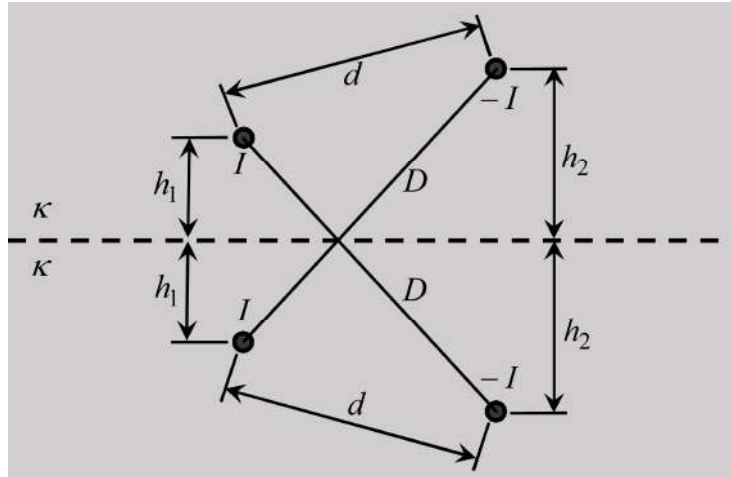
Prema Slici 15.31, vodoravni uzemljivač 1 ispušta u tlo vremenski konstantnu električnu struju jakosti I , dok vodoravni uzemljivač 2 prima iz tla vremenski konstantnu električnu struju jakosti I , a to znači da uzemljivač 2 ispušta u tlo vremenski konstantnu električnu struju jakosti $-I$. Svaki od ova dva uzemljivača, u numeričkom modelu, aproksimiran je samo jednim odsječkom cilindričnog vodiča.

Skalarni električni potencijali odsječaka vodiča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = R_{1,1} \cdot I - R_{1,2} \cdot I = (R_{1,1} - R_{1,2}) \cdot I \quad (15.184)$$

$$\Phi_2 = R_{2,1} \cdot I - R_{2,2} \cdot I = (R_{2,1} - R_{2,2}) \cdot I \quad (15.185)$$

gdje su vlastiti i međusobni otpori odsječaka vodiča, dobiveni metodom srednjeg potencijala, opisani izrazima (15.176) - (15.178).



Slika 15.32. Stvarni i odslikani odsječci cilindričnog vodiča

Otpor između ova dva uzemljivača (odsječaka vodiča) opisan je izrazom:

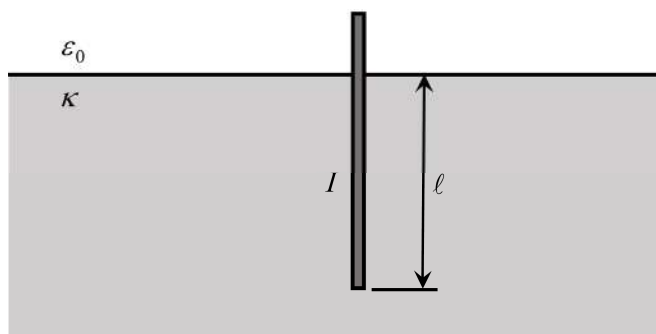
$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = R_{1,1} + R_{2,2} - 2 \cdot R_{1,2} \quad (15.186)$$

U posebnom slučaju, ako je $h_1 = h_2$, vrijedi da je:

$$\Phi_2 = -\Phi_1 \quad ; \quad R = \frac{2 \cdot \Phi_1}{I} = 2 \cdot (R_{1,1} - R_{1,2}) \quad (15.187)$$

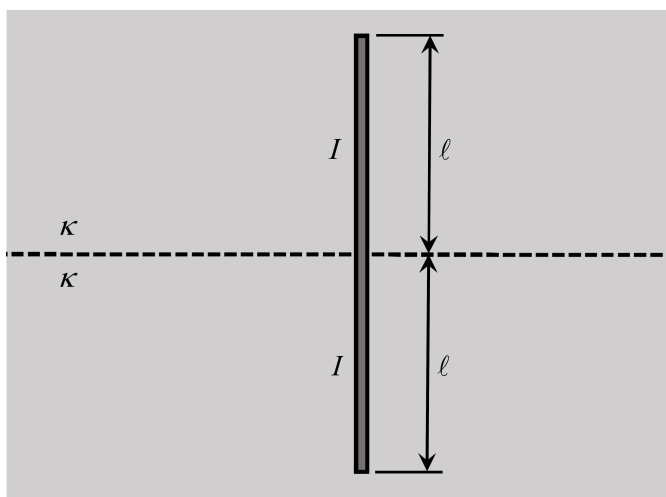
15.19. Otpor uzemljenja okomitog odsječka vodiča u LIH tlu

Neka je odsječak cilindričnog tankožičanog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , ukopan u LIH tlo električne provodnosti κ (Slika 15.33). Ako ovaj odsječak vodiča ispušta u tlo vremenski konstantnu električnu struju jakosti I , onda je on jedan elementarni okomiti uzemljivač. Cilj je dobiti izraz za otpor uzemljenja ovog ekvipotencijalnog odsječka cilindričnog vodiča po metodi srednjeg potencijala. Za rješenje zadatka bitan je samo onaj dio vodiča koji je ukopan u tlo.



Slika 15.33. Okomiti odsječak cilindričnog vodiča u LIH tlu

Po metodi odslikavanja, jedan odsječak vodiča u LIH poluprostoru električne provodnosti κ nadomještaju dva odsječka vodiča u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ (Slika 15.34).



Slika 15.34. Stvarni i odslikani okomiti odsječak cilindričnog vodiča

Prema Slici 15.34, u ovom posebnom slučaju stvarni i odslikani odsječak vodiča mogu se u numeričkom modelu nadomjestiti jednim objedinjenim odsječkom cilindričnog vodiča polumjera r_0 , duljine $2 \cdot \ell$, u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ koji ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $2 \cdot I$.

Skalarni električni potencijal ovog cilindričnog odsječka vodiča, dobiven metodom srednjeg potencijala, opisan je izrazom:

$$\Phi = I \cdot R = 2 \cdot I \cdot P(2 \cdot \ell, r_0) \quad (15.188)$$

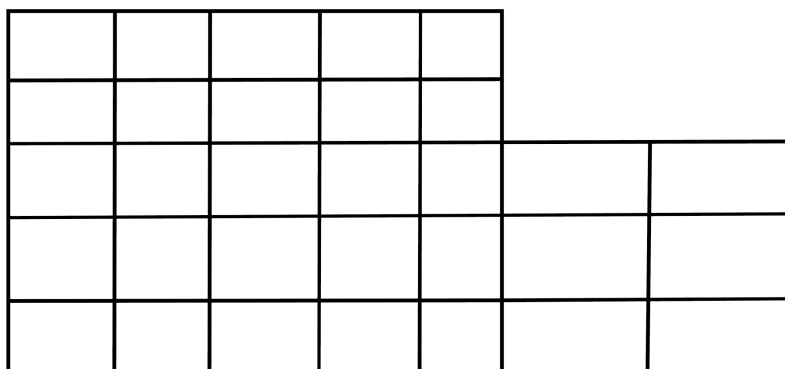
gdje je funkcija $P(\ell, v)$ opisana izrazom (15.169).

Slijedi da je otpor uzemljenja okomitog odsječka cilindričnog vodiča:

$$R = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell^2} \cdot \left[2 \cdot \ell \cdot \ln \frac{\sqrt{4 \cdot \ell^2 + r_0^2} + 2 \cdot \ell}{r_0} - \frac{4 \cdot \ell^2}{\sqrt{4 \cdot \ell^2 + r_0^2} + r_0} \right] \quad (15.189)$$

15.20. Numeričko modeliranje ekvipotencijalnih mrežastih uzemljivača

Neka se ekvipotencijalni mrežasti uzemljivač nalazi u LIH tlu električne provodnosti κ . U numeričkom modelu, vodiči ekvipotencijalnog mrežastog uzemljivača (Slika 15.35) dijele se na pravocrtne cilindrične odsječke.



Slika 15.35. Primjer ekvipotencijalnog mrežastog uzemljivača

Neka ima ukupno n odsječaka. Neka je poznata električna struja uzemljivača I_{uz} , a to je električna struja koju uzemljivač ispušta u tlo. Neka su nepoznanice: električne struje odsječaka I_k ; $k = 1, 2, \dots, n$

te skalarni električni potencijal uzemljivača Φ_{uz} . Svi skalarni električni potencijali odsječaka vodiča Φ_k ; $k = 1, 2, \dots, n$ jednaki su potencijalu uzemljivača.

Mogu se koristiti različite metode težinskih odstupanja za numeričku aproksimaciju skalarnog električnog potencijala odsječaka, a njeni posebni slučajevi su metoda kolokacije u točki i metoda srednjeg potencijala. Za metodu srednjeg potencijala sustav linearnih jednažbi glasi:

$$\sum_{k=1}^n R_{i,k} \cdot I_k = \Phi_i = \Phi_{uz} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (15.190)$$

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_{uz} \quad (15.191)$$

koji u matricnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & \dots & R_{1,n} & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{n,1} & \dots & R_{n,n} & -1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \\ \Phi_{uz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -I_{uz} \end{bmatrix} \quad (15.192)$$

gdje su $R_{i,k} = R_{k,i}$; $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$ vlastiti i međusobni otpori odsječaka vodiča. To je, ustvari, doprinos jedinične struje k-tog odsječaka potencijalu i-tog odsječaka, uzevši u obzir heterogenost cjelokupnog prostora.

Vlastiti i međusobni otpori $R_{i,k}$ u neograničenom LIH tlu električne provodnosti κ analogni su vlastitim i međusobnim potencijalnim koeficijentima $\alpha_{i,k}$ u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ϵ . Veza između njih opisana je sljedećim izrazom:

$$R_{i,k} = \frac{\epsilon}{\kappa} \cdot \alpha_{i,k} \quad (15.193)$$

gdje su vlastiti potencijalni koeficijenti $\alpha_{i,i}$ opisani izrazom (14.303). U posebnom slučaju paralelnosti odsječaka vodiča prema Slici 14.57, međusobni potencijalni koeficijenti $\alpha_{i,k}$ opisani su izrazom (14.304). U slučaju opće paralelnosti odsječaka vodiča prema Slici 14.58, međusobni potencijalni koeficijenti $\alpha_{i,k}$ opisani su izrazima (14.305) - (14.307). Ako su odsječci vodiča neparalelni (Slika 14.59), onda su međusobni potencijalni koeficijenti $\alpha_{i,k}$ opisani izrazima (14.310) i (14.311).

Ako postoji više ekvipotencijalnih uzemljivača, onda sustav linearnih jednažbi (15.192) treba proširiti dodavanjem još jedne jednažbe i još jedne nove nepoznanice za svaku novi dodatni ekvipotencijalni uzemljivač.

Sustav linearnih jednažbi dobiven metodom srednjeg potencijala je simetričan, dok metoda kolokacije u točki daje nesimetrični sustav linearnih jednažbi.

Nakon što se riješi sustav linearnih jednažbi (15.192), može se izračunati skalarni električni potencijal u bilo kojoj točki u tlu. Raspodjela skalarnog električnog potencijala u tlu, ili pak na površini tla, opisana je izrazom:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k \quad (15.194)$$

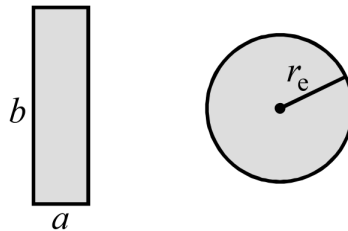
gdje je R_k otpor između k-tog segmenta i točke promatranja, uzevši u obzir heterogenost sredstva. To je, ustvari, doprinos jedinične struje k-tog segmenta potencijalu promatrane točke, uzevši u obzir heterogenost cjelokupnog prostora.

Algoritmi za numeričko modeliranje ekvipotencijalnih uzemljivača u heterogenom tlu, kao što je horizontalno uslojeno višeslojno tlo, te algoritmi za numeričko modeliranje neekvipotencijalnih

uzemljivača u homogenom i heterogenom tlu mnogo su složeniji. Pogotovo je složena vremenski harmonijska i tranzijentna analiza uzemljivačkih sustava.

15.21. Ekvivalentni polumjer pravokutnog vodiča

U numeričkom modelu uzemljivača pretpostavlja se da su odsječci vodiča cilindričnog poprečnog presjeka. Međutim, u praksi se koristi i pocinčana čelična traka pravokutnog poprečnog presjeka, koja se, za potrebe numeričkog modeliranja, može aproksimirati cilindričnim vodičem (Slika 15.36).



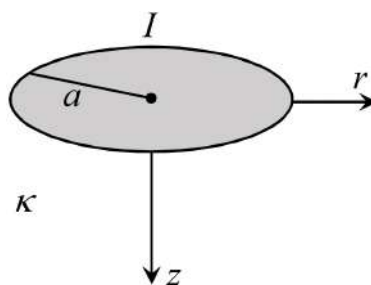
Slika 15.36. Pravokutni vodič i ekvivalentni cilindrični vodič

Ekvivalentni polumjer pravokutnog vodiča može se izračunati po više kriterija: po kriteriju istog opsega, po kriteriju istog poprečnog presjeka ili npr. po metodi srednje geometrijske udaljenosti. Detaljnija numerička analiza zasnovana na metodi graničnih elemenata pokazuje da se ekvivalentni polumjer može dobro aproksimirati po kriteriju istog opsega tako da je:

$$r_e = \frac{a + b}{\pi} \quad (15.195)$$

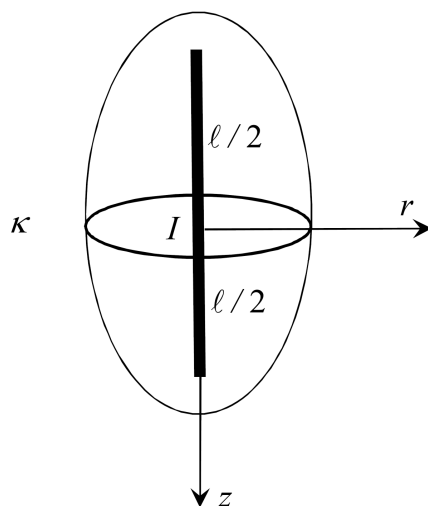
15.22. Kružna vodljiva ploča u neograničenom tlu

Neka se tanka kružna vodljiva ploča, polumjera a , nalazi u neograničenom LIH tlu električne provodnosti κ i neka u tlo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I (Slika 15.37). Neka je ploča načinjena od dobrog vodiča te neka se u odnosu na okolno tlo može smatrati supravodljivom, odnosno neka je ploča ekvipotencijalna.



Slika 15.37. Kružna vodljiva ploča u neograničenom LIH tlu

Budući da je raspodjela skalarnog električnog potencijala osnosimetrična s obzirom na os z , koristi se 2D cilindrični koordinatni sustav (r, z) . U teorijskom razmatranju polazi se od ekvipotencijalnog rotacijskog elipsoida što ga stvara pravocrtni tankožičani odsječak vodiča duljine ℓ koji iz svoje osi u okolno tlo jednoliko ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I (Slika 15.38). Rotacijski elipsoid nastaje rotacijom elipse oko osi z , a žarišta te elipse su u vrhovima tankožičanog odsječka vodiča.



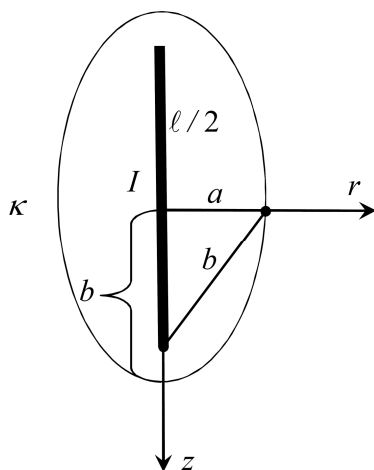
Slika 15.38. Ekvipotencijalni rotacijski elipsoid oko odsječka vodiča

Raspodjela skalarnog električnog potencijala oko odsječka tankožičanog vodiča, koji u numeričkom modelu jednoliko iz svoje osi ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I , opisana je izrazom (15.165), koji glasi:

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{\ell}{2}\right)^2} + z + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{\ell}{2}\right)^2} + z - \frac{\ell}{2}} \quad (15.196)$$

Za ekvipotencijalnu elipsu koja ima malu poluos duljine a (polumjer ekvipotencijalne ploče) i veliku poluos duljine b (Slika 15.39), vrijedi da je:

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{b^2 - a^2} \quad (15.197)$$



Slika 15.39. Velika i mala poluos ekvipotencijalne elipse oko odsječka vodiča

Ako b teži u nulu, onda ekvipotencijalni rotacijski elipsoid kojem je mala poluos duljine a postaje ekvipotencijalna ploča polumjera a pa, prema izrazu (15.197), vrijedi da je:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\ell}{2} = \sqrt{-a^2} = j \cdot a \quad (15.198)$$

Nakon što se u izraz za raspodjelu skalarnog električnog potencijala (15.196) uvrsti supstitucija (15.198), dobije se izraz za raspodjelu skalarnog električnog potencijala oko kružne vodljive u ploče u neograničenom LIH tlu, koji glasi:

$$\varphi = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \ln \frac{\sqrt{r^2 + (z + j \cdot a)^2} + z + j \cdot a}{\sqrt{r^2 + (z - j \cdot a)^2} + z - j \cdot a} \quad (15.199)$$

Raspodjela skalarnog električnog potencijala oko kružne vodljive ploče jest parna funkcija s obzirom na os z pa se, radi daljnjeg postupanja, izraz (15.199) može prevesti u sljedeći oblik:

$$\varphi = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \ln \frac{\sqrt{r^2 + (|z| + j \cdot a)^2} + |z| + j \cdot a}{\sqrt{r^2 + (|z| - j \cdot a)^2} + |z| - j \cdot a} \quad (15.200)$$

odakle slijedi da je:

$$\varphi = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \ln \frac{\sqrt{A + j \cdot 2 \cdot a \cdot |z|} + |z| + j \cdot a}{\sqrt{A - j \cdot 2 \cdot a \cdot |z|} + |z| - j \cdot a} \quad (15.201)$$

gdje je:

$$A = r^2 + z^2 - a^2 \quad (15.202)$$

Neka je:

$$\sqrt{A + j \cdot 2 \cdot a \cdot |z|} = \alpha + j \cdot \beta \quad ; \quad \sqrt{A - j \cdot 2 \cdot a \cdot |z|} = \alpha - j \cdot \beta \quad (15.203)$$

odakle, nakon kvadriranja ovih dvaju izraza, slijedi da je:

$$\alpha^2 - \beta^2 = A \quad ; \quad \alpha \cdot \beta = |z| \cdot a \quad (15.204)$$

Nadalje je:

$$\alpha^4 - A \cdot \alpha^2 - z^2 \cdot a^2 = 0 \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot a^2 \cdot z^2}}{2} \quad (15.205)$$

odakle slijedi da je:

$$\alpha = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot a^2 \cdot z^2}}{2}} \quad ; \quad \beta = \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot a^2 \cdot z^2}}{2}} \quad (15.206)$$

Ako se izrazi označeni brojem (15.203) uvrste u izraz (15.200), dobije se novi izraz za raspodjelu skalarnog električnog potencijala oko kružne vodljive ploče, koji glasi:

$$\varphi = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \ln \frac{(\alpha + |z|) + j \cdot (\beta + a)}{(\alpha + |z|) - j \cdot (\beta + a)} \quad (15.207)$$

odakle slijedi da je:

$$\varphi = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \ln e^{j \cdot 2 \cdot \arctan \frac{\beta + a}{\alpha + |z|}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arctan \frac{\beta + a}{\alpha + |z|} \quad (15.208)$$

Budući da je prema (15.204):

$$\beta = \frac{|z| \cdot a}{\alpha} \quad (15.209)$$

lako se dobije da je:

$$\frac{\beta + a}{\alpha + |z|} = \frac{a}{\alpha} = \frac{\beta}{|z|} \quad (15.210)$$

Iz izraza (15.210) i (15.208), slijede konačni praktični izrazi za raspodjelu skalarnog električnog potencijala oko kružne vodljive ploče, koji glase:

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{\alpha} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} \quad (15.211)$$

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{|z|} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{\beta}{\sqrt{z^2 + \beta^2}} \quad (15.212)$$

gdje su pomoćne funkcije α i β opisane izrazom (15.206).

Iz izraza (15.206) i (15.211), lako se dobije da je za $z = 0$ & $r \geq a$:

$$\alpha = \sqrt{r^2 - a^2} \quad ; \quad \varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{a}{r} \quad (15.213)$$

dok je za $z = 0$ & $r \leq a$:

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \varphi = \Phi_{\text{pl}} = \frac{I}{8 \cdot a \cdot \kappa} = \text{konst.} \quad (15.214)$$

Iz izraza (15.206) i (15.211), dobije se da je za $r = 0$:

$$\alpha = |z| \quad ; \quad \beta = a \quad ; \quad \varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{|z|} \quad (15.215)$$

Izraz za raspodjelu plošne gustoće električne struje s jedne strane ekvipotencijalne ploče može se dobiti iz izraza:

$$J = -\kappa \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0 \\ r \leq a}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad ; \quad \varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{z} \quad (15.216)$$

Vrijedi da je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta}{z}\right)^2} \cdot \frac{z \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} - \beta}{z^2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \frac{z \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} - \beta}{\beta^2 + z^2} \quad (15.217)$$

$$J = -\kappa \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0 \\ r \leq a}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0 \\ r \leq a}} \frac{z \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} - \beta}{\beta^2 + z^2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0 \\ r \leq a}} \frac{1}{\beta} \quad (15.218)$$

$$J = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0 \\ r \leq a}} \sqrt{\frac{2}{-A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot a^2 \cdot z^2}}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{2}{2 \cdot |A|}} \quad (15.219)$$

pa je konačno:

$$J = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (15.220)$$

Izraz (15.220) koji opisuje raspodjelu plošne gustoće električne struje s jedne strane ekvipotencijalne ploče može se dobiti i iz izraza (15.199), kojemu je alternativni zapis:

$$\varphi = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \left(\operatorname{Ar sh} \frac{z + j \cdot a}{r} - \operatorname{Ar sh} \frac{z - j \cdot a}{r} \right) \quad (15.221)$$

Slijedi da je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{I}{j \cdot 8 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(z + j \cdot a)^2 + r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - j \cdot a)^2 + r^2}} \right) \quad (15.222)$$

pa je:

$$J = -\kappa \cdot \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0 \\ r \leq a}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{j \cdot I}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) \quad (15.223)$$

$$J = \frac{j \cdot I}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left(\frac{1}{\pm j \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{\pm j \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \right) \quad (15.224)$$

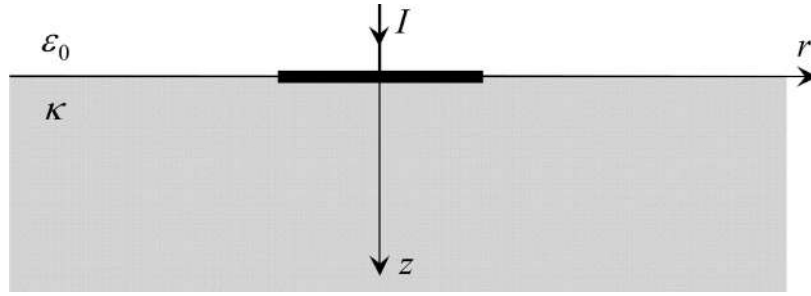
Izborom predznaka u izrazu (15.224) koji daju fizikalno rješenje, a to je pozitivno realno rješenje, dobije se da je:

$$J = \frac{j \cdot I}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{-j \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \right) = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (15.225)$$

15.23. Kružna vodljiva ploča na površini tla

Neka se tanka kružna vodljiva ploča, polumjera a , nalazi na površini LIH tla električne provodnosti κ i neka u tlo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti I (Slika 15.40). Neka je ploča načinjena od dobrog vodiča te neka se u odnosu na okolno tlo može smatrati supravodljivom, odnosno neka je ploča ekvipotencijalna.

Nakon što se vodljiva ploča odslika u odnosu na površinu tla, dobije se vodljiva ploča u neograničenom LIH tlu (Slika 15.37), koja u tlo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $2 \cdot I$. Budući da je ploča na površini tla, onda isti izraz opisuje raspodjelu skalarnog električnog potencijala u zraku i u tlu.



Slika 15.40. Kružna vodljiva ploča na površini LIH tla

Iz izraza (15.211) i (15.212) koji vrijede za upola manju jakost električne struje, slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala oko kružne vodljive ploče opisana izrazima:

$$\varphi = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{a}{\alpha} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} \quad (15.226)$$

$$\varphi = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{\beta}{|z|} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{z^2 + \beta^2}} \quad (15.227)$$

gdje su pomoćne funkcije α i β opisane izrazom (15.206).

Prema izrazu (15.220), plošna gustoća električne struje koju vodljiva ploča s jedne strane ispušta u tlo opisana je izrazom:

$$J = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (15.228)$$

a to znači da je plošna gustoća nepokretnog električnog naboja koji se nalazi s druge strane vodljive ploče opisana izrazom:

$$\sigma = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad ; \quad \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{I}{\kappa} \quad (15.229)$$

Iz izraza (15.214), slijedi da je skalarni električni potencijal vodljive ploče:

$$\varphi = \Phi_{pl} = \frac{2 \cdot I}{8 \cdot a \cdot \kappa} = \frac{I}{4 \cdot a \cdot \kappa} = \text{konst.} \quad (15.230)$$

pa je otpor uzemljenja vodljive ploče:

$$R_{pl} = \frac{\Phi_{pl}}{I} = \frac{1}{4 \cdot a \cdot \kappa} \quad (15.231)$$

Iz izraza (15.213), slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala po površini tla ($z=0$ & $r \geq a$) opisana izrazom:

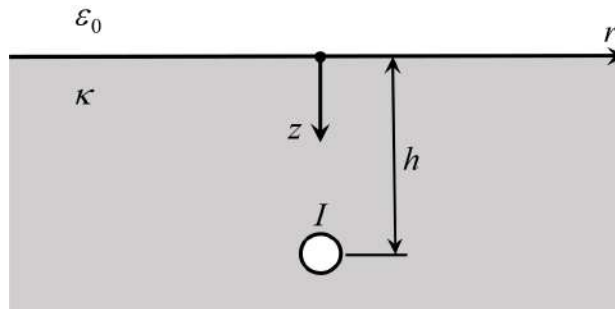
$$\varphi = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arcsin \frac{a}{r} = \frac{2 \cdot \Phi_{pl}}{\pi} \cdot \arcsin \frac{a}{r} \quad (15.232)$$

Iz izraza (15.214), slijedi da je raspodjela skalarnog električnog potencijala duž osi z ($r=0$) opisana izrazom:

$$\varphi = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{a}{|z|} = \frac{2 \cdot \Phi_{pl}}{\pi} \cdot \arctg \frac{a}{|z|} \quad (15.233)$$

15.24. Zadaci

Zadatak 15.1. Vodljiva kugla, polumjera $r_0 = 1,25$ cm, nalazi se na dubini $h = 3$ m ispod površine LIH tla električne provodnosti $\kappa = 0,1$ S/m. Ako kugla ispušta u tlo vremenski konstantnu struju jakosti $I = 100$ A, odredite: a) raspodjelu jakosti električnog polja u tlu, b) raspodjelu jakosti električnog polja po površini tla, c) raspodjelu skalarnog električnog potencijala po površini tla, d) skalarni električni potencijal kugle i otpor uzemljenja kugle. Pretpostavite da je $h \gg r_0$. Koristite 2D cilindrični koordinatni sustav (r, z) .



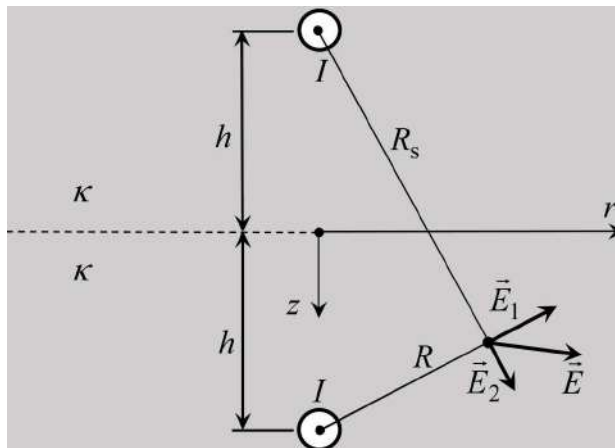
Slika 15.41. Vodljiva kugla ukopana u LIH tlo

Rješenje:

a) Raspodjela jakosti električnog polja u tlu

Koristi se metoda odslikavanja. Uz uvedenu pretpostavku da je $h \gg r_0$, stvarna kugla i odslikana kugla aproksimiraju se točkastim izvorima vremenski konstantne električne struje.

Ako se traži rješenje u tlu, stvarna kugla i zrcalno odslikana kugla u neograničeno LIH tlo električne provodnosti κ ispuštaju vremenski konstantnu električnu struju jakosti I (Slika 15.42).



Slika 15.42. Stvarna i odslikana kugla u neograničenom LIH tlu

Faktor refleksije je:

$$k_R = \frac{\kappa - \kappa_{\text{zraka}}}{\kappa + \kappa_{\text{zraka}}} = \frac{\kappa - 0}{\kappa + 0} = 1 \quad (15.234)$$

Vektor jakosti električnog polja u tlu ($z \geq 0$) uslijed električne struje stvarne kugle opisan je izrazom (Slika 15.42):

$$\vec{E}_1 = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R^2} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r + (z-h) \cdot \vec{e}_z}{R} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r + (z-h) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(r^2 + (z-h)^2)^3}} \quad (15.235)$$

dok je vektor jakosti električnog polja u tlu uslijed električne struje odslikane kugle opisan izrazom:

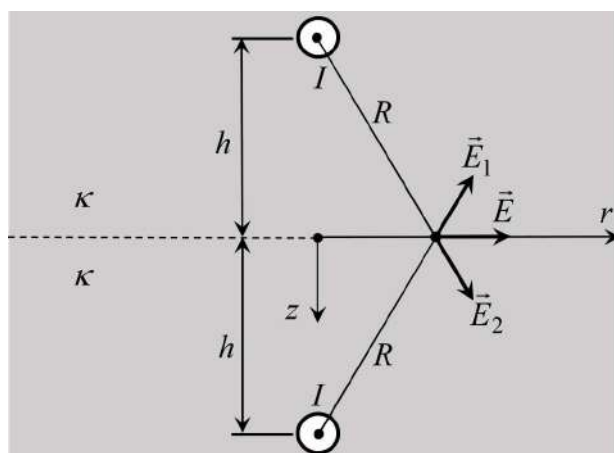
$$\vec{E}_2 = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R_s^2} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r + (z+h) \cdot \vec{e}_z}{R_s} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r + (z+h) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(r^2 + (z+h)^2)^3}} \quad (15.236)$$

pa je ukupna jakost električnog polja u tlu u točki (r, z) opisana izrazom:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{r \cdot \vec{e}_r + (z-h) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(r^2 + (z-h)^2)^3}} + \frac{r \cdot \vec{e}_r + (z+h) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(r^2 + (z+h)^2)^3}} \right) \quad (15.237)$$

b) Raspodjela jakosti električnog polja po površini tla

Električna struja ne izlazi iz tla, tj. na površini tla jakost električnog polja nema z komponente (Slika 15.43).



Slika 15.43. Vektor jakosti električnog polja na površini tla

Vektor jakosti električnog polja na površini tla uslijed električne struje stvarne kugle opisan je izrazom (Slika 15.43):

$$\vec{E}_1|_{z=0} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R^2} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r - h \cdot \vec{e}_z}{R} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r - h \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(r^2 + h^2)^3}} \quad (15.238)$$

dok je vektor jakosti električnog polja na površini tla uslijed električne struje odslikane kugle opisan izrazom:

$$\vec{E}_2|_{z=0} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R^2} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r + h \cdot \vec{e}_z}{R} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r + h \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{(r^2 + h^2)^3}} \quad (15.239)$$

pa je ukupna jakost električnog polja na površini tla, odnosno u točki $(r, 0)$, opisana izrazom:

$$\vec{E}|_{z=0} = \vec{E}_1|_{z=0} + \vec{E}_2|_{z=0} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)^3}} \cdot \vec{e}_r \quad (15.240)$$

c) Raspodjela skalarnog električnog potencijala po površini tla

Prema Slici 15.42, raspodjela skalarnog električnog potencijala u tlu ($z \geq 0$) opisana je izrazom:

$$\varphi = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_s} \right) = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \right) \quad (15.241)$$

pa je raspodjela skalarnog električnog potencijala po površini tla ($z = 0$) opisana izrazom:

$$\varphi|_{z=0} = 2 \cdot \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \sqrt{r^2 + h^2}} \quad (15.242)$$

d) Skalarni električni potencijal kugle i otpor uzemljenja kugle

Uz pretpostavku da je $h \gg r_0$, prema Slici 15.42, skalarni električni potencijal kugle opisan je izrazom:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2 \cdot h} \right) = 6,37946064 \text{ kV} \quad (15.243)$$

gdje se skalarni električni potencijal uslijed odslikane električne struje računa u centru kugle.

Otpor uzemljenja kugle je:

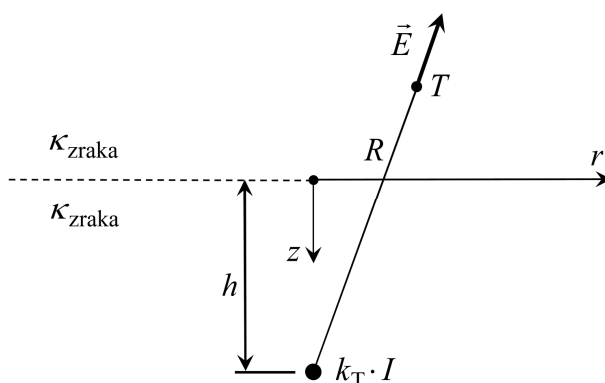
$$R_{\text{kugle}} = \frac{\varphi_{\text{kugle}}}{I} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2 \cdot h} \right) = 63,7946064 \text{ } \Omega \quad (15.244)$$

Zadatak 15.2. Vodljiva kugla polumjera $r_0 = 1,25$ cm nalazi se na dubini $h = 3$ m ispod površine LIH tla električne provodnosti $\kappa = 0,1$ S/m. Ako kugla ispušta u tlo vremenski konstantnu struju jakosti $I = 100$ A, odredite: a) raspodjelu skalarnog električnog potencijala u zraku, b) raspodjelu jakosti električnog polja u zraku, c) raspodjelu plošne gustoće nepokretnog električnog naboja po površini tla. Pretpostavite da je $h \gg r_0$. Koristite 2D cilindrični koordinatni sustav (r, z). Vodljiva kugla ukopana u LIH tlo prikazana je na Slici 15.41.

Rješenje:

a) Raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku

Koristi se metoda odslikavanja. Uz uvedenu pretpostavku da je $h \gg r_0$, stvarna kugla i odslikana kugla aproksimiraju se točkastim izvorima vremenski konstantne električne struje.



Slika 15.44. Nadomjesni točkasti izvor električne struje

Raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku opisana je izrazom (15.56), koji glasi:

$$\varphi = \lim_{\kappa_{\text{zraka}} \rightarrow 0} \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_{\text{zraka}} \cdot R} = \lim_{\kappa_{\text{zraka}} \rightarrow 0} \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_{\text{zraka}} \cdot R} \cdot \frac{2 \cdot \kappa_{\text{zraka}}}{\kappa_{\text{zraka}} + \kappa} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R} \quad (15.245)$$

gdje je, prema Slici 15.44, udaljenost nadomjesnog točkastog izvora električne struje i točke promatranja u zraku opisana izrazom:

$$R = \sqrt{r^2 + (h - z)^2} \quad (15.246)$$

pa je raspodjela skalarnog električnog potencijala u zraku ($z \leq 0$) opisana izrazom:

$$\varphi = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \sqrt{r^2 + (h - z)^2}} \quad (15.247)$$

Ako se uvrste zadani podaci, onda se dobije da je:

$$\varphi = \frac{500}{\pi \cdot \sqrt{r^2 + (9 - z)^2}} \text{ V} \quad (15.248)$$

b) Raspodjela jakosti električnog polja u zraku

Na temelju izraza (15.245) i (15.247) lako je zaključiti da je vektor jakost električnog polja u zraku ($z \leq 0$) opisan izrazom:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot R^2} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r - (h - z) \cdot \vec{e}_z}{R} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r - (h - z) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + (h - z)^2}^3} \quad (15.249)$$

Ako se uvrste zadani podaci, onda se dobije da je:

$$\vec{E} = \frac{500}{\pi} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r - (3 - z) \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + (3 - z)^2}^3} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (15.250)$$

c) Raspodjela plošne gustoće nepokretnog električnog naboja po površini tla

Iz izraza (15.249), slijedi da je na površini tla jakost električnog polja u zraku ($z = 0$) opisana izrazom:

$$\vec{E}_{\text{zraka}} \Big|_{z=0} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \frac{r \cdot \vec{e}_r - h \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + h^2}^3} \quad (15.251)$$

Na granici tlo-zrak tangencijalna komponenta vektora jakosti električnog polja je kontinuirana, dok je normalna komponenta vektora jakosti električnog polja u tlu jednaka nuli, a u zraku različita od nule zbog nepokretnog električnog naboja nakupljenog na granici tlo-zrak. Vrijedi da je:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_{\text{zraka}} - \vec{D}_{\text{tla}}) = -\vec{e}_z \cdot (\vec{D}_{\text{zraka}} - \vec{D}_{\text{tla}}) = -\vec{e}_z \cdot \vec{D}_{\text{zraka}} = \sigma \quad (15.252)$$

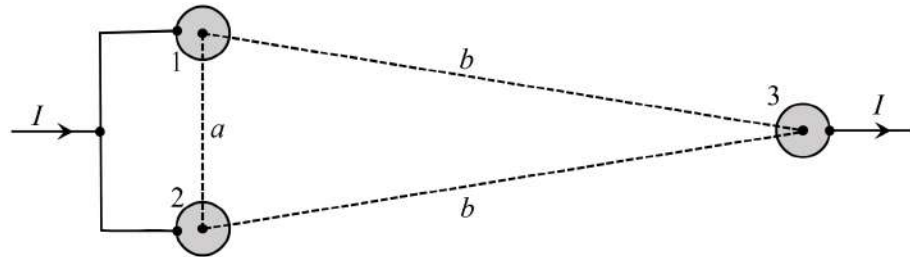
pa je:

$$\sigma = -\varepsilon_0 \cdot E_{z,\text{zraka}} \Big|_{z=0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot I \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \sqrt{r^2 + h^2}^3} \quad (15.253)$$

Ako se uvrste zadani podaci, onda se dobije da je:

$$\sigma = \frac{1500 \cdot \varepsilon_0}{\pi \cdot \sqrt{r^2 + 9}^3} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (15.254)$$

Zadatak 15.3. Dva kraja električne mreže uzemljena su preko triju vodljivih kugla polumjera r_0 dopola ukopanih u LIH tlo električne provodnosti $\kappa = 0,01$ S/m. Odredite ukupni otpor između uzemljenih krajeva mreže, uz pretpostavku da je $a, b \gg r_0$. Zanemarite otpor spojnih vodiča. Neka je: $r_0 = 0,5$ m, $a = 5$ m, $b = 250$ m.



Slika 15.45. Vodljive kugle dopola ukopane u LIH tlo

Rješenje:

Zbog simetrije vrijedi da je:

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad ; \quad I_1 = I_2 = \frac{I}{2} \quad ; \quad I_3 = -I \quad (15.255)$$

Prema potpoglavlju 15.7, po metodi odslikavanja, vodljivu polukuglu na površini LIH tla koja u tlo ispušta električnu struju jakosti I , nadomješta vodljiva kugla u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti tla koja u to sredstvo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $2 \cdot I$.

Slijedi da je:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{a} - \frac{2}{b} \right) \quad (15.256)$$

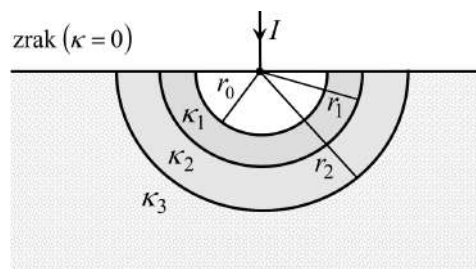
dok je:

$$\Phi_3 = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} - \frac{2}{r_0} \right) \quad (15.257)$$

pa je otpor između uzemljenih krajeva mreže:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{I} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{4}{b} + \frac{3}{r_0} \right) = 49,2107084 \, \Omega \quad (15.258)$$

Zadatak 15.4. Uzemljivač tvori supravodljiva polukugla ukopana u sferno uslojeno troslojno tlo. Za pretpostavljeni model tla, odredite otpor uzemljenja polukugle, uz pretpostavku da polukugla odvodi u tlo vremenski konstantnu električnu struju. Neka je: $r_0 = 0,5$ m, $r_1 = 1$ m, $r_2 = 3$ m, $\kappa_1 = 0,1$ S/m, $\kappa_2 = 0,01$ S/m, $\kappa_3 = 0,005$ S/m.



Slika 15.46. Supravodljiva polukugla ukopana u troslojno tlo

Rješenje:

Po metodi odslikavanja, vodljivu polukuglu na površini sferno uslojenog troslojnog tla, koja u tlo ispušta električnu struju jakosti I , nadomješta vodljiva kugla u neograničenom sferno uslojenom troslojnom sredstvu, koja u to sredstvo ispušta električnu struju jakosti $2 \cdot I$.

U sfernom koordinatnom sustavu, vektor jakosti električnog polja u i -tom sredstvu opisan je izrazom:

$$\vec{E}_i = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \kappa_i \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (15.259)$$

koji se dobije iz sljedećeg izraza:

$$\oint_S \vec{J}_i \cdot d\vec{S} = \kappa_i \cdot E_i \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot I \quad (15.260)$$

Skalarni električni potencijal polukugle (polukuglastog uzemljivača) računa se integracijom jakosti električnog polja od polukugle do beskonačnosti:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \int_{r_0}^{r_1} E_1 \cdot dr + \int_{r_1}^{r_2} E_2 \cdot dr + \int_{r_2}^{\infty} E_3 \cdot dr \quad (15.261)$$

što daje sljedeći izraz:

$$\varphi_{\text{kugle}} = \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{\kappa_1} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\kappa_3} \cdot \frac{1}{r_2} \right] \quad (15.262)$$

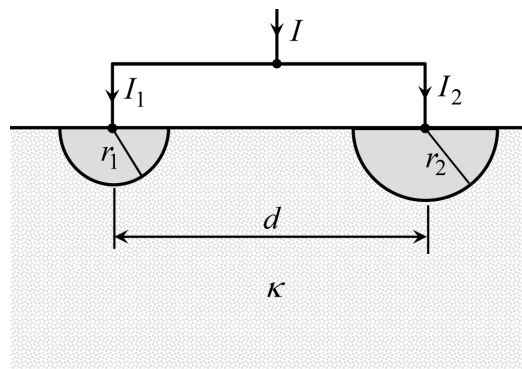
pa je otpor uzemljenja polukugle:

$$R_{\text{kugle}} = \frac{\varphi_{\text{kugle}}}{I} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{\kappa_1} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{\kappa_3} \cdot \frac{1}{r_2} \right] \quad (15.263)$$

Ako se uvrste zadani podaci, onda se dobije da je:

$$R_{\text{kugle}} = 22,8122085 \, \Omega \quad (15.264)$$

Zadatak 15.5. Odredite otpor uzemljenja i skalarni električni potencijal uzemljivača koji tvore dvije supravodljive polukugle na površini LIH tla električne provodnosti $\kappa = 0,01 \text{ S/m}$. Neka je: $I = 100 \text{ A}$, $d = 5 \text{ m}$, $r_1 = 0,2 \text{ m}$, $r_2 = 0,4 \text{ m}$. Pretpostavite da je $d \gg r_1, r_2$.



Slika 15.47. Uzemljivač koji tvore dvije supravodljive polukugle

Rješenje:

Prema potpoglavlju 15.7, po metodi odslikavanja, vodljivu polukuglu na površini LIH tla, koja u tlo ispušta električnu struju jakosti I , nadomješta vodljiva kugla u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti tla, koja u to sredstvo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $2 \cdot I$.

Sustav linearnih jednačbi za izračun električnih struja glasi:

$$\Phi_{uz} = \Phi_1 = \Phi_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left[\frac{2 \cdot I_1}{r_1} + \frac{2 \cdot I_2}{d} \right] = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left[\frac{2 \cdot I_1}{d} + \frac{2 \cdot I_2}{r_2} \right] \quad (15.265)$$

$$I_1 + I_2 = I \quad (15.266)$$

koji, nakon sređivanja, poprima novi oblik:

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{d} \right) \cdot I_1 - \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{d} \right) \cdot I_2 = 0 \quad (15.267)$$

$$I_1 + I_2 = I \quad (15.268)$$

Ako se uvrste zadani podaci, sustav linearnih jednačbi glasi:

$$4,8 \cdot I_1 - 2,3 \cdot I_2 = 0 \quad (15.269)$$

$$I_1 + I_2 = 100 \quad (15.270)$$

a njegova rješenja su:

$$I_1 = \frac{2,3}{7,1} \cdot 100 = 32,3943662 \text{ A} \quad ; \quad I_2 = \frac{4,8}{7,1} \cdot 100 = 67,6056338 \text{ A} \quad (15.271)$$

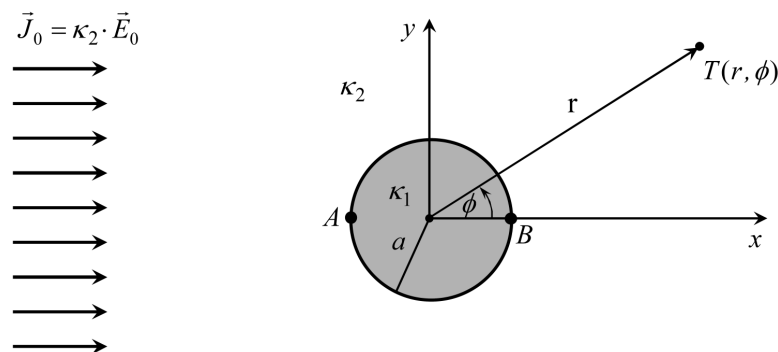
Prema izrazu (15.265), skalarni električni potencijal uzemljivača je:

$$\Phi_{uz} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \left[\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{d} \right] = 2,79305717 \text{ kV} \quad (15.272)$$

dok je otpor uzemljenja:

$$R_{uz} = \frac{\Phi_{uz}}{I} = 27,9305717 \text{ } \Omega \quad (15.273)$$

Zadatak 15.6. U neograničenom vodljivom LIH sredstvu 2 izbušena je rupa u obliku beskonačno dugog šupljeg cilindra koja je ispunjena vodljivim LIH sredstvom 1. Kroz sredstvo 1 i 2 teče vremenski konstantna električna struja takva da je daleko od cilindra električno polje homogeno. Odredite električni napon između točaka A i B . Neka je: $E_0 = 1$ V/m, $\kappa_1 = 0,01$ S/m, $\kappa_2 = 0,1$ S/m, $a = 0,1$ m.



Slika 15.48. Vodljivi cilindar u homogenom stacionarnom strujnom polju

Rješenje:

Opća rješenja Laplaceove diferencijalne jednadžbe u sredstvu 1 i 2, koja mogu zadovoljiti zadane granične uvjete, glase:

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot r^n + D_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \quad (15.274)$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot r^n + B_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \quad (15.275)$$

U potpoglavlju 15.9 je, nakon zadovoljenja graničnih uvjeta, dobiven je izraz (15.83), koji glasi:

$$\varphi_1 = -\frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot r \cdot \cos \phi = -\frac{2 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot x \quad ; \quad r \leq a \quad (15.276)$$

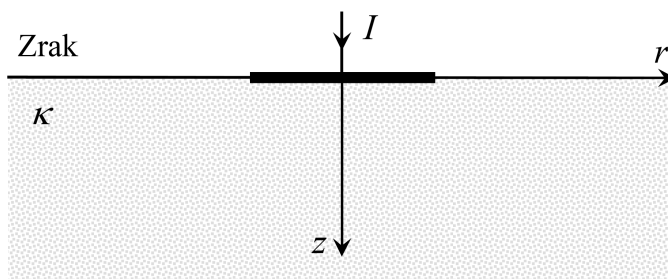
Električni napon između točaka A i B je:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 2 \cdot \varphi_A = 2 \cdot \varphi_1|_{x=-a} = \frac{4 \cdot \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \cdot E_0 \cdot a \quad (15.277)$$

Ako se uvrste zadani podaci, onda se dobije da je:

$$U_{AB} = 0,36363636 \text{ V} \quad (15.278)$$

Zadatak 15.7. Tanka vodljiva kružna ploča nalazi se na površini LIH tla električne provodnosti $\kappa = 0,01$ S/m, koja u tlo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $I = 100$ A. Iz zahtjeva da je ploča ekvipotencijalna slijedi da je plošna gustoća struje (s jedne strane ploče) opisana izrazom $J = k \cdot I / \sqrt{a^2 - r^2}$, gdje je $a = 1$ m polumjer ploče. Izračunajte: a) konstantu k , b) raspodjelu skalarnog električnog potencijala duž osi z okomite na ploču, c) skalarni električni potencijal ploče i otpor uzemljenja ploče.



Slika 15.49. Vodljiva kružna ploča na površini LIH tla

Rješenje:

a) Izračun konstante k

Ekvipotencijalna vodljiva ploča samo s jedne strane ispušta u tlo vremenski konstantnu električnu struju jakosti I te je plošna gustoća električne struje opisana izrazom:

$$J = \frac{k \cdot I}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (15.279)$$

pa je:

$$I = \int_S J \cdot dS = k \cdot I \cdot \int_0^a \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot I \cdot \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^a = k \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot I \quad (15.280)$$

odakle slijedi da je:

$$k = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \quad ; \quad J = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (15.281)$$

b) Raspodjela skalarnog električnog potencijala duž osi z

Po metodi odslikavanja ekvipotencijalna ploča koja u LIH tlo ispušta električnu struju jakosti I može se nadomjestiti ekvipotencijalnom pločom u neograničenom LIH sredstvu provodnosti κ koja u okolno sredstvo ispušta električnu struju jakosti $2 \cdot I$, tj. sa svake svoje strane električnu struju jakosti I .

Vrijedi da je:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int_S \frac{2 \cdot J \cdot dS}{R} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int_0^a \frac{J \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (15.282)$$

pa je:

$$\varphi(z) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \int_0^a \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2 + r^2} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} \quad (15.283)$$

Budući da je:

$$\int_0^a \frac{r \cdot dr}{\sqrt{z^2 + r^2} \cdot \sqrt{a^2 - r^2}} = \left(\begin{array}{l} a^2 - r^2 = t^2 \\ -r \cdot dr = t \cdot dt \end{array} \right) \quad (15.284)$$

$$= \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{z^2 + a^2 - t^2}} = \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \Big|_0^a = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \arctg \frac{a}{|z|}$$

slijedi da je:

$$\varphi(z) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a}{|z|} \quad (15.285)$$

c) Skalarni električni potencijal ploče i otpor uzemljenja ploče

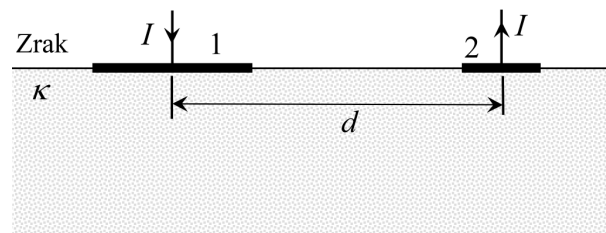
Skalarni električni potencijal ekvipotencijalne ploče može se dobiti iz izraza (15.285) za $z = 0$:

$$\Phi_{\text{pl}} = \varphi(0) = \frac{I}{4 \cdot \kappa \cdot a} = 2,5 \text{ kV} \quad (15.286)$$

te je otpor uzemljenja ploče:

$$R_{\text{pl}} = \frac{\Phi_{\text{pl}}}{I} = \frac{1}{4 \cdot \kappa \cdot a} = 25 \text{ } \Omega \quad (15.287)$$

Zadatak 15.8. Dvije vodljive kružne ekvipotencijalne ploče nalaze se na površini LIH tla električne provodnosti $\kappa = 0,01 \text{ S/m}$ i između njih teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 100 \text{ A}$. Neka su polumjeri ploča $r_1 = 20 \text{ m}$ i $r_2 = 5 \text{ m}$ te neka su središta ploča razmaknuta za $d = 100 \text{ m}$. Izračunajte električni otpor između ploča, a pritom ukupne međusobne otpore ploča izračunajte po metodi kolokacije u točki. Neka su kolokacijske točke u središtima ploča.



Slika 15.50. Dvije ekvipotencijalne kružne ploče na površini LIH tla

Rješenje:

Budući da ploča 1 u tlo ispušta električnu struju jakosti I , a ploča 2 uzima iz tla električnu struju jakosti I , skalarni električni potencijali vodljivih ploča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = R_{1,1} \cdot I + R_{1,2} \cdot (-I) = R_{1,1} \cdot I - R_{1,2} \cdot I \quad (15.288)$$

$$\Phi_2 = R_{2,1} \cdot I + R_{2,2} \cdot (-I) = R_{2,1} \cdot I - R_{2,2} \cdot I \quad (15.289)$$

gdje su ukupni vlastiti otpori ploča opisani izrazima:

$$R_{1,1} = \frac{1}{4 \cdot \kappa \cdot r_1} = 1,25 \text{ } \Omega \quad ; \quad R_{2,2} = \frac{1}{4 \cdot \kappa \cdot r_2} = 5 \text{ } \Omega \quad (15.290)$$

Prema izrazu (15.232), međusobni ukupni otpori ploča računaju se po metodi kolokacije u središnjoj točki pojedine ploče:

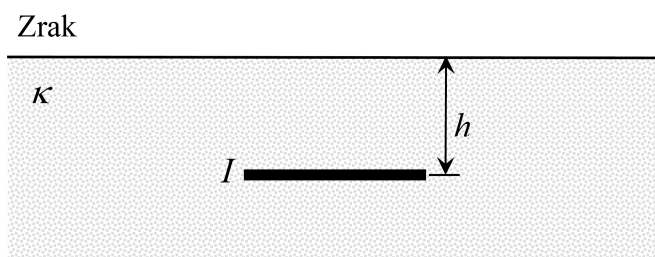
$$R_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_2} \cdot \operatorname{arc} \sin \frac{r_2}{d} = \frac{2 \cdot R_{2,2}}{\pi} \cdot \operatorname{arc} \sin \frac{r_2}{d} = 0,15922133 \text{ } \Omega \quad (15.291)$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot r_1} \cdot \operatorname{arc} \sin \frac{r_1}{d} = \frac{2 \cdot R_{2,1}}{\pi} \cdot \operatorname{arc} \sin \frac{r_1}{d} = 0,16023554 \text{ } \Omega \quad (15.292)$$

Električni otpor između ploča je:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = R_{1,1} + R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1} = 5,93054313 \ \Omega \quad (15.293)$$

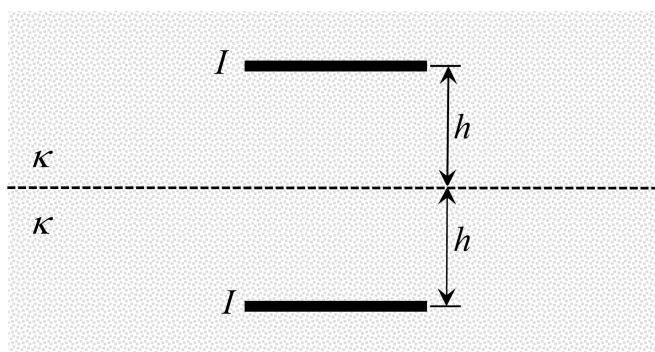
Zadatak 15.9. Tanka ekvipotencijalna kružna ploča ukopana je u LIH tlo električne provodnosti $\kappa = 0,01 \text{ S/m}$ na dubini $h = 0,8 \text{ m}$. Neka je polumjer ploče $a = 20 \text{ m}$. Izračunajte otpor uzemljenja ploče, a pritom međusobni otpor ploče i njene slike izračunajte po metodi kolokacije u točki. Neka je kolokacijska točka u središtu ploče.



Slika 15.51. Ekvipotencijalna kružna ploča ukopana u LIH tlo

Rješenje:

Po metodi odslikavanja, vodljiva ploča, koja u tlo ispušta električnu struju jakosti I , odslika se u odnosu na površinu tla (Slika 15.52).



Slika 15.52. Stvarna i odslikana vodljiva kružna ploča u neograničenom LIH tlu

Skalarni električni potencijal ploče opisan je izrazom:

$$\Phi = I \cdot (R_v + R_m) = I \cdot R_{uz} \quad (15.294)$$

gdje je, prema izrazu (15.214), vlastiti otpor stvarne ploče:

$$R_v = \frac{1}{8 \cdot a \cdot \kappa} = 0,625 \ \Omega \quad (15.295)$$

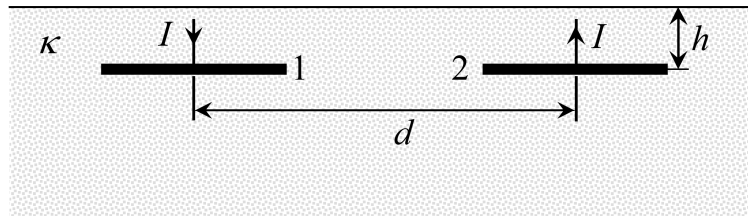
dok je, prema izrazu (15.233), međusobni otpor između stvarne i odslikane ploče, izračunat po metodi kolokacije u središnjoj točki stvarne ploče, opisan izrazom:

$$R_m = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{a}{2 \cdot h} = 0,593236658 \ \Omega \quad (15.296)$$

Slijedi da je otpor uzemljenja ekvipotencijalne ploče:

$$R_{uz} = R_v + R_m = 1,218236658 \ \Omega \quad (15.297)$$

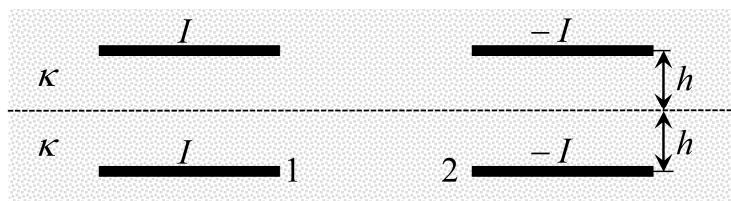
Zadatak 15.10. Dvije ekvipotencijalne kružne ploče ukopane su paralelno s površinom LIH tla na dubini $h = 0,8$ m. Neka je električna otpornost tla $\rho = 1000 \Omega\text{m}$. Neka su polumjeri ploča $r_1 = r_2 = 10$ m te neka su njihova središta razmaknuta za $d = 100$ m. Izračunajte električni otpor između ploča, a pritom međusobne otpore ploča i njihovih slika izračunajte po metodi kolokacije u točki. Neka su kolokacijske točke u središtima ploča.



Slika 15.53. Dvije ekvipotencijalne kružne ploče ukopane u LIH tlo

Rješenje:

Po metodi odslikavanja, ekvipotencijalne ploče se odslikavaju u odnosu na površinu tla (Slika 15.54).



Slika 15.54. Stvarne i odslikane kružne ploče u neograničenom LIH tlu

Budući da ploča 1 u tlo ispušta električnu struju jakosti I , a ploča 2 uzima iz tla električnu struju jakosti I , skalarni električni potencijali vodljivih ploča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = R_{1,1} \cdot I + R_{1,2} \cdot (-I) = R_{1,1} \cdot I - R_{1,2} \cdot I \quad (15.298)$$

$$\Phi_2 = R_{2,1} \cdot I + R_{2,2} \cdot (-I) = R_{2,1} \cdot I - R_{2,2} \cdot I \quad (15.299)$$

pa je električni otpor između ekvipotencijalnih ploča opisan izrazom:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = R_{1,1} + R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1} \quad (15.300)$$

Za ukupne vlastite i međusobne otpore ploča, u ovom posebnom slučaju, vrijede izrazi:

$$R_{1,1} = R_{2,2} \quad ; \quad R_{1,2} = R_{2,1} \quad (15.301)$$

jer su ploče na jednakoj dubini i imaju jednake polumjere.

Slijedi da je električni otpor između ploča opisan izrazom:

$$R = 2 \cdot (R_{1,1} - R_{1,2}) \quad (15.302)$$

gdje je ukupni vlastiti otpor ploče 1 opisan izrazom:

$$R_{1,1} = \frac{1}{8 \cdot r_1 \cdot \kappa} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{r_1}{2 \cdot h} = 23,73746154 \Omega \quad (15.303)$$

Vrijedi da je:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = 0,001 \text{ S/m} \quad (15.304)$$

Ukupni međusobni otpor ploča opisan je izrazom:

$$R_{1,2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot \kappa} \cdot \left(\arcsin \frac{r_2}{d} + \arctg \frac{r_2}{\alpha_{1,2}} \right) = 1,594110635 \text{ } \Omega \quad (15.305)$$

gdje je:

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot r_2^2 \cdot (2 \cdot h)^2}}{2}} = 99,51173726 \quad (15.306)$$

dok je:

$$A = d^2 + (2 \cdot h)^2 - r_2^2 = 9.902,56 \quad (15.307)$$

Slijedi da je električni otpor između ploča:

$$R = 2 \cdot (R_{1,1} - R_{1,2}) = 44,28670181 \text{ } \Omega \quad (15.308)$$

Zadatak 15.11. Dvije ekvipotencijalne kružne ploče ukopane su paralelno s površinom LIH tla na dubini $h = 0,8$ m. Neka je električna otpornost tla $\rho = 1000 \text{ } \Omega\text{m}$. Neka su polumjeri ploča $r_1 = 10$ m i $r_2 = 5$ m te neka su njihova središta razmaknuta za $d = 100$ m. Izračunajte električni otpor između ploča, a pritom međusobne otpore ploča i njihovih slika izračunajte po metodi kolokacije u točki. Neka su kolokacijske točke u središtima ploča.

Rješenje:

Ovaj se zadatak od prethodnog zadatka razlikuje samo po tome da je polumjer ploče 2 upola manji. Dakle, u ovom slučaju polumjeri ploča nisu jednaki pa je električni otpor između ploča opisan izrazom:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = R_{1,1} + R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1} = 65,622216435 \text{ } \Omega \quad (15.309)$$

gdje su ukupni vlastiti otpori ploča:

$$R_{1,1} = \frac{1}{8 \cdot r_1 \cdot \kappa} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{r_1}{2 \cdot h} = 23,73746154 \text{ } \Omega \quad (15.310)$$

$$R_{2,2} = \frac{1}{8 \cdot r_2 \cdot \kappa} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot \kappa} \cdot \arctg \frac{r_2}{2 \cdot h} = 45,07092455 \text{ } \Omega \quad (15.311)$$

Ukupni međusobni otpor $R_{1,2}$ je:

$$R_{1,2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot \kappa} \cdot \left(\arcsin \frac{r_2}{d} + \arctg \frac{r_2}{\alpha_{1,2}} \right) = 1,5921111 \text{ } \Omega \quad (15.312)$$

gdje je:

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot r_2^2 \cdot (2 \cdot h)^2}}{2}} = 99,88776909 \quad (15.313)$$

a u ovom slučaju je:

$$A = d^2 + (2 \cdot h)^2 - r_2^2 = 9.977,56 \quad (15.314)$$

Ukupni međusobni otpor $R_{2,1}$ je:

$$R_{2,1} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \kappa} \cdot \left(\arcsin \frac{r_1}{d} + \arctg \frac{r_1}{\alpha_{2,1}} \right) = 1,594110635 \Omega \quad (15.315)$$

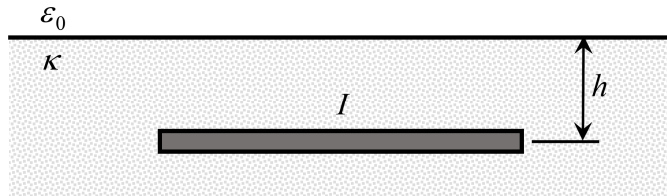
gdje je:

$$\alpha_{2,1} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + 4 \cdot r_1^2 \cdot (2 \cdot h)^2}}{2}} = 99,51173726 \quad (15.316)$$

dok je u ovom slučaju:

$$A = d^2 + (2 \cdot h)^2 - r_2^2 = 9.902,56 \quad (15.317)$$

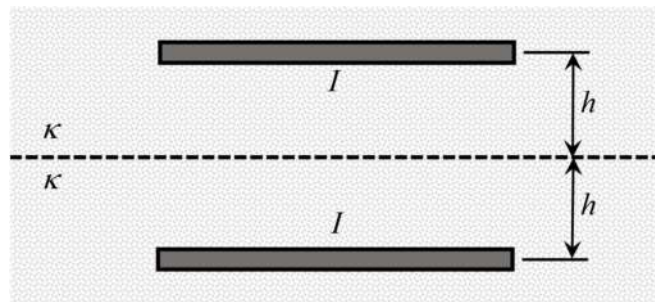
Zadatak 15.12. Za tankožičani pravocrtni cilindrični vodič duljine $\ell = 15$ m koji je ukopan paralelno s površinom LIH tla na dubini $h = 0,8$ m izračunajte otpor uzemljenja. Neka je električna otpornost tla $\rho = 100 \Omega\text{m}$. Neka je polumjer vodiča $r_0 = 5,5$ mm. Zadatak riješite pomoću metode srednjeg potencijala (MSP) uzevši da je vodič u numeričkom modelu aproksimiran samo jednim tankožičanim cilindričnim odsječkom.



Slika 15.55. Cilindrični vodič u LIH tlu

Rješenje:

Vodič se odslika u odnosu na površinu tla (Slika 15.56).



Slika 15.56. Stvarni i odslikani cilindrični vodič

Otpor uzemljenja (odsječka) cilindričnog vodiča opisan je izrazom:

$$R_{uz} = P(\ell, r_0) + P(\ell, 2 \cdot h) \quad (15.318)$$

gdje, prema izrazu (15.169), vrijedi da je:

$$P(\ell, v) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell^2} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (15.319)$$

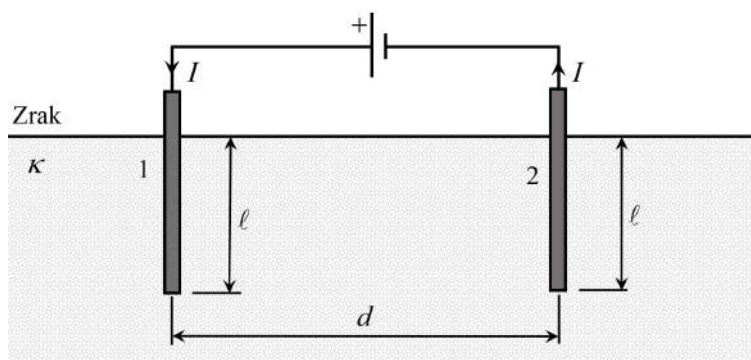
Ako se uvrste zadani podaci, onda se dobije da je:

$$R_{uz} = 8,06870065 + 2,15922329 = 10,22792394 \Omega \quad (15.320)$$

Pomoću programskog paketa UZEM*, otpor uzemljenja zadanog vodiča izračunat je tako da je vodič podijeljen na n međusobno jednakih odsječaka. Postupak je numerički iskonvergirao ako daljnje povećanje ukupnog broja jednakih odsječaka ne utječe na krajnji rezultat. Dakle, rezultat dobiven s dovoljno velikim brojem odsječaka može se smatrati numerički točnim rješenjem.

Numerički rezultati pokazuju da se za $n = 100$ međusobno jednakih odsječaka rezultat može smatrati točnim. Ako se vodič aproksimira samo jednim odsječkom, onda je greška u odnosu na točni rezultat 6,52 %. Ako se vodič podijeli na 3 jednaka odsječaka, onda je greška u odnosu na točni rezultat 6,31 %.

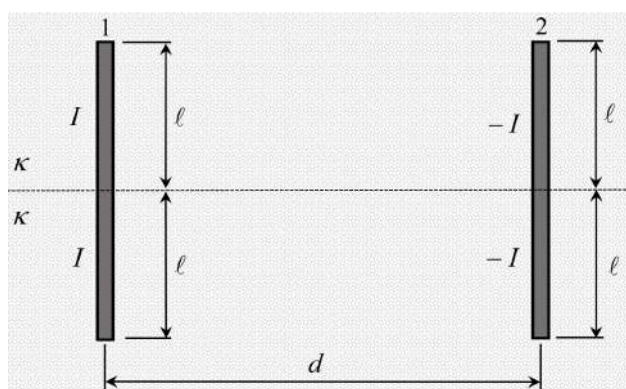
Zadatak 15.13. U LIH tlo električne otpornosti $\rho = 100 \Omega\text{m}$ ukopana su dva jednaka tankožičana cilindrična vodiča do dubine $\ell = 1 \text{ m}$, okomito na površinu tla. Neka je polumjer vodiča $r_0 = 0,01 \text{ m}$. Neka između vodiča teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 100 \text{ A}$. Po MSP izračunajte skalarni električni potencijal pojedinog vodiča i električni otpor između vodiča koji se suprotstavlja prolasku električne struje kroz tlo. Razmak između osi vodiča iznosi $d = 20 \text{ m}$. Dio vodiča koji je ukopan u tlo aproksimirajte samo jednim tankožičanim odsječkom vodiča duljine ℓ .



Slika 15.57. Dva tankožičana cilindrična vodiča

Rješenje:

Po metodi odslikavanja, jedan odsječak tankožičanog cilindričnog vodiča ukopan u LIH tlo električne provodnosti κ nadomještaju dva odsječka vodiča u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ (Slika 15.58).



Slika 15.58. Stvarni i odslikani odsječci tankožičanih cilindričnih vodiča

* Programski paket UZEM razvio je autor ovog udžbenika u okviru svoje doktorske disertacije

U ovom slučaju, odsječak vodiča i njegova slika mogu se razmatrati kao jedinstveni odsječak vodiča duljine $2 \cdot \ell$ koji u neograničeno LIH sredstvo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $\pm 2 \cdot I$.

Skalarni električni potencijali objedinjenih tankožičanih vodiča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = R_{1,1} \cdot 2 \cdot I + R_{1,2} \cdot (-2 \cdot I) = 2 \cdot R_{1,1} \cdot I - 2 \cdot R_{1,2} \cdot I \quad (15.321)$$

$$\Phi_2 = R_{2,1} \cdot 2 \cdot I + R_{2,2} \cdot (-2 \cdot I) = 2 \cdot R_{2,1} \cdot I - 2 \cdot R_{2,2} \cdot I \quad (15.322)$$

pa je električni otpor između tankožičanih vodiča opisan izrazom:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = 2 \cdot (R_{1,1} + R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1}) \quad (15.323)$$

U ovom posebnom slučaju, vrijede izrazi:

$$R_{1,1} = R_{2,2} \quad ; \quad R_{1,2} = R_{2,1} \quad ; \quad \Phi_1 = -\Phi_2 \quad (15.324)$$

jer su vodiči jednaki i imaju jednake polumjere.

Po metodi srednjeg potencijala, električni otpor između vodiča opisan je izrazom:

$$R = 4 \cdot (R_{1,1} - R_{1,2}) = 4 \cdot [P(2 \cdot \ell, r_0) - P(2 \cdot \ell, d)] \quad (15.325)$$

gdje je funkcija $P(\ell, v)$ opisana izrazom (15.169), odnosno izrazom (15.319).

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$R_{1,1} = P(2 \cdot \ell, r_0) = 39,760551797 \, \Omega \quad (15.326)$$

$$R_{1,2} = P(2 \cdot \ell, d) = 0,397556775 \, \Omega \quad (15.327)$$

$$R = 157,4519801 \, \Omega \quad (15.328)$$

Skalarni električni potencijali vodiča su:

$$\Phi_1 = -\Phi_2 = \frac{R}{2} \cdot I = 7,872599004 \, \text{kV} \quad (15.329)$$

Zadatak 15.14. U LIH tlo električne otpornosti $\rho = 100 \, \Omega\text{m}$ ukopana su dva cilindrična vodiča do dubine $\ell = 1 \, \text{m}$, okomito na površinu tla. Neka su polumjeri vodiča $r_{01} = 0,01 \, \text{m}$ i $r_{02} = 0,008 \, \text{m}$. Neka između vodiča teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 100 \, \text{A}$. Po MSP izračunajte skalarni električni potencijal pojedinog vodiča i električni otpor između vodiča koji se suprotstavlja prolasku električne struje kroz tlo. Razmak između osi vodiča iznosi $d = 20 \, \text{m}$. Dio vodiča koji je ukopan u tlo aproksimirajte samo jednim tankožičanim odsječkom vodiča duljine ℓ . Neka su vodiči prikazani na Slici 15.57.

Rješenje:

Ovaj se zadatak od prethodnog zadatka razlikuje samo u tome da su polumjeri vodiča različiti. U ovom slučaju električni otpor između tankožičanih vodiča je opisan izrazom:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = 2 \cdot (R_{1,1} + R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1}) \quad (15.330)$$

Po metodi srednjeg potencijala, električni otpor između vodiča opisan je izrazom:

$$R = 2 \cdot [P(2 \cdot \ell, r_{01}) + P(2 \cdot \ell, r_{02}) - 2 \cdot P(2 \cdot \ell, d)] \quad (15.331)$$

gdje je funkcija $P(\ell, \nu)$ opisana izrazom (15.169), odnosno izrazom (15.319).

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$R_{1,1} = P(2 \cdot \ell, r_{01}) = 39,760551797 \, \Omega \quad (15.332)$$

$$R_{2,2} = P(2 \cdot \ell, r_{02}) = 41,528331995 \, \Omega \quad (15.333)$$

$$R_{1,2} = R_{2,1} = P(2 \cdot \ell, d) = 0,397556775 \, \Omega \quad (15.334)$$

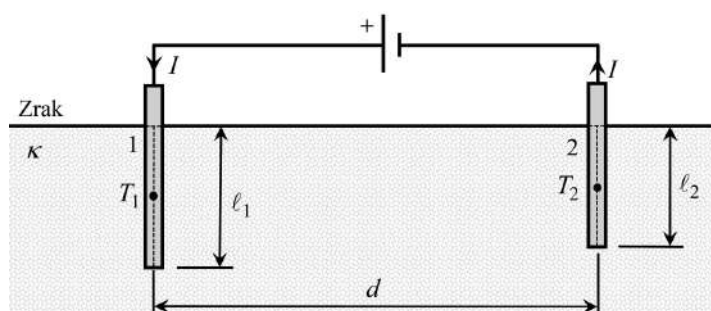
$$R = 160,9875405 \, \Omega \quad (15.335)$$

Skalarni električni potencijali vodiča su:

$$\Phi_1 = 2 \cdot (R_{1,1} - R_{1,2}) \cdot I = 7,872599004 \, \text{kV} \quad (15.336)$$

$$\Phi_2 = 2 \cdot (R_{2,1} - R_{2,2}) \cdot I = -8,226155044 \, \text{kV} \quad (15.337)$$

Zadatak 15.15. U LIH tlo električne otpornosti $\rho = 100 \, \Omega\text{m}$ ukopana su dva cilindrična vodiča do dubine $\ell_1 = 1 \, \text{m}$ i $\ell_2 = 0,8 \, \text{m}$, okomito na površinu tla. Neka su polumjeri vodiča $r_{01} = 0,01 \, \text{m}$ i $r_{02} = 0,008 \, \text{m}$. Neka između vodiča teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 100 \, \text{A}$. Izračunajte skalarni električni potencijal pojedinog vodiča i električni otpor između vodiča koji se suprotstavlja prolasku električne struje kroz tlo. Neka razmak između osi vodiča iznosi $d = 20 \, \text{m}$. Dio pojedinog vodiča koji je ukopan u tlo aproksimirajte samo jednim tankožičanim odsječkom vodiča. Po metodi srednjeg potencijala izračunajte ukupne vlastite otpore odsječaka vodiča, a ukupne međusobne otpore odsječaka vodiča izračunajte metodom kolokacije u točki. Neka se kolokacijske točke T_1 i T_2 nalaze na sredini ukopanog dijela vodiča.



Slika 15.59. Dva tankožičana cilindrična vodiča različite duljine

Rješenje:

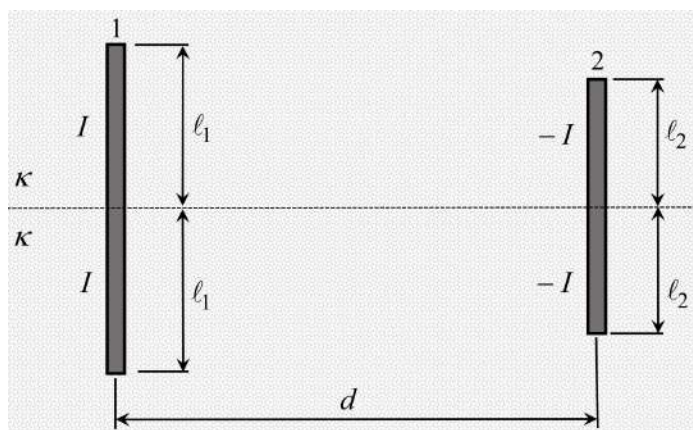
Po metodi odslikavanja, jedan odsječak tankožičanog cilindričnog vodiča ukopan u LIH tlo električne provodnosti κ nadomještaju dva odsječka vodiča u neograničenom LIH sredstvu električne provodnosti κ (Slika 15.60). U ovom slučaju, odsječak vodiča i njegova slika mogu se razmatrati kao jedinstveni odsječak vodiča dvostruke duljine koji u neograničeno LIH sredstvo ispušta vremenski konstantnu električnu struju jakosti $\pm 2 \cdot I$. Skalarni električni potencijali tankožičanih vodiča opisani su izrazima:

$$\Phi_1 = R_{1,1} \cdot 2 \cdot I + R_{1,2} \cdot (-2 \cdot I) = 2 \cdot R_{1,1} \cdot I - 2 \cdot R_{1,2} \cdot I \quad (15.338)$$

$$\Phi_2 = R_{2,1} \cdot 2 \cdot I + R_{2,2} \cdot (-2 \cdot I) = 2 \cdot R_{2,1} \cdot I - 2 \cdot R_{2,2} \cdot I \quad (15.339)$$

pa je električni otpor između tankožičanih vodiča opisan izrazom:

$$R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{I} = 2 \cdot (R_{1,1} + R_{2,2} - R_{1,2} - R_{2,1}) \quad (15.340)$$



Slika 15.60. Stvarni i odslikani odsječci tankožičanih cilindričnih vodiča

Ukupni vlastiti otpori odsječaka vodiča, po metodi srednjeg potencijala, opisani su izrazima:

$$R_{1,1} = P(2 \cdot \ell_1, r_{01}) \quad ; \quad R_{2,2} = P(2 \cdot \ell_2, r_{02}) \quad (15.341)$$

gdje je funkcija $P(\ell, v)$ opisana izrazom (15.169), odnosno izrazom (15.319).

Ukupni međusobni otpori odsječaka vodiča, po metodi kolokacije u točki, opisani su izrazima:

$$R_{1,2} = H(2 \cdot \ell_2, \ell_1/2, d) \quad ; \quad R_{2,1} = H(2 \cdot \ell_1, \ell_2/2, d) \quad (15.342)$$

gdje je, prema izrazu (15.165), funkcija $H(\ell, u, v)$ opisana izrazom:

$$H(\ell, u, v) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot \ell} \cdot \ln \frac{\sqrt{v^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (15.343)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$R_{1,1} = P(2 \cdot \ell_1, r_{01}) = 39,760551797 \, \Omega \quad (15.344)$$

$$R_{2,2} = P(2 \cdot \ell_2, r_{02}) = 49,700689746 \, \Omega \quad (15.345)$$

$$R_{1,2} = H(2 \cdot \ell_2, \ell_1/2, d) = 0,3976573466 \, \Omega \quad (15.346)$$

$$R_{2,1} = H(2 \cdot \ell_1, \ell_2/2, d) = 0,3976425012 \, \Omega \quad (15.347)$$

$$R = 177,3318834 \, \Omega \quad (15.348)$$

Skalarni električni potencijali vodiča su:

$$\Phi_1 = 2 \cdot (R_{1,1} - R_{1,2}) \cdot I = 7,87257899 \, \text{kV} \quad (15.349)$$

$$\Phi_2 = 2 \cdot (R_{2,1} - R_{2,2}) \cdot I = -9,860609449 \, \text{kV} \quad (15.350)$$

Ukupni međusobni otpor $R_{1,2}$ jednak je skalarnom električnom potencijalu kolokacijske točke T_1 uslijed jedinične električne struje odsječaka vodiča 2 (i njegove slike), dok je ukupni međusobni otpor $R_{2,1}$ jednak skalarnom električnom potencijalu kolokacijske točke T_2 uslijed jedinične električne struje odsječaka vodiča 1 (i njegove slike).

16. MAGNETOSTATIČKO POLJE

Statičko magnetsko polje ili magnetostatičko polje jest polje koje stvaraju vremenski konstantne električne struje i permanentni magneti. Vremenski konstantne električne struje koje teku dobrim vodičima stvaraju stacionarno strujno polje i magnetostatičko polje, koja se, uz odličnu aproksimaciju, mogu smatrati neovisnim.

Dva osnovna slučaja magnetostatičkog polja su:

- magnetostatičko polje u bestrujnom području ($\vec{J}_{\text{uk}} = 0$),
- magnetostatičko polje u strujnom području ($\vec{J}_{\text{uk}} \neq 0$).

Strujno područje jest područje u kojem postoje nezavisni izvori magnetostatičkog polja, a to je vremenski konstantna električna struja.

Magnetostatičko polje u linearnom i izotropnom bestrujnom području analogno je elektrostatičkom polju i stacionarnom strujnom polju u linearnom i izotropnom bezizvornom području.

16.1. Maxwellove jednadžbe magnetostatičkog polja

Maxwellove diferencijalne jednadžbe magnetostatičkog polja u strujnom području glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \equiv \vec{J} \quad (16.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (16.2)$$

gdje je plošna gustoća električne struje nezavisnih izvora \vec{J} poznata funkcija. Pritom sredstvo može biti savršeni dielektrik ili pak vodljivo sredstvo. Ako se razmatra magnetostatičko polje u vodljivom sredstvu, onda je vremenski konstantna električna struja, odnosno plošna gustoća električne struje nezavisnih izvora \vec{J} , koja stvara magnetostatičko polje, izolirana od tog sredstva. Dakle, od značajki sredstva za magnetostatičko polje važna je samo njegoja magnetska permeabilnost μ .

Maxwellove diferencijalne jednadžbe magnetostatičkog polja u bestrujnom području glase:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (16.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (16.4)$$

Dakle, u općem slučaju, Maxwellove diferencijalne jednadžbe magnetostatičkog polja glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (16.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (16.6)$$

U općem slučaju, Maxwellove integralne jednadžbe magnetostatičkog polja glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{\text{ob}} \quad (16.7)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad ; \quad S \equiv \partial V \quad (16.8)$$

gdje je I_{ob} jakost vremenski konstantne električne struje koja teče kroz orijentiranu plohu S omeđenu orijentiranom zatvorenom krivuljom K (Slika 1.4). Drugim riječima, to je jakost struje koja je obuhvaćena orijentiranom zatvorenom krivuljom K , uz uvažavanje pravila desne ruke. Maxwellova integralna jednadžba (16.7) jest Ampèreov zakon.

16.2. Magnetska svojstva sredstva

Prema izrazu (3.3), vrijedi jednačba građe:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) \quad (16.9)$$

gdje je \vec{M} vektor magnetizacije.

U slučaju izotropnog sredstva, jednačba građe glasi:

$$B = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu \cdot H \quad (16.10)$$

gdje je μ_r relativna magnetska permeabilnost sredstva, dok je χ_m magnetska susceptibilnost sredstva.

U LIH sredstvu magnetska permeabilnost μ je skalarna konstanta, a u nelinearnom izotropnom sredstvu μ je skalarna funkcija ovisna o iznosu jakosti magnetskog polja.

Magnetska svojstva sredstva moguće je objasniti međudjelovanjem vanjskog magnetskog polja i mikroskopskih magnetskih dipola atoma i molekula, koje stvara gibanje vezanih elektrona u atomu. Rezultirajuća promjena koja se iskazuje u mikroskopskim magnetskim dipolnim momentima u sredstvu naziva se *magnetiziranjem sredstva*.

S obzirom na magnetska svojstva, postoji pet osnovnih vrsta sredstava (materijala):

- dijamagnetici ($\mu_r < 1, \mu_r \approx 1$) - npr. C, Cu, Ag, Zn, voda,
- paramagnetici ($\mu_r > 1, \mu_r \approx 1$) - npr. Al, Pb,
- feromagnetici ($\mu_r \gg 1$) - npr. Fe, Ni, Co, Gd,
- antiferomagnetici ($\mu_r = 1$) - npr. MnO,
- ferimagnetici ($\mu_r \gg 1$) - npr. Fe₃O₄, feriti.

Utjecaj dijamagnetika i paramagnetika na magnetsko polje u većini slučajeva može se zanemariti, tj. može se uzeti da im je relativna magnetska permeabilnost $\mu_r = 1$.

Samo dijamagnetici teže izlasku iz magnetskog polja jer imaju manju magnetsku permeabilnost od magnetske permeabilnosti vakuuma (zraka).

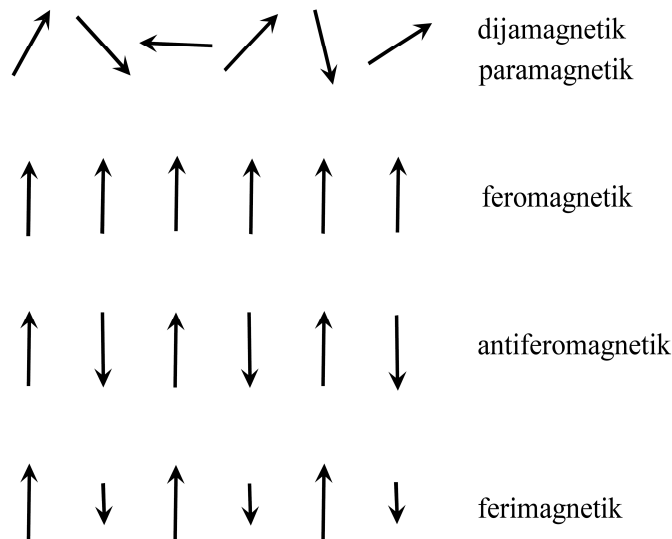
Antiferomagnetici (npr. manganov fluorid, manganov dioksid, manganov oksid, nikalfluorid) kod niskih temperatura ne reagiraju na magnetsko polje, a iznad Néelove temperature postaju paramagnetici. Ispod Neelove temperature, njima su susjedni mikroskopski magnetski dipoli orijentirani u međusobno suprotnim smjerovima, uslijed djelovanja vanjskog polja.

Razlika između feromagnetika i ferimagnetika jest u tome što su molekularni magnetski dipoli unutar svake domene feromagnetika međusobno paralelni, dok jake međuatomske veze u ferimagnetskim materijalima prisiljavaju neke molekularne magnetske dipole u svakoj domeni da budu antiparalelni glavnom smjeru magnetiziranja u magnetskoj domeni (Slika 16.1).

Podskup ferimagnetskih materijala poznatih pod imenom *feriti* posebno je važan u tehnici jer ti materijali imaju znatno manju električnu provodnost od feromagnetskih materijala (to su po svojoj električnoj provodnosti poluvodiči), dok su im magnetska svojstva nešto lošija nego u feromagnetika. Gubici uslijed vrtložnih struja kod ferita znatno su manji nego kod feromagnetskih materijala pa se feriti mogu koristiti na visokim frekvencijama.

Feromagnetski materijali su željezo (Fe), kobalt (Co), nikal (Ni), gadolinij (Gd), disprozij (Dy), terbij (Tb), holmij (Ho), erbij (Er) i njihove slitine. Od navedenih kemijskih elemenata najizrazitija feromagnetska svojstva imaju Fe, Co, Ni i Gd, koji se nazivaju osnovnim feromagnetskim materijalima. Feromagnetska svojstva ima slitina mangana, bakra i aluminijska te slitina mangana, srebra i aluminijska.

U feromagneticima postoje mikroskopska područja spontane magnetizacije koja se nazivaju magnetskim domenama. Te se domene zakreću pod djelovanjem vanjskog magnetskog polja poput permanentnih magneta.



Slika 16.1. Magnetski dipoli u magnetskim domenama različitih materijala

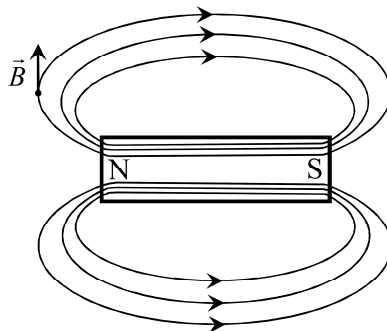
16.3. Prirodni magnet i elektromagnet

Magnetizam je otkriven u Kini i Europi nekih 800 godina prije naše ere. Prirodni magnet jest permanentni magnet koji se nalazi u prirodi, a umjetni permanentni magneti se mogu dobiti magnetizacijom magnetski tvrdih materijala. Permanentni magnet ima dva pola:

- sjeverni magnetski pol (N – engl. *North*),
- južni magnetski pol (S – engl. *South*).

Engleski fizičar i kraljičin liječnik William Gilbert je utvrdio da se istoimeni polovi magneta odbijaju, a raznoimeni polovi privlače. Tu je spoznaju objavio 1600. godine u svojoj knjizi *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure (O magnetu, magnetskim tijelima i o velikom magnetu Zemlji)*, a koja je poznata i pod imenom *De magnete*. Mnogi objavljivanje te knjige smatraju početkom razvoja znanosti o elektricitetu i magnetizmu. U toj je knjizi opisano više od 600 pokusa, a mnoge je izveo s metalnim modelom Zemlje – *terrellom*. William Gilbert je zaključio da je i sama Zemlja prirodni magnet, što je i razlog orijentacije magnetske igle kompasa. Potvrdio je rezultate Peregrinusovog pokusa iz kojeg proizlazi da ne postoje izolirani magnetski polovi kao ni magnetski naboji, odnosno da se dijeljenjem magneta njegovi polovi ne mogu razdvojiti. Budući da se još u antičkoj Grčkoj znalo da jantar (grč. *elektron*) nakon trljanja tkaninom privlači sitne predmete poput pramenova vune, Gilbert je u knjizi *De magnete* uveo pojam *electricus* u značenju *poput jantara*, odakle je proizišlo ime elektriciteta i elektrotehnike. Tvari koje pokazuju slična svojstva kao i jantar nazvao je električnim tvarima. Između ostalog, uveo je pojmove električne sile i magnetskog pola.

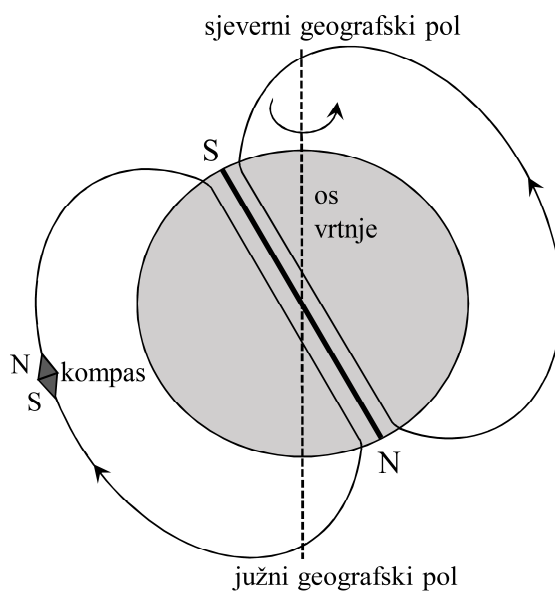
Magnetsko polje se zorno prikazuje pomoću magnetskih silnica, odnosno linija magnetske indukcije, gdje je magnetska indukcija tangencijalna u odnosu na silnicu. Magnetske silnice su zatvorene krivulje koje izlaze iz sjevernog magnetskog pola magneta i ulaze u južni magnetski pol magneta (Slika 16.2).



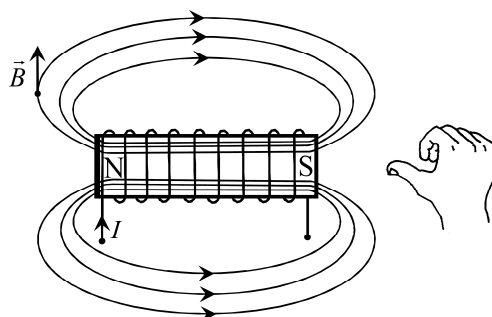
Slika 16.2. Magnetske silnice ravnog permanentnog magneta

Silnice su linije u čijem smjeru djeluje sila, ali na naelektriziranu česticu koja se giba duž magnetske silnice ne djeluje magnetska sila, koja je dio Lorentzove sile. Međutim, duž magnetske silnice se postavlja mali probni permanentni magnet kao što je magnet kompasa (Slika 16.3). Sjeverni magnetski pol magneta odbija sjeverni magnetski pol kompasa i privlači južni magnetski pol kompasa. Dakle, magnetska silnica pokazuje smjer djelovanja magnetske sile na sjeverni magnetski pol probnog magneta. Feromagnetske materijale privlače oba pola magneta jer sredstvo veće permeabilnosti teži zauzeti dio prostora u kojem se nalazi sredstvo manje permeabilnosti kao što je zrak.

Zemlja je veliki prirodni magnet (Slika 16.3). Južni magnetski pol Zemlje nalazi se u blizini njenog sjevernog geografskog pola. Međutim, južni magnetski pol Zemlje naziva se i sjevernim geomagnetskim polom Zemlje, što ponekad stvara nepotrebnu zbrku. Danas mnogi znanstvenici tvrde da magnetski polovi zamjenjuju mjesta te da je zadnja takva zamjena bila prije 780 tisuća godina. Do tog se zaključka došlo jer neke stijene sadrže podatke o jakosti i smjeru magnetskog polja u vrijeme njihovog formiranja. Zemljino magnetsko polje smanjuje štetan utjecaj kozmičkog zračenja i solarnog vjetra. Stoga za vrijeme svake promjene polova nestaju neke vrste i nastaju nove uslijed mutacija. Prema jednoj od teorija, Zemljino magnetsko polje stvaraju električne struje u rastopljenoj željeznoj Zemljinoj jezgri koja ne rotira sasvim pravilno (postoje turbulencije u njenom toku) pa je stoga i rezultirajuće magnetsko polje nepravilno i nije usmjereno duž osi rotacije Zemlje. Zbog toga je za precizno korištenje kompasa potrebno za svako mjesto na Zemlji poznavati tzv. magnetsku deklinaciju, a to je kut između geografskog meridijana i magnetske silnice (smjera u kojem pokazuje kompas). Krivulje koje spajaju mjesta na Zemlji koja imaju istu magnetsku deklinaciju zovu se izogone.



Slika 16.3. Zemljino magnetsko polje

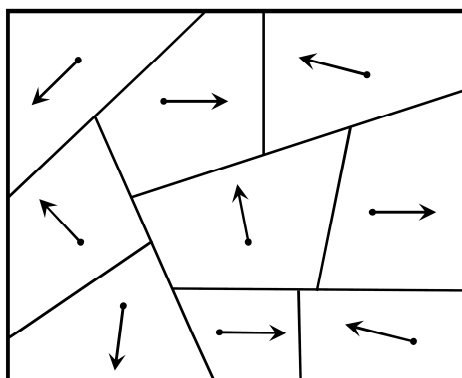


Slika 16.4. Magnetske silnice ravnog elektromagneta

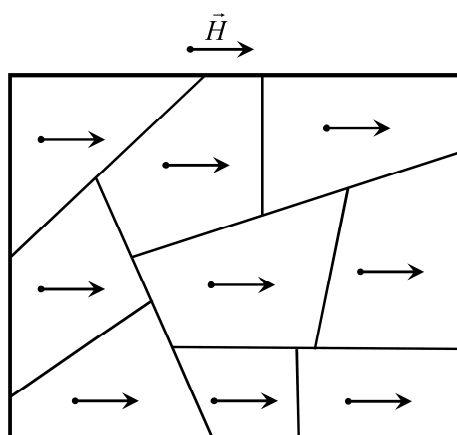
Elektromagnet nastaje ako se oko feromagnetske jezgre namota zavojnica i kroz nju pusti vremenski konstantna električna struja. Smjer magnetskog polja, odnosno položaj sjevernog i južnog magnetskog pola magneta određuje se po pravilu desne ruke (Slika 16.4). Savijeni prsti pokazuju smjer vremenski konstantne električne struje, dok ispruženi palac pokazuje smjer magnetske silnice kroz tijelo elektromagneta.

16.4. Feromagnetizam

U feromagneticima se mikroskopska područja spontane magnetizacije koja se nazivaju magnetskim domenama pod djelovanjem vanjskog magnetskog polja zakreću poput permanentnih magneta. U nemagnetiziranom materijalu magnetske domene su orijentirane kaotično (Slika 16.5).

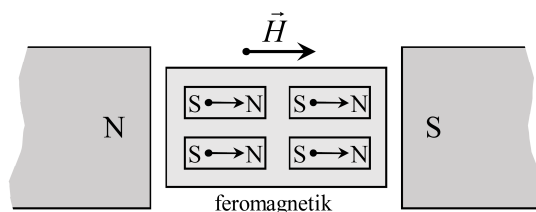


Slika 16.5. Orijentacija magnetskih domena u nemagnetiziranom feromagnetiku



Slika 16.6. Orijentacija magnetskih domena u magnetski zasićenom feromagnetiku

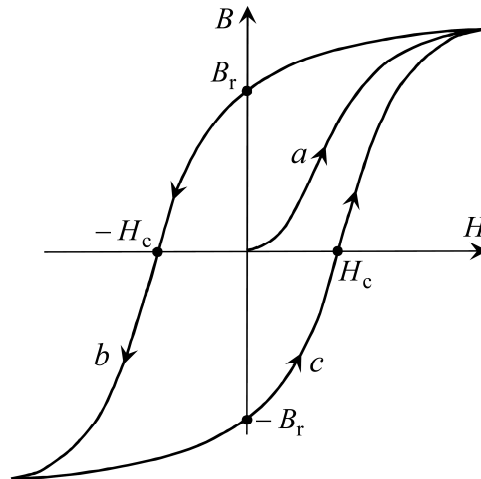
Pod djelovanjem vanjskog magnetskog polja, magnetske se domene u feromagnetiku orijentiraju u smjeru djelovanja vanjskog polja. Pod djelovanjem dovoljno jakog vanjskog magnetskog polja, sve su magnetske domene orijentirane u smjeru djelovanja vanjskog polja (Slika 16.6). Tada se govori o magnetskom zasićenju. Daljnjim povećanjem pobude, odnosno jakosti vanjskog magnetskog polja, u feromagnetiku zanemarivo malo raste magnetska indukcija. Orijentiranje magnetskih domena u feromagnetiku pod djelovanjem vanjskog polja posljedica je toga što se istoimeni magnetski polovi odbijaju, dok se raznoimeni magnetski polovi privlače (Slika 16.7).



Slika 16.7. Djelovanje vanjskog magnetskog polja na magnetske domene

16.5. Magnetska histereza

Histereza je pojava koja uzrokuje da magnetska indukcija (B) zaostaje za jakošću magnetskog polja (H) tako da krivulja magnetiziranja za rastuća i padajuća polja nije ista. Petlja koja predstavlja krivulju magnetiziranja naziva se petlja histereze ili pak histerezna petlja (Slika 16.8). Postojanje magnetske histereze ima za posljedicu da trenutno stanje magnetiziranja materijala ovisi o njegovoj magnetskoj povijesti.



Slika 16.8. Grafički prikaz magnetske histereze $B(H)$

Krivulja a na Slici 16.8 jest krivulja prvog magnetiziranja, dok je zatvorena krivulja $b \cup c$ histerezna petlja koja nastaje pri magnetiziranju izmjeničnom električnom strujom. Veličina B_r je tzv. remanentni magnetizam ili remanencija, dok veličina H_c ima više naziva, a to su: koercitivnost, koercitivno polje i koercitivna sila.

Ako se feromagnetik pod utjecajem vanjske pobude magnetizira u jednom smjeru te se potom ta pobuda ukloni, feromagnetik se neće u potpunosti demagnetizirati. Remanentni magnetizam je magnetska indukcija zaostala u feromagnetiku izloženom vanjskom magnetskom polju nakon što se djelovanje tog vanjskog magnetskoga polja ukloni. Koercitivnost je jakost magnetskog polja suprotnog smjera od remanentnog magnetizma koja je potrebna za demagnetizaciju feromagnetika.

Ako je feromagnetik magnetiziran, tj. ako su mu magnetske domene dominantno orijentirane u jednom smjeru, onda je potrebna neka energija za njegovu demagnetizaciju. To svojstvo feromagnetika je osnova za tvorbu magnetske memorije.

Magnetski materijali koji imaju relativno veliki remanentni magnetizam i relativno veliku koercitivnost zovu se tvrdim magnetskim materijalima, dok se oni drugi nazivaju mekim magnetski materijalima. Jezgre transformatora i jezgre zavojnica koje se rabe u elektronici načinjene su od magnetski mekog materijala. Površina petlje histereze proporcionalna je snazi toplinskih gubitaka u feromagnetiku uslijed histereze.

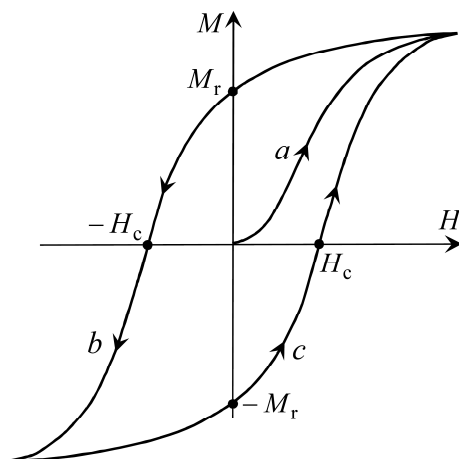
U fizici se histerezna petlja prikazuje kao ovisnost magnetizacije (M) o jakosti vanjskog magnetskog polja (H), što daje bolji uvid u magnetizaciju sredstva, ali se u elektrotehničkoj praksi ne koristi (Slika 16.9). Veličina M_r je tzv. remanentna magnetizacija.

Prema izrazu (16.9), vrijedi da je:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \vec{P}_m \quad ; \quad \vec{P}_m = \mu_0 \cdot \vec{M} \quad (16.11)$$

gdje je \vec{P}_m vektor magnetske polarizacije.

Petlja histereze $M = M(H)$ ekvivalentna je petlji magnetske histereze $P_m = P_m(H)$, a za visokopermeabilne materijale približno je jednaka petlji magnetske histereze $B(H)$.



Slika 16.9. Grafički prikaz magnetske histereze $M(H)$

16.6. Magnetostatičko polje u bestrujnom području

U linearnom i izotropnom sredstvu bez izvora polja postoji analogija između magnetostatičkog polja, elektrostatickog polja i stacionarnog strujnog polja (Tablica 15.2). U slučaju magnetostatičkog polja, područje bez izvora polja naziva se bestrujnim područjem, a to je područje u kojem je plošna gustoća električne struje nezavisnih izvora jednaka nuli. U bestrujnom području umjesto vektorskog magnetskog potencijala može se koristiti skalarni magnetski potencijal.

Osnovne jednačbe magnetostatičkog polja u linearnom i izotropnom bestrujnom području glase:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 ; \nabla \cdot \vec{B} = 0 ; \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} ; \Delta \varphi_m = 0 ; \vec{H} = -\nabla \varphi_m \quad (16.12)$$

gdje je φ_m skalarni magnetski potencijal.

Analogno elektrostatickom polju, vrijedi da je:

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB} \quad (16.13)$$

gdje je:

V_{AB} - magnetski napon između točke A i točke B,

φ_{mA} - skalarni magnetski potencijal točke A,

φ_{mB} - skalarni magnetski potencijal točke B.

Za magnetske krugove, analogno strujnim krugovima, vrijede Kirchhoffovi zakoni:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad (16.14)$$

$$\sum_{k=1}^N \Theta_k = \sum_{j=1}^M V_j = \sum_{j=1}^M \Phi_j \cdot R_{mj} \quad ; \quad R_{mj} = \frac{\ell_j}{\mu_j \cdot S_j} \quad (16.15)$$

gdje je:

Φ_i, Φ_j - magnetski tok,

Θ_k - magnetomotorna sila,

R_{mj} - magnetski otpor,

V_j - magnetski napon.

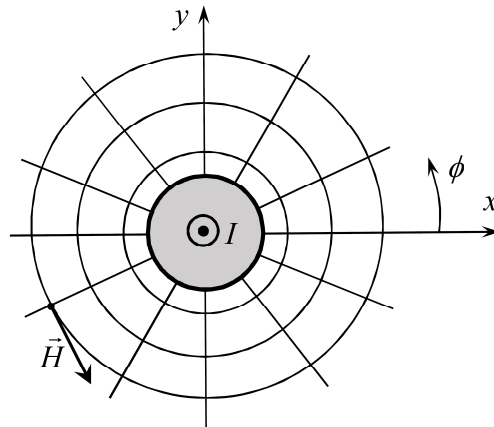
Izraz (16.14) kaže da je suma magnetskih tokova koji ulaze u razmatrani čvor magnetskog kruga jednak nuli, dok izraz (16.17) kaže da je duž zatvorene krivulje (konture) suma magnetomotornih sila jednaka sumi magnetskih napona.

Drugi Kirchhoffov zakon (16.15) može se napisati i u češće korištenom obliku:

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{O}_k = \sum_{j=1}^m H_j \cdot \ell_j \quad (16.16)$$

što je, ustvari, Ampèreov zakon.

Za razliku od skalarnog električnog potencijala, skalarni magnetski potencijal nije uvijek jednoznačan, što znači da u istoj točki može imati dvije različite vrijednosti. Za ilustraciju može poslužiti skalarni magnetski potencijal oko osamljenog beskonačno dugog pravocrtnog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom I (Slika 16.10). Neka se beskonačno dugi pravocrtni vodič nalazi duž osi z cilindričnog koordinatnog sustava (r, ϕ, z) . Na Slici 16.10 prikazane su silnice i ekvipotencijalne linije u bestrujnom području. Silnice su koncentrične kružnice sa središtem na osi vodiča, dok su ekvipotencijalne linije radijalne zrake koje su okomite na silnice.



Slika 16.10. Ekvipotencijalne linije i magnetske silnice oko beskonačno dugog pravocrtnog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) , skalarni magnetski potencijal u bestrujnom području ovisi samo o kutu ϕ pa vrijedi da je:

$$\Delta \varphi_m = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \phi^2} = 0 \quad (16.17)$$

odakle slijedi da je:

$$\varphi_m = C_1 \cdot \phi + C_2 \quad (16.18)$$

a nepoznate konstante C_1 i C_2 mogu se odrediti iz graničnih uvjeta:

$$\varphi_m|_{\phi=0} = I \quad ; \quad \varphi_m|_{\phi=2\pi} = 0 \quad (16.19)$$

pa se konačno dobije da je raspodjela skalarnog magnetskog potencijala opisana izrazom:

$$\varphi_m = I \cdot \left(1 - \frac{\phi}{2 \cdot \pi}\right) \quad (16.20)$$

Jakost magnetskog polja opisana je izrazom:

$$H = H_\phi = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial \phi} = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} \quad (16.21)$$

16.7. Biot-Savartov zakon

Osnovne jednačbe magnetostatičkog polja u strujnom području, unutar kojeg se nalaze nezavisni izvori magnetostatičkog polja, glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (16.22)$$

dok je u linearnom i izotropnom sredstvu raspodjela vektorskog magnetskog potencijala opisana Poissonovom diferencijalnom jednačbom, koja glasi:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (16.23)$$

gdje je \vec{J} vektor plošne gustoće vremenski konstantne električne struje, a to je nezavisni izvor magnetostatičkog polja u razmatranom području.

Partikularno rješenje (rješenje u homogenom i neograničenom sredstvu) Poissonove diferencijalne jednačbe (16.23) glasi:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J} \cdot dV}{r} \quad (16.24)$$

gdje je r udaljenost između točke izvora i točke promatranja.

Vrijedi da je:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \left(\nabla \times \frac{\vec{J}}{r} \right) \cdot dV = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \times \vec{J} \cdot dV \quad (16.25)$$

jer je:

$$\nabla \times \vec{J} = 0 \quad (16.26)$$

Nadalje je:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}_0}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (16.27)$$

pa se nakon uvrštenja izraza (16.27) u izraz (16.25) dobije sljedeći izraz, pojašnjen Slikom 16.11:

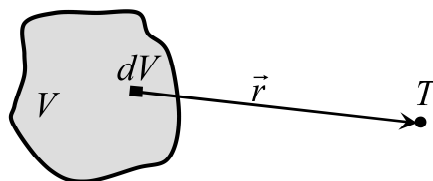
$$\vec{B} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} \cdot dV \quad (16.28)$$

ili drukčije pisano:

$$\vec{H} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} \cdot dV \quad (16.29)$$

Ova dva izraza poznata su pod imenom Biot-Savartov zakon. To je integralni oblik Biot-Savartovog zakona, dok diferencijalni oblik Biot-Savartovog zakona glasi:

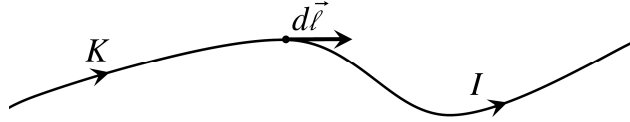
$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{(\vec{J} \times \vec{r}) \cdot dV}{r^3} \quad ; \quad d\vec{H} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{(\vec{J} \times \vec{r}) \cdot dV}{r^3} \quad (16.30)$$



Slika 16.11. Slika pridružena Biot-Savartovom zakonu

16.8. Magnetsko polje tankožičanog vodiča

Tankožičana aproksimacija vodiča podrazumijeva da u numeričkom modelu električna struja teče duž osi vodiča. Drugim riječima, tankožičani vodič* je idealizirani vodič predstavljen geometrijskom crtom. Neka kroz tankožičani vodič, koji je u općem slučaju krivocrtan, teče vremenski konstantna električna struja jakosti I (Slika 16.12).



Slika 16.12. Tankožičani vodič protječan vremenski konstantnom električnom strujom jakosti I

Za tankožičani vodič, vrijedi da je:

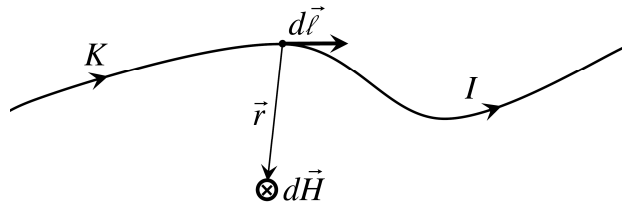
$$\vec{J} \cdot dV = I \cdot d\vec{\ell} \quad (16.31)$$

a u neograničenom LIH sredstvu vrijedi da je:

$$\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{d\vec{\ell}}{r} \quad ; \quad d\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{r} \quad (16.32)$$

dok je Biot-Savartov zakon opisan sljedećim izrazima (Slika 16.13):

$$\vec{H} = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad ; \quad d\vec{H} = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (16.33)$$



Slika 16.13. Diferencijal jakosti magnetskog polja

Po potrebi se za udaljenost između točke izvora i točke promatranja umjesto oznake r može koristiti oznaka R pa tada vrijede izrazi:

$$\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{d\vec{\ell}}{R} \quad ; \quad d\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{R} \quad (16.34)$$

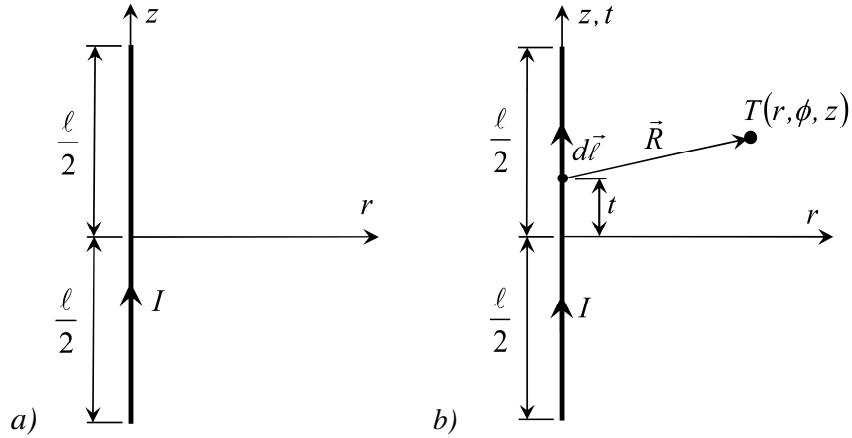
$$\vec{H} = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3} \quad ; \quad d\vec{H} = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3} \quad (16.35)$$

16.8.1. Jakost magnetskog polja pravocrtnog tankožičanog vodiča

Neka kroz kratki pravocrtni tankožičani vodič, duljine ℓ , teče vremenski konstantna električna struja jakosti I (Slika 16.14-a). Neka se vodič nalazi u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ . Cilj je dobiti izraz za raspodjelu jakosti magnetskog polja oko vodiča, pošavši od Biot-Savartovog zakona.

Budući da je raspodjela jakosti magnetskog polja osnosimetrična s obzirom na pravac na kojem leži tankožičani vodič, rješenje se traži u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) . Raspodjela jakosti magnetskog polja ne ovisi o kutu ϕ pa stoga ima samo ϕ -komponentu. Integracija po osi tankožičanog vodiča provodi se prema Slici 16.14-b.

* U literaturi se tankožičani vodič ujedno naziva i električnom strujnicom



Slika 16.14. Kratki pravocrtni tankožičani vodič i integracija po osi vodiča

Iz izraza (16.35) slijedi da je:

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{\sin \vartheta \cdot R \cdot dl}{R^3} \quad ; \quad \vartheta = \angle(\vec{R}, d\vec{l}) \quad (16.36)$$

pa je:

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{r \cdot dt}{R^3} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{I \cdot r}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dt}{\left(\sqrt{(t-z)^2 + r^2}\right)^3} \quad (16.37)$$

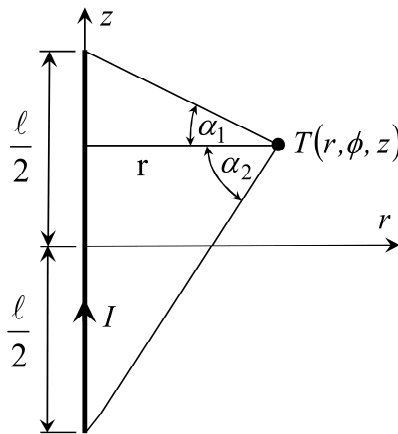
gdje je:

$$dl = dt \quad ; \quad \sin \vartheta = \frac{r}{R} \quad ; \quad R = \sqrt{(z-t)^2 + r^2} \quad (16.38)$$

Nakon provedene analitičke integracije, iz izraza (16.37), slijedi da je:

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{I \cdot r}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{t-z}{r^2 \cdot \sqrt{(t-z)^2 + r^2}} \Bigg|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \quad (16.39)$$

gdje su kutovi α_1 i α_2 prikazani na Slici 16.15.



Slika 16.15. Grafički prikaz kutova α_1 i α_2

Prema Slici 16.15, vrijedi da je:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\frac{\ell}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - z\right)^2 + r^2}} \quad ; \quad \sin \alpha_2 = \frac{\frac{\ell}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} + z\right)^2 + r^2}} \quad (16.40)$$

U posebnom slučaju kada je $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$ (Slika 16.16-a), vrijedi da je:

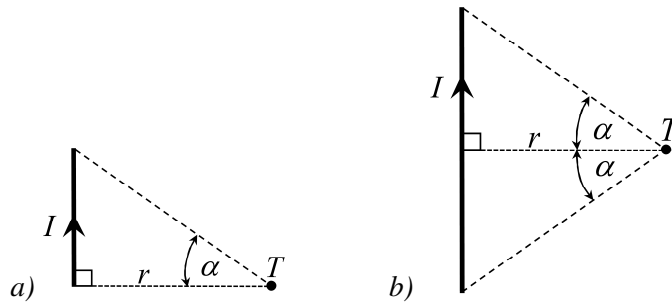
$$H = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sin \alpha \quad (16.41)$$

U posebnom slučaju kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (Slika 16.16-b), vrijedi da je:

$$H = \frac{2 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sin \alpha = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sin \alpha \quad (16.42)$$

Za beskonačno dugi pravocrtni vodič vrijedi da je:

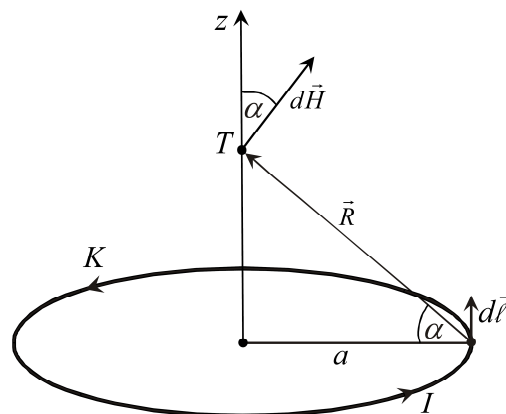
$$\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\phi \quad (16.43)$$



Slika 16.16. Posebni slučajevi pravocrtnog tankožičanog vodiča

16.8.2. Jakost magnetskog polja duž osi kružne tankožičane petlje

Neka kroz kružnu tankožičanu petlju (električnu strujnicu), polumjera a , teče vremenski konstantna električna struja jakosti I (Slika 16.17). Neka se tankožičana kružna petlja nalazi u neograničenom LHM sredstvu magnetske permeabilnosti μ . Cilj je dobiti izraz za raspodjelu jakosti magnetskog polja duž osi tankožičane kružne petlje, pošavši od Biot-Savartovog zakona.



Slika 16.17. Izračun jakosti magnetskog polja duž osi kružne tankožičane petlje

Budući da je raspodjela jakosti magnetskog polja osnosimetrična, rješenje se traži u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, ϕ, z) . Duž osi tankožičane petlje, odnosno duž osi z cilindričnog koordinatnog sustava, jakost magnetskog polja ima samo z -komponentu. Integracija po tankožičanom vodiču provodi se prema Slici 16.17, a za izračun jakosti magnetskog polja duž osi z treba integrirati samo z -komponentu diferencijala jakosti magnetskog polja.

Iz izraza (16.35) slijedi da je:

$$dH = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\ell}{R^2} \quad ; \quad \angle(d\vec{\ell}, \vec{R}) = \frac{\pi}{2} \quad (16.44)$$

pa je, prema Slici 16.17:

$$dH_z = \cos\alpha \cdot dH = \frac{I \cdot \cos\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\ell}{R^2} \quad (16.45)$$

Uz supstitucije:

$$\cos\alpha = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad ; \quad R = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (16.46)$$

iz izraza (16.45) slijedi da je:

$$dH_z = \frac{I \cdot a}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\ell}{\sqrt{(z^2 + a^2)^3}} \quad (16.47)$$

pa je:

$$H = H_z = \frac{I \cdot a}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{(z^2 + a^2)^3}} \cdot \oint_K d\ell = \frac{I \cdot a^2}{2 \cdot \sqrt{(z^2 + a^2)^3}} \quad (16.48)$$

U posebnom slučaju, u centru kružne tankožičane petlje, jakost magnetskog polja opisana je izrazom:

$$H|_{z=0} = \frac{I}{2 \cdot a} \quad (16.49)$$

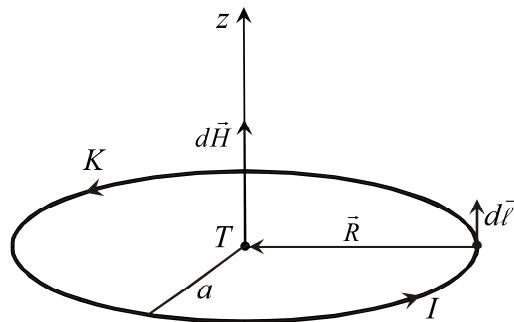
Izraz za jakost magnetskog polja u centru kružne tankožičane petlje (Slika 16.18) može se lakše dobiti ako se u izraz (16.44) uvrsti supstitucija $R = a$ tako da je:

$$dH = dH_z = \frac{I \cdot d\ell}{4 \cdot \pi \cdot a^2} \quad (16.50)$$

pa je:

$$H = H_z = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot a^2} \cdot \oint_K d\ell = \frac{I}{2 \cdot a} \quad (16.51)$$

jer u ovom posebnom slučaju svaki infinitezimalni djelić tankožičane petlje daje jakost magnetskog polja u smjeru osi z .

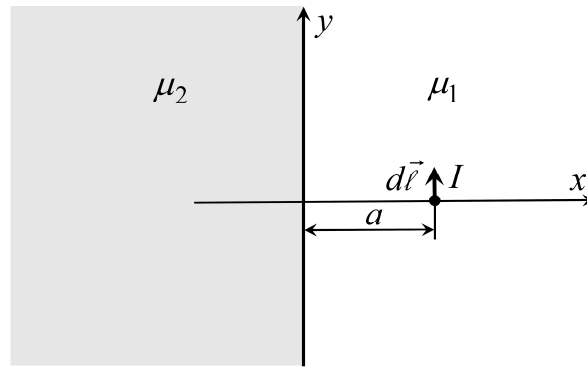


Slika 16.18. Izračun jakosti magnetskog u središtu kružne tankožičane petlje

16.9. Odslikavanje odsječka tankožičanog vodiča

16.9.1. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča paralelan graničnoj ravni

Neka se infinitesimalni (beskonačno mali) odsječak tankožičanog vodiča, duljine $d\ell$, protjecan vremenski konstantnom električnom strujom jakosti I nalazi ispred homogenog poluprostora na udaljenosti a . Neka se infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča nalazi u poluprostoru magnetske permeabilnosti μ_1 , a neka preostali dio prostora ima magnetsku permeabilnost μ_2 (Slika 16.19). Neka se, radi jednostavnosti, infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča nalazi na x -osi pravokutnog koordinatnog sustava (x, y, z) te neka vremenski konstantna električna struja kroz infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča teče u smjeru osi y .



Slika 16.19. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča ispred homogenog poluprostora paralelan graničnoj ravni

Izrazi za raspodjelu diferencijala jakosti magnetskog polja u oba poluprostora mogu se odrediti metodom odslikavanja. Položaj nadomjesnih infinitesimalnih odsječaka tankožičanog vodiča suvislo je odabran, a njihovi iznosi se određuju na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta (Slike 16.20 i 16.21).

Prema Slici 16.20, jakost magnetskog polja u sredstvu 1, koje se proglašava neograničenim, stvaraju stvarna električna struja I i nadomjesna električna struja I_2 čiji je položaj zrcalan u odnosu na stvarnu električnu struju. Prema Slici 16.21, jakost magnetskog polja u sredstvu 2, koje se proglašava neograničenim, stvara električna struja I_1 koja se nalazi na mjestu stvarne električne struje.

Iz izraza (16.33) slijedi da je raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 1 ($x \geq 0$), prema Slici 16.20, opisana izrazima:

$$dH_{1x} = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot r_{1z}}{r_1^3} + \frac{I_2 \cdot r_{2z}}{r_2^3} \right) = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot z}{r_1^3} + \frac{I_2 \cdot z}{r_2^3} \right) \quad (16.52)$$

$$dH_{1z} = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot r_{1x}}{r_1^3} + \frac{I_2 \cdot r_{2x}}{r_2^3} \right) = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot (x-a)}{r_1^3} + \frac{I_2 \cdot (x+a)}{r_2^3} \right) \quad (16.53)$$

dok je raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 2 ($x \leq 0$), prema Slici 16.21, opisana izrazima:

$$dH_{2x} = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot r_{1z}}{r_1^3} = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot z}{r_1^3} \quad (16.54)$$

$$dH_{2z} = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot r_{1x}}{r_1^3} = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot (x-a)}{r_1^3} \quad (16.55)$$

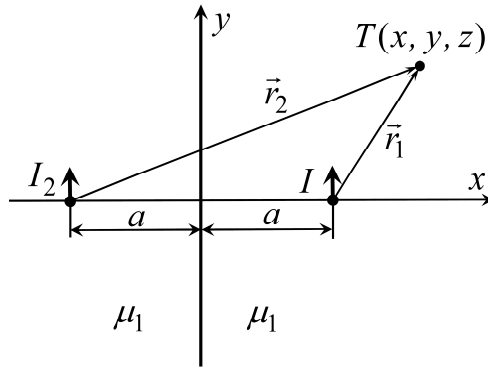
gdje je:

$$\vec{r}_1 = (x-a) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \{r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}\} \quad ; \quad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \quad (16.56)$$

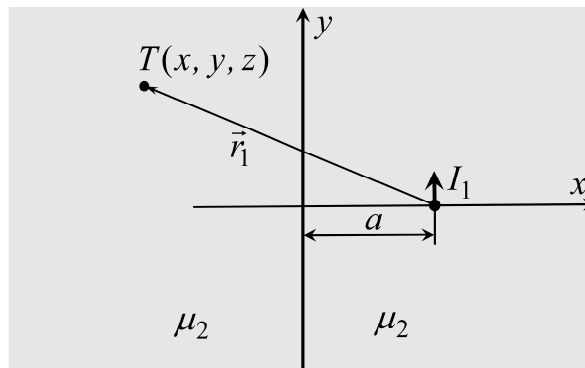
$$\vec{r}_2 = (x+a) \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \{r_{2x}, r_{2y}, r_{2z}\} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} \quad (16.57)$$

$$d\vec{\ell} \times \vec{r}_1 = d\ell \cdot (\vec{j} \times \vec{r}_1) = r_{1z} \cdot \vec{i} - r_{1x} \cdot \vec{k} = z \cdot \vec{i} - (x-a) \cdot \vec{k} \quad (16.58)$$

$$d\vec{\ell} \times \vec{r}_2 = d\ell \cdot (\vec{j} \times \vec{r}_2) = r_{2z} \cdot \vec{i} - r_{2x} \cdot \vec{k} = z \cdot \vec{i} - (x+a) \cdot \vec{k} \quad (16.59)$$



Slika 16.20. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča i njegova slika kada se jakost magnetskog polja računa u sredstvu 1 koje se proglašava neograničenim



Slika 16.21. Nadomjesni infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča kada se jakost magnetskog polja računa u sredstvu 2 koje se proglašava neograničenim

Izrazi (16.52) - (16.55) trebaju zadovoljiti sljedeće granične uvjete:

$$dH_{1z}|_{x=0} = dH_{2z}|_{x=0} \quad (16.60)$$

$$\mu_1 \cdot dH_{1x}|_{x=0} = \mu_2 \cdot dH_{2x}|_{x=0} \quad (16.61)$$

Ako se u granični uvjet (16.60) uvrste izrazi (16.53) i (16.55), uz uvažavanje izraza (16.56) i (16.57), dobije se sljedeći izraz:

$$I - I_2 = I_1 \quad (16.62)$$

Ako se u granični uvjet (16.61) uvrste izrazi (16.52) i (16.54), uz uvažavanje izraza (16.56) i (16.57), dobije se sljedeći izraz:

$$\mu_1 \cdot (I + I_2) = \mu_2 \cdot I_1 \quad (16.63)$$

Iz sustava dviju linearnih jednadžbi (16.62) i (16.63), slijedi da je:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot I = k_R \cdot I \quad ; \quad k_R = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (16.64)$$

$$I_1 = \frac{2 \cdot \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot I = k_T \cdot I \quad ; \quad k_T = \frac{2 \cdot \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad (16.65)$$

gdje je:

k_R - faktor refleksije,

k_T - faktor transmisije.

Vrijedi da je:

$$k_R + k_T = 1 \quad (16.66)$$

U posebnom slučaju kada $\mu_2 \rightarrow \infty$, vrijedi da je:

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} k_R = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} I_2 = I \quad (16.67)$$

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} k_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} I_1 = 0 \quad (16.68)$$

odakle slijedi da je vektor jakosti magnetskog polja okomit na graničnu plohu beskonačno permeabilnog sredstva te da je jakost magnetskog polja u beskonačno permeabilnom sredstvu jednaka nuli.

Prema izrazu (16.33), raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 1 ($x \geq 0$) opisana je izrazom:

$$d\vec{H}_1 = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}_1}{r_1^3} + k_R \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (16.69)$$

dok je raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 2 ($x \leq 0$) opisana izrazom:

$$d\vec{H}_2 = \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}_1}{r_1^3} \quad (16.70)$$

Izrazi (16.69) i (16.70) vrijede ako infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča leži u ravnini $x = \text{konst.}$, odnosno ako je:

$$d\vec{\ell} = d\ell_y \cdot \vec{j} + d\ell_z \cdot \vec{k} \quad (16.71)$$

16.9.2. Infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča okomit na graničnu ravninu

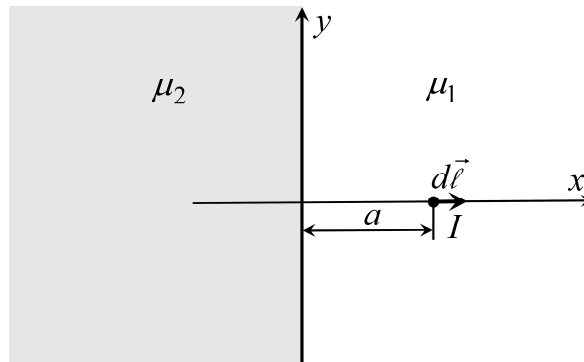
Neka se infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča, duljine $d\ell$, protjecan vremenski konstantnom električnom strujom jakosti I nalazi ispred homogenog poluprostora na udaljenosti a . Neka se infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča nalazi u poluprostoru magnetske permeabilnosti μ_1 , a neka preostali dio prostora ima magnetsku permeabilnost μ_2 (Slika 16.22). Neka se, radi jednostavnosti, infinitezimalni (beskonačno mali) odsječak tankožičanog vodiča nalazi na x -osi pravokutnog koordinatnog sustava (x, y, z). Neka vremenski konstantna električna struja kroz infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča teče u smjeru osi x (Slika 16.22).

Izrazi za raspodjelu diferencijala jakosti magnetskog polja u oba poluprostora mogu se odrediti metodom odslikavanja. Položaj nadomjesnih infinitezimalnih odsječaka tankožičanog vodiča suvislo je odabran, a njihovi iznosi se određuju na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta (Slike 16.23 i 16.24).

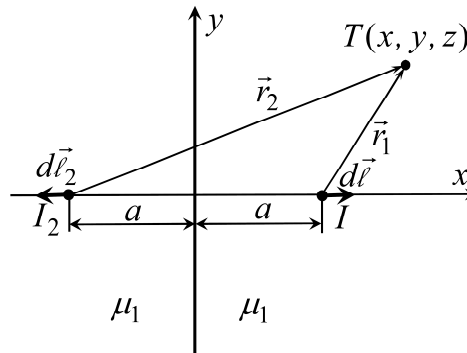
Raspodjela jakosti magnetskog polja je osnosimetrična s obzirom na os x i nema x -komponente, što znači da je na graničnoj plohi normalna komponenta jakosti magnetskog polja jednaka nuli. Stoga je dovoljno zadovoljiti granični uvjet:

$$dH_{1y}|_{x=0} = dH_{2y}|_{x=0} \quad \text{ili} \quad dH_{1z}|_{x=0} = dH_{2z}|_{x=0} \quad (16.72)$$

dok je granični uvjet (16.61) za normalnu komponentu magnetske indukcije automatski zadovoljen.

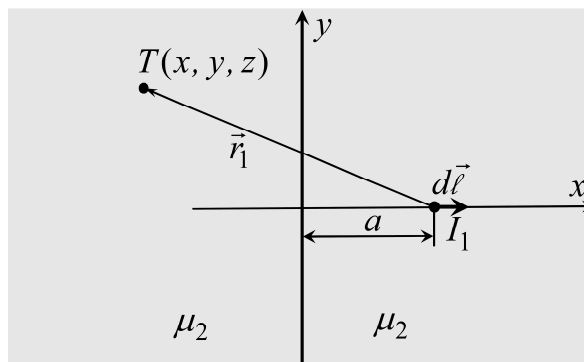


Slika 16.22. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča ispred homogenog poluprostora okomit na graničnu ravninu



Slika 16.23. Infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča i njegova slika kada se jakost magnetskog polja računa u sredstvu 1 koje se proglašava neograničenim

Prema Slici 16.23, jakost magnetskog polja u sredstvu 1, koje se proglašava neograničenim, stvaraju stvarna električna struja I i nadomjesna električna struja I_2 čiji je položaj zrcalan u odnosu na stvarnu električnu struju. Prema Slici 16.24, jakost magnetskog polja u sredstvu 2, koje se proglašava neograničenim, stvara električna struja I_1 koja se nalazi na mjestu stvarne električne struje.



Slika 16.24. Nadomjesni infinitesimalni odsječak tankožičanog vodiča kada se jakost magnetskog polja računa u sredstvu 2 koje se proglašava neograničenim

Iz izraza (16.33) slijedi da je raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 1 ($x \geq 0$), prema Slici 16.23, opisana izrazima:

$$dH_{1y} = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot r_{1z}}{r_1^3} - \frac{I_2 \cdot r_{2z}}{r_2^3} \right) = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot z}{r_1^3} - \frac{I_2 \cdot z}{r_2^3} \right) \quad (16.73)$$

$$dH_{1z} = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot r_{1y}}{r_1^3} - \frac{I_2 \cdot r_{2y}}{r_2^3} \right) = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{I \cdot y}{r_1^3} - \frac{I_2 \cdot y}{r_2^3} \right) \quad (16.74)$$

dok je raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 2 ($x \leq 0$), prema Slici 16.24, opisana izrazima:

$$dH_{2y} = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot r_{1z}}{r_1^3} = -\frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot z}{r_1^3} \quad (16.75)$$

$$dH_{2z} = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot r_{1y}}{r_1^3} = \frac{d\ell}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I_1 \cdot y}{r_1^3} \quad (16.76)$$

gdje je:

$$d\vec{\ell} \times \vec{r}_1 = d\ell \cdot (\vec{i} \times \vec{r}_1) = -r_{1z} \cdot \vec{j} + r_{1x} \cdot \vec{k} = -z \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k} \quad (16.77)$$

$$d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2 = -d\vec{\ell} \times \vec{r}_2 = -d\ell \cdot (\vec{i} \times \vec{r}_2) = r_{2z} \cdot \vec{j} - r_{2x} \cdot \vec{k} = z \cdot \vec{j} - y \cdot \vec{k} \quad (16.78)$$

dok su vektori \vec{r}_1 i \vec{r}_2 kao i njihovi moduli opisani izrazima (16.56) i (16.57).

Izrazi (16.73) - (16.76) trebaju zadovoljiti granične uvjete (16.72), odakle se dobije izraz (16.62). To znači da za infinitezimalni odsječak vodiča koji je okomit na graničnu ravninu između dvaju sredstava vrijede faktori refleksije (16.64) i transmisije (16.65) koji su dobiveni za infinitezimalni odsječak vodiča koji je paralelan graničnoj ravnini između dvaju sredstava.

Prema izrazu (16.33), raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 1 ($x \geq 0$) opisana je izrazom:

$$d\vec{H}_1 = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}_1}{r_1^3} + k_R \cdot \frac{d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (16.79)$$

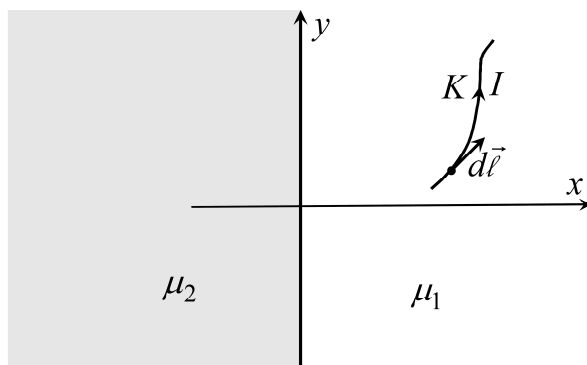
dok je raspodjela diferencijala jakosti magnetskog polja u sredstvu 2 ($x \leq 0$) opisana izrazom:

$$d\vec{H}_2 = \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}_1}{r_1^3} \quad (16.80)$$

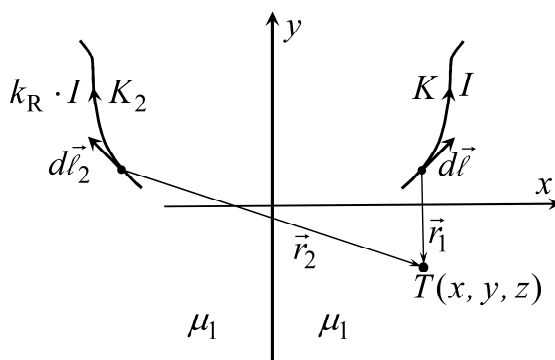
16.9.3. Odslikavanje tankožičanog vodiča proizvoljnog oblika

Neka se tankožičani vodič proizvoljnog oblika, duljine ℓ , protjecan vremenski konstantnom električnom strujom jakosti I nalazi ispred homogenog poluprostora. Neka se tankožičani vodič nalazi u poluprostoru magnetske permeabilnosti μ_1 , a neka preostali dio prostora ima magnetsku permeabilnost μ_2 (Slika 16.25). Neka se, samo radi zornosti grafičkog prikaza, tankožičani vodič nalazi u ravnini $z = 0$ provokutnog koordinatnog sustava (x, y, z). Neka vremenski konstantna električna struja kroz tankožičani vodič teče u naznačenom smjeru (Slika 16.25).

Prema Slici 16.26, jakost magnetskog polja u sredstvu 1, koje se proglašava neograničenim, stvaraju stvarna električna struja I i nadomjesna električna struja I_2 čiji je položaj zrcalan u odnosu na stvarnu električnu struju. Prema Slici 16.27, jakost magnetskog polja u sredstvu 2, koje se proglašava neograničenim, stvara električna struja I_1 koja se nalazi na mjestu stvarne električne struje. Faktor refleksije k_R opisan je izrazom (16.64), dok je faktor transmisije k_T opisan izrazom (16.65).



Slika 16.25. Tankožičani vodič ispred homogenog poluprostora



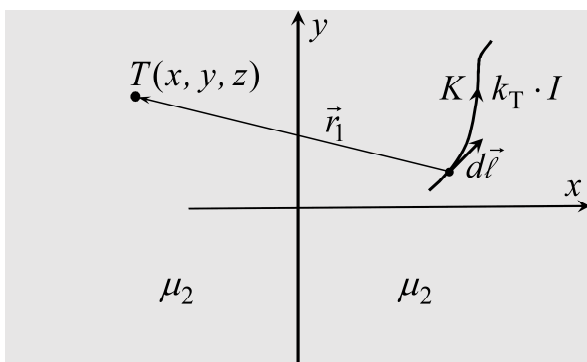
Slika 16.26. Tankožičani vodič i njegova zrcalna slika kada se jakost magnetskog polja računa u sredstvu 1 koje se proglašava neograničenim

Prema izrazu (16.33), raspodjela jakosti magnetskog polja u sredstvu 1 ($x \geq 0$) opisana je izrazom:

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\int_K \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_1}{r_1^3} + k_R \cdot \int_{K_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_2}{r_2^3} \right) \quad (16.81)$$

dok je raspodjela jakosti magnetskog polja u sredstvu 2 ($x \leq 0$) opisana izrazom:

$$\vec{H}_2 = \frac{k_T \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_1}{r_1^3} \quad (16.82)$$



Slika 16.27. Nadomjesni tankožičani vodič kada se jakost magnetskog polja računa u sredstvu 2 koje se proglašava neograničenim

Buduću da je granična ploha između dva sredstva $x = 0$, vrijedi da je:

$$d\vec{\ell} = d\ell_x \cdot \vec{i} + d\ell_y \cdot \vec{j} + d\ell_z \cdot \vec{k} \quad ; \quad d\vec{\ell}_2 = -d\ell_x \cdot \vec{i} + d\ell_y \cdot \vec{j} + d\ell_z \cdot \vec{k} \quad (16.83)$$

16.10. Energija pohranjena u magnetostatičkom polju

Prema izrazu (12.3), energija pohranjena u magnetskom polju može se izračunati integracijom po promatranom volumenu tako da je:

$$W_m = \int_0^t \int_V \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dV \cdot dt = \int_V \int_0^B \vec{H} \cdot \delta \vec{B} \cdot dV \quad ; \quad \delta \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dt \quad (16.84)$$

Ako je sredstvo linearno, onda prethodni izraz poprima sljedeći oblik:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \cdot dV \quad (16.85)$$

dok je za linearno i izotropno sredstvo pohranjena magnetostatička energija opisana izrazom:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V H \cdot B \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \mu \cdot H^2 \cdot dV \quad (16.86)$$

U slučaju neograničenog sredstva, prema izrazu (12.12), ukupna pohranjena magnetostatička energija može se izračunati integracijom po izvoru tako da je:

$$W_m = \int_V \int_0^A \vec{J} \cdot \delta \vec{A} \cdot dV \quad (16.87)$$

dok je za linearno sredstvo ukupna pohranjena magnetostatička energija opisana izrazom:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot dV \quad (16.88)$$

gdje je plošna gustoća električne struje \vec{J} izolirana od sredstva ako je sredstvo vodljivo. U tom slučaju izrazi (16.87) i (16.88) vrijede za savršeni dielektrik kao i za vodljivo sredstvo, a jedina bitna značajka sredstva jest njegova magnetska permeabilnost.

16.10.1. Izračun induktiviteta iz energije pohranjene u magnetostatičkom polju

Induktivitet sustava može se izračunati tako da se u prvom koraku izračuna energija pohranjena u magnetostatičkom polju tog sustava. Za magnetostatičko polje u linearnom i izotropnom sredstvu vrijedi da je:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V B \cdot H \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \mu \cdot H^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{\Psi^2}{2 \cdot L} \quad (16.89)$$

gdje je Ψ ulančeni magnetski tok, dok je L induktivitet sustava.

Iz izraza (16.89) slijedi da je induktivitet sustava opisan sljedećim izrazom:

$$L = \frac{2 \cdot W_m}{I^2} = \frac{1}{I^2} \cdot \int_V B \cdot H \cdot dV = \frac{1}{I^2} \cdot \int_V \mu \cdot H^2 \cdot dV \quad (16.90)$$

16.10.2. Induktiviteti i međuintuktiviteti sustava tankožičanih petlji

Neka se u linearnom sredstvu nalazi n tankožičanih petlji (strujnih petlji) kojima teku vremenski konstantne električne struje. Magnetska energija pohranjena u takvom sustavu može se opisati izrazom:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n L_j \cdot I_j^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n M_{j,k} \cdot I_j \cdot I_k \quad (16.91)$$

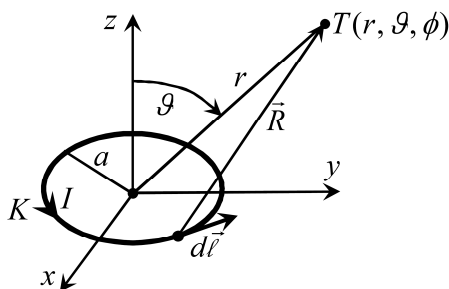
gdje je:

L_j - induktivitet (samoinduktivitet, vlastiti induktivitet) j -te tankožičane petlje,

$M_{j,k} = M_{k,j}$ - međuintuktivitet j -te i k -te tankožičane petlje.

16.11. Magnetski dipol

Magnetski dipol jest tankožičana petlja (strujna petlja) proizvoljnog oblika kojom teče vremenski konstantna električna struja te za koju vrijedi da su njene dimenzije znatno manje od udaljenosti točke promatranja od tankožičane petlje, odnosno za koju vrijedi da je $r \gg a$ (Slika 16.28).



Slika 16.28. Magnetski dipol u sfernom koordinatnom sustavu

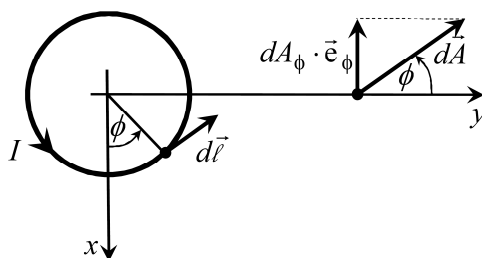
Neka je, radi jednostavnosti, tankožičana petlja kružna, neka je njen polumjer a te neka kroz petlju teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Neka u matematičkom izvodu, radi jednostavnosti, točka promatranja T leži u ravnini $x = 0$. Neka se magnetski dipol nalazi u neograničenom LIH sredstvu permeabilnosti μ .

Prema izrazu (16.34), vektorski magnetski potencijal tankožičane kružne petlje opisan je izrazom:

$$\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_K \frac{d\vec{\ell}}{R} \quad ; \quad d\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{R} \quad (16.92)$$

Zbog osne simetrije u odnosu na os z , u sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, ϕ) , vrijedi da je (Slika 16. 29):

$$A = A_\phi \quad ; \quad dA_\phi = \sin \phi \cdot dA \quad (16.93)$$



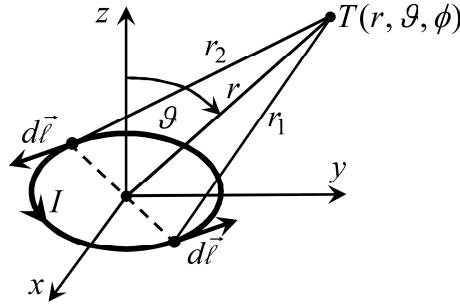
Slika 16.29. Grafičko objašnjenje izraza (16.93) – tlocrtni prikaz u ravnini $z = 0$

Slijedi da je:

$$\vec{A} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_K \frac{\sin \phi \cdot d\ell}{R} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu \cdot I \cdot a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi \cdot d\phi}{R} ; \quad d\ell = a \cdot d\phi \quad (16.94)$$

Ako se spare dvije nasuprotne točke na tankožičanoj kružnoj petlji (Slika 16.30), slijedi da je:

$$\vec{A} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu \cdot I \cdot a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^\pi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cdot \sin \phi \cdot d\phi \quad (16.95)$$



Slika 16.30. Sparivanje dviju nasuprotnih točaka na tankožičanoj kružnoj petlji

Slično kao kod električnog dipola, opisanog u potpoglavlju 14.10, za $r \gg a$ (Slika 16.31-a) vrijedi da je:

$$r_1 \approx r - a \cdot \cos \alpha ; \quad r_2 \approx r + a \cdot \cos \alpha \quad (16.96)$$

pa je:

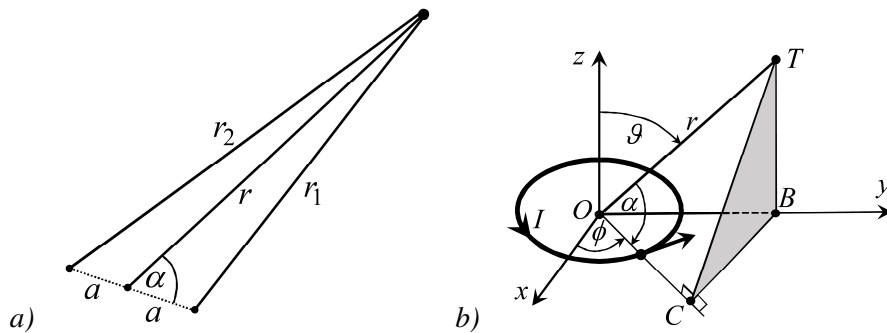
$$r_2 - r_1 \approx 2 \cdot a \cdot \cos \alpha ; \quad r_1 \cdot r_2 \approx r^2 - a^2 \cdot \cos^2 \alpha \approx r^2 \quad (16.97)$$

odakle slijedi da je:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2} \approx \frac{2 \cdot a \cdot \cos \alpha}{r^2} \quad (16.98)$$

Ako se aproksimacija (16.98) uvrsti u izraz (16.95) dobije se sljedeći izraz:

$$\vec{A} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu \cdot I \cdot a^2}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \int_0^\pi \cos \alpha \cdot \sin \phi \cdot d\phi \quad (16.99)$$



Slika 16.31. Definicija kuta α

Prema Slici 16.31-b, za točku T koja leži u ravnini $x = 0$ vrijedi da je:

$$\overline{OC} = r \cdot \cos \alpha = \overline{OB} \cdot \cos(\pi/2 - \phi) = \overline{OB} \cdot \sin \phi \quad ; \quad \overline{OB} = r \cdot \sin \vartheta \quad (16.100)$$

odakle slijedi da je:

$$\cos \alpha = \sin \vartheta \cdot \sin \phi \quad (16.101)$$

Ako se izraz (16.101) uvrsti u izraz (16.99), dobije se sljedeći izraz:

$$\vec{A} = \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu \cdot I \cdot a^2 \cdot \sin \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \int_0^\pi \sin^2 \phi \cdot d\phi = \vec{e}_\phi \cdot \frac{\mu \cdot I \cdot a^2 \cdot \sin \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (16.102)$$

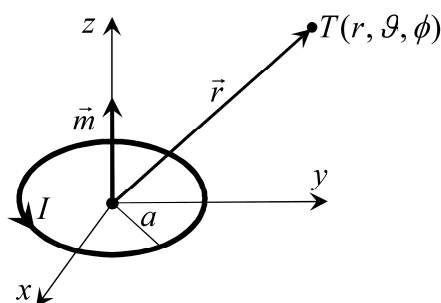
odakle slijedi da se, za $r \gg a$, vektorski magnetski potencijal magnetskog dipola može aproksimirati pomoću izraza:

$$\vec{A} = \frac{\mu \cdot \vec{m} \times \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{\mu \cdot m \cdot \sin \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_\phi \quad (16.103)$$

gdje je magnetski dipolni moment (Slika 16.32):

$$\vec{m} = I \cdot S \cdot \vec{n} = I \cdot a^2 \cdot \pi \cdot \vec{k} \quad ; \quad m = I \cdot S = I \cdot a^2 \cdot \pi \quad (16.104)$$

dok je S površina kružne tankožičane petlje. Vektor jedinične normale \vec{n} na plohu koju zatvara petlja orijentirana je po pravilu desne ruke s obzirom na smjer električne struje (Slika 16.32).



Slika 16.32. Grafički prikaz magnetskog dipolnog momenta \vec{m}

Ako tankožičana petlja ima neki drugi proizvoljni oblik, npr. pravokutni ili pak kvadratni, onda za magnetski dipolni moment vrijedi izraz*:

$$\vec{m} = I \cdot S \cdot \vec{n} \quad (16.105)$$

gdje je, u ovom općem slučaju, S površina razmatrane tankožičane petlje, dok je \vec{n} vektor jedinične normale na plohu koju zatvara ta petlja, uz uvažavanje pravila desne ruke.

Vrijedi da je:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cdot \vec{e}_\vartheta & r \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & r \cdot \sin \vartheta \cdot A \end{vmatrix} \quad (16.106)$$

* Dokaz za proizvoljnu tankožičanu petlju postoji u literaturi [12] na str. 322-325, a dokaz za kvadratnu tankožičanu petlju postoji u literaturi [6] na str. 160-161

odakle slijedi da su komponente vektora magnetske indukcije magnetskog dipola:

$$B_r = \frac{\mu \cdot m \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad B_\vartheta = \frac{\mu \cdot m \cdot \sin \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad B_\phi = 0 \quad (16.107)$$

pa su komponente vektora jakosti magnetskog polja magnetskog dipola:

$$H_r = \frac{m \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad H_\vartheta = \frac{m \cdot \sin \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad H_\phi = 0 \quad (16.108)$$

Na temelju usporedbe izraza (16.108) s izrazima za komponente jakosti električnog polja električnog dipola (14.87) - (14.89), uz uvažavanje izraza za skalarni električni potencijal električnog dipola (14.84), lako je zaključiti da je skalarni magnetski potencijal magnetskog dipola opisan sljedećim izrazom:

$$\varphi_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{m \cdot \cos \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (16.109)$$

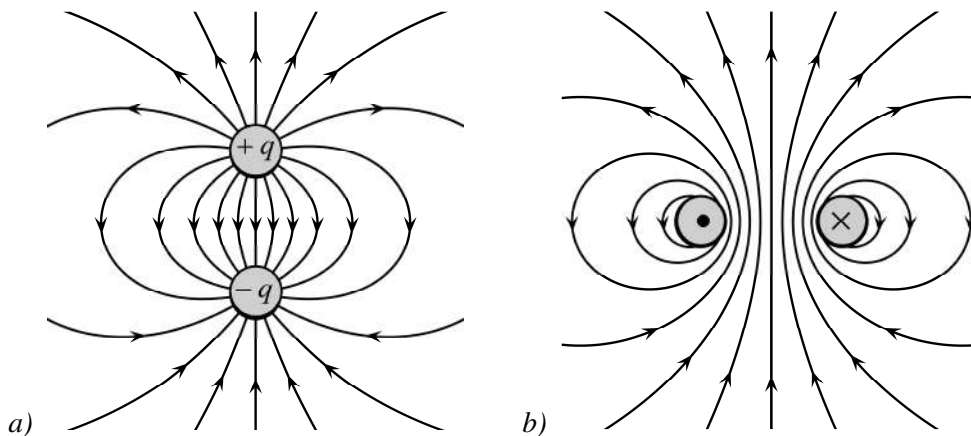
odakle je:

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \cdot \vec{e}_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (16.110)$$

odakle se dobiju izrazi za komponente vektora jakosti magnetskog polja magnetskog dipola:

$$H_r = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{m \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad H_\vartheta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial \vartheta} = \frac{m \cdot \sin \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad H_\phi = 0 \quad (16.111)$$

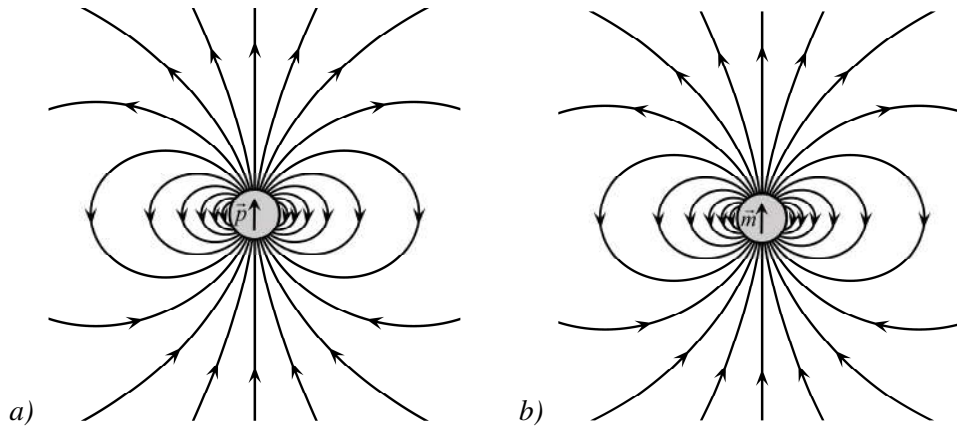
koji su, prema očekivanju, identični izrazima (16.108).



Slika 16.33. a) Električne silnice dvaju raznoimenih točkastih naboja istog iznosa, b) Magnetske silnice kružne tankožičane petlje

Na Slici 16.33-a prikazane su električne silnice dvaju raznoimenih točkastih naboja istog iznosa, a na Slici 16.33-b prikazane su magnetske silnice kružne tankožičane petlje kroz koju teče vremenski konstantna električna struja.

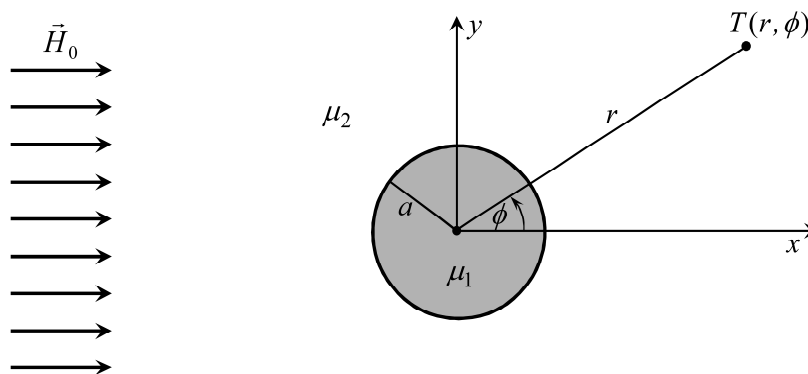
Približni izrazi koji vrijede za električni dipol i magnetski dipol daju dobru aproksimaciju samo za točke koje su dovoljno udaljene od izvora polja. Za njih su silnice prikazane na Slici 16.34.



Slika 16.34. a) Električne silnice električnog dipola, b) Magnetske silnice magnetskog dipola

16.12. Cilindrično sredstvo u homogenom magnetostatičkom polju

Neka se beskonačno dugi cilindar (LIH sredstvo 1), polumjera a , magnetske permeabilnosti μ_1 , nalazi u magnetostatičkom polju koje je daleko od cilindra homogeno, dok je oko cilindra neograničeno LIH sredstvo (sredstvo 2), magnetske permeabilnosti μ_2 . Za rješenje ovog problema prikladan je cilindrični koordinatni sustav s ishodištem na osi cilindra (Slika 16.35) kao i upotreba skalarnog magnetskog potencijala.



Slika 16.35. Cilindrično LIH sredstvo u homogenom magnetostatičkom polju

Rubni uvjet na velikim udaljenostima od cilindra jest to da nema deformacije polja, tj. da ono ostaje homogeno. Tom zahtjevu treba prilagoditi opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe u sredstvu 2, koje prema izrazu (14.183) glasi:

$$\varphi_m(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot r^n + D_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot [F_n \cdot \sin(n \cdot \phi) + G_n \cdot \cos(n \cdot \phi)] \quad (16.112)$$

Raspodjela skalarnog magnetskog potencijala jest osnosimetrična s obzirom na os x , odnosno to je parna funkcija s obzirom na kut ϕ . Stoga je:

$$F_n = 0 \quad ; \quad \forall n \quad (16.113)$$

pa opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednadžbe (16.112) poprima novi oblik:

$$\varphi_m(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot r^n + D_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \quad (16.114)$$

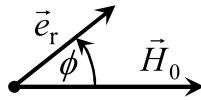
Daljnji postupak izvođenja izraza za raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala analogan je postupku izvođenja izraza za raspodjelu skalarnog električnog potencijala u slučaju vodljivog cilindra u homogenom stacionarnom strujnom polju.

Iz općeg rješenja Laplaceove diferencijalne jednačbe (16.114), slijedi da je polazni izraz za raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala u sredstvu 2:

$$\varphi_{m2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot r^n + D_n \cdot \frac{1}{r^n} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \quad (16.115)$$

Dovoljno je u beskonačnosti prilagoditi radijalnu komponentu jakosti magnetskog polja, što je, prema Slici 16.36, opisano sljedećim izrazom:

$$H_0 \cdot \cos \phi = - \left. \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} \quad (16.116)$$



Slika 16.36. Radijalna komponenta jakosti magnetskog polja daleko od cilindra

Ako se izraz (16.115) uvrsti u izraz (16.116), dobije se da je:

$$H_0 \cdot \cos \phi = - \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot n \cdot r^{n-1} - D_n \cdot \frac{n}{r^{n+1}} \right) \cdot \cos(n \cdot \phi) \right\}_{r \rightarrow \infty} \quad (16.117)$$

Iz izraza (16.117) slijedi da je $n = 1$, što znači da su svi koeficijenti C_n i D_n jednaki nuli, osim koeficijentata C_1 i D_1 , pa se iz izraza (16.117) dobije da je:

$$H_0 \cdot \cos \phi = - \left(C_1 - D_1 \cdot \frac{1}{r^2} \right)_{r \rightarrow \infty} \cdot \cos \phi = - C_1 \cdot \cos \phi \quad (16.118)$$

što znači da je:

$$C_1 = H_0 \quad (16.119)$$

dok je koeficijent D_1 zasad nepoznat, a izraz uz D_1 teži nuli ako r teži u beskonačnost.

Dakle, raspodjela skalarnog magnetskog potencijala u sredstvu 2 opisana je izrazom:

$$\varphi_{m2} = \left(- H_0 \cdot r + D_1 \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \cos \phi \quad (16.120)$$

pa, radi zadovoljenje graničnih uvjeta između dvaju sredstava, skalarni magnetski potencijal unutar cilindra mora biti opisan izrazom:

$$\varphi_{m1} = \left(F_1 \cdot r + G_1 \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot \cos \phi \quad (16.121)$$

Iz uvjeta da skalarni magnetski potencijal na osi cilindra mora biti konačan, slijedi da je koeficijent:

$$G_1 = 0 \quad (16.122)$$

pa je:

$$\varphi_{m1} = F_1 \cdot r \cdot \cos \phi \quad (16.123)$$

Dakle, raspodjela skalarnog magnetskog potencijala u oba sredstva opisana je izrazima (16.120) i (16.123), gdje su nepoznata dva koeficijenta, a oni se mogu odrediti na temelju zadovoljenja graničnih uvjeta:

$$\varphi_{m1}|_{r=a} = \varphi_{m2}|_{r=a} \quad (16.124)$$

$$-\mu_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\mu_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (16.125)$$

što daje sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\frac{1}{a} \cdot D_1 - a \cdot F_1 = H_0 \cdot a \quad ; \quad \frac{\mu_2}{a^2} \cdot D_1 + \mu_1 \cdot F_1 = -\mu_2 \cdot H_0 \quad (16.126)$$

odakle se lako dobije da je:

$$D_1 = H_0 \cdot a^2 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad ; \quad F_1 = -H_0 \cdot \frac{2 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (16.127)$$

Nakon zadovoljenja svih graničnih uvjeta, prema izrazima (16.120), (16.123) i (16.127), raspodjela skalarnog magnetskog potencijala u oba sredstva opisana je izrazima:

$$\varphi_{m1} = -\frac{2 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \cdot r \cdot \cos \phi = -\frac{2 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \cdot x \quad ; \quad r \leq a \quad (16.128)$$

$$\varphi_{m2} = -H_0 \cdot r \cdot \cos \phi + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot H_0 \cdot r \cdot \cos \phi \quad ; \quad r \geq a \quad (16.129)$$

iz kojih slijedi da je skalarni magnetski potencijal jednak nuli na ravnini koja prolazi kroz središte cilindra za koju je $\phi = \pm \pi/2$, a to je ravnina $x = 0$.

Iz izraza (16.128) koji opisuje raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nulte komponente jakosti magnetskog polja u sredstvu 1, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{H}_1 = H_{1r} \cdot \vec{e}_r + H_{1\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (16.130)$$

$$H_{1r} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \frac{2 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \cdot \cos \phi \quad (16.131)$$

$$H_{1\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial \phi} = -\frac{2 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \cdot \sin \phi \quad (16.132)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{H}_1 = H_{1x} \cdot \vec{i} = \frac{2 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \cdot \vec{i} \quad (16.133)$$

odakle slijedi da je, prema očekivanju, jakost magnetskog polja u cilindru promijenila iznos, ali je magnetsko polje i dalje ostalo homogeno.

Iz izraza (16.129) koji opisuje raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nulte komponente jakosti magnetskog polja u sredstvu 2, koji u cilindričnom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{H}_2 = H_{2r} \cdot \vec{e}_r + H_{2\phi} \cdot \vec{e}_\phi \quad (16.134)$$

$$H_{2r} = -\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = H_0 \cdot \cos \phi \cdot \left(1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \quad (16.135)$$

$$H_{2\phi} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \phi} = -H_0 \cdot \sin \phi \cdot \left(1 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right) \quad (16.136)$$

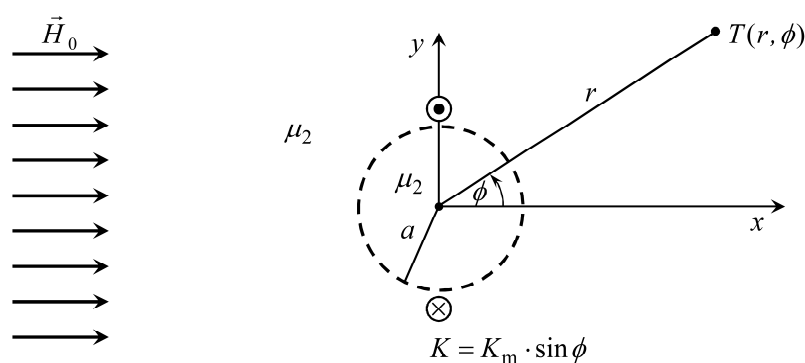
Može se zamisliti da je posvuda sredstvo 2, a utjecaj sredstva 1 može se nadomjestiti sinusoidalnim strujnim oblogom (Slika 16.37). Dobiveno rješenje vrijedi samo u sredstvu 2.

Vrijedi da je:

$$\mu_1 \cdot \vec{H}_1 = \mu_2 \cdot (\vec{H}_1 + \vec{M}) \quad (16.137)$$

odakle slijedi da je vektor magnetizacije, uz uvažavanje izraza (16.133):

$$\vec{M} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \vec{H}_1 = 2 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \cdot \vec{i} \quad (16.138)$$



Slika 16.37. Nadomjesni strujni oblog u slučaju kada je $\mu_1 > \mu_2$

Nadomjesni strujni oblog je opisan izrazom:

$$\vec{K} = \vec{M} \times \vec{n} = \vec{M} \times \vec{n} = M \cdot (\vec{i} \times \vec{e}_r) = M \cdot \sin \phi \cdot \vec{e}_z = K_m \cdot \sin \phi \cdot \vec{e}_z \quad (16.139)$$

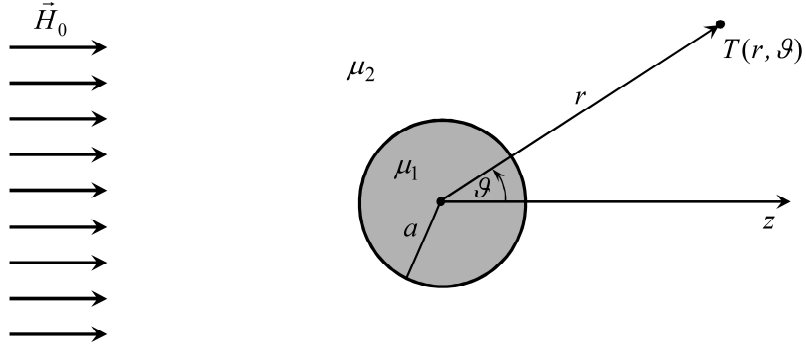
odakle slijedi da je:

$$K_m = M = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot H_1 = 2 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot H_0 \quad (16.140)$$

a to je maksimalna vrijednost strujnog obloga za $\mu_1 > \mu_2$, odnosno minimalna vrijednost strujnog obloga za $\mu_1 < \mu_2$.

16.13. Kugla u homogenom magnetostatičkom polju

Neka se kugla (LIH sredstvo 1), polumjera a , magnetske permeabilnosti μ_1 , nalazi u magnetostatičkom polju koje je daleko od kugle homogeno, dok je oko kugle neograničeno LIH sredstvo (sredstvo 2), magnetske permeabilnosti μ_2 . Za rješenje ovog problema prikladan je sferni koordinatni sustav s ishodištem u središtu kugle (Slika 16.38) kao i upotreba skalarnog magnetskog potencijala.



Slika 16.38. Kugla u homogenom magnetostatičkom polju

Izrazi za raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala analogni su izrazima za raspodjelu skalarnog električnog potencijala koji su dobiveni za dielektričnu kuglu u homogenom električnom polju. Prema analognim izrazima (14.217) i (14.218), nakon uvrštenja graničnih uvjeta u opće rješenje Laplaceove diferencijalne jednačbe dobije se da je:

$$\varphi_{m1} = -\frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta = -\frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \cdot z \quad ; \quad r \leq a \quad (16.141)$$

$$\varphi_{m2} = -H_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot H_0 \cdot r \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad r \geq a \quad (16.142)$$

Iz izraza (16.141) koji opisuje raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala u sredstvu 1, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti magnetskog polja u sredstvu 1, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{H}_1 = H_{1r} \cdot \vec{e}_r + H_{1\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (16.143)$$

$$H_{1r} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \cdot \cos \vartheta \quad (16.144)$$

$$H_{1\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial \vartheta} = -\frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \cdot \sin \vartheta \quad (16.145)$$

dok je u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{H}_1 = H_{1z} \cdot \vec{k} = \frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \cdot \vec{k} \quad (16.146)$$

Iz izraza (16.142) koji opisuje raspodjelu skalarnog magnetskog potencijala u sredstvu 2, lako se mogu dobiti izrazi za nenulte komponente jakosti magnetskog polja u sredstvu 2, koji u sfernom koordinatnom sustavu glase:

$$\vec{H}_2 = H_{2r} \cdot \vec{e}_r + H_{2\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta \quad (16.147)$$

$$H_{2r} = -\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r} = H_0 \cdot \cos \vartheta \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) \quad (16.148)$$

$$H_{2\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \vartheta} = -H_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \left(1 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) \quad (16.149)$$

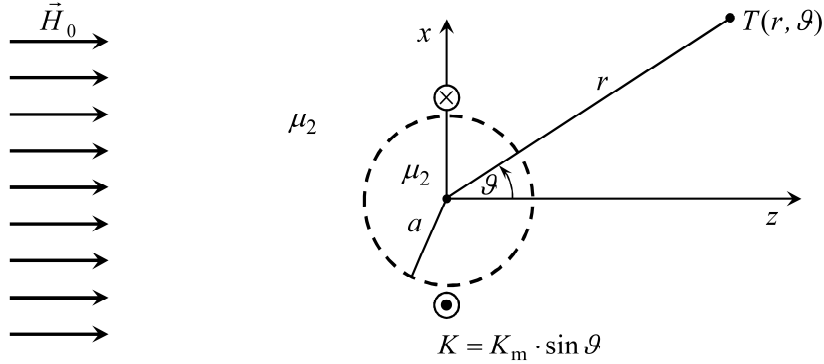
Može se zamisliti da je posvuda sredstvo 2, a utjecaj sredstva 1 može se nadomjestiti sinusoidalnim strujnim oblogom (Slika 16.37). Dobiveno rješenje vrijedi samo u sredstvu 2.

Vrijedi da je:

$$\mu_1 \cdot \vec{H}_1 = \mu_2 \cdot (\vec{H}_1 + \vec{M}) \quad (16.150)$$

odakle slijedi da je vektor magnetizacije, uz uvažavanje izraza (16.146):

$$\vec{M} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot \vec{H}_1 = 3 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \cdot \vec{k} \quad (16.151)$$



Slika 16.39. Nadomjesni strujni oblog u slučaju kada je $\mu_1 < \mu_2$

Nadomjesni strujni oblog je opisan izrazom:

$$\vec{K} = \vec{M} \times \vec{n} = \vec{M} \times \vec{n} = M \cdot (\vec{k} \times \vec{e}_r) = M \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\phi = K_m \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\phi \quad (16.152)$$

odakle slijedi da je:

$$K_m = M = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \cdot H_1 = 3 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot H_0 \quad (16.153)$$

a to je maksimalna vrijednost strujnog obloga za $\mu_1 > \mu_2$, odnosno minimalna vrijednost strujnog obloga za $\mu_1 < \mu_2$.

Važno je uočiti da je jedinični vektor \vec{e}_ϕ , koji se pojavljuje u izrazu (16.152), jedinični vektor cilindričnog koordinatnog sustava (r, ϕ, z) .

Drugi način da se odredi izraz (16.151), koji opisuje vektor magnetizacije kugle, utemeljen je na izrazima (16.109) i (16.142). Na temelju tih dvaju izraza, raspodjela jakosti magnetskog polja u sredstvu 2 može se opisati pomoću sljedećeg izraza:

$$\varphi_{m2} = -\vec{H}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \quad (16.154)$$

gdje je magnetski dipolni moment kugle:

$$\vec{m} = 4 \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot \vec{H}_0 = 3 \cdot V_{\text{kugle}} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2 \cdot \mu_2} \cdot \vec{H}_0 = \vec{M} \cdot V_{\text{kugle}} \quad (16.155)$$

odakle se lako dobije izraz (16.151).

Analogno električnim silnicama, magnetske silnice za $\mu_1 > \mu_2$ prikazane su na Slici 14.36, a magnetske silnice za $\mu_1 < \mu_2$ prikazane su na Slici 14.37.

16.14. Magnetska sila na tankožičani vodič

Neka kroz tankožičani vodič (električnu strujnicu) teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Iz Lorentzova zakona za silu (8.7) slijedi da je magnetska sila koja djeluje na vodič kojim teče električna struja, koji se nalazi u magnetskom polju, opisana izrazom:

$$\vec{F}_m = \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV \quad (16.156)$$

gdje je \vec{J} vektor plošne gustoće električne struje koja teče tankožičanim vodičem.

Za tankožičani vodič vrijedi da je:

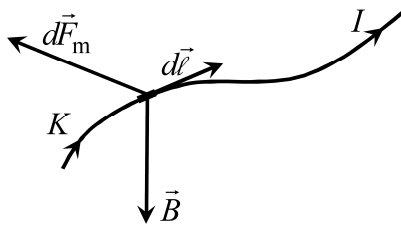
$$\vec{J} \cdot dV = I \cdot d\vec{\ell} \quad (16.157)$$

pa izraz za magnetsku silu na tankožičani vodič (16.156) poprima novi oblik:

$$\vec{F}_m = I \cdot \int_K (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (16.158)$$

što znači da na infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča djeluje magnetska sila (Slika 16.40):

$$d\vec{F}_m = I \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (16.159)$$



Slika 16.40. Magnetska sila na infinitezimalni odsječak tankožičanog vodiča

U posebnom slučaju kada je magnetsko polje homogeno, odsječak tankožičanog vodiča pravocrtan i konačne duljine ℓ izraz za magnetsku silu glasi:

$$\vec{F}_m = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad (16.160)$$

gdje vektor $\vec{\ell}$ poprima smjer vremenski konstantne električne struje.

Ako uz već navedene pretpostavke vrijedi i to da je $\vec{\ell} \perp \vec{B}$, onda izraz za magnetsku silu (16.160) poprima novi oblik:

$$F_m = B \cdot I \cdot \ell \quad (16.161)$$

16.15. Magnetska sila između dva beskonačno duga međusobno paralelna vodiča

Neka se dva pravocrtna, beskonačno duga, međusobno paralelna tankožičana vodiča nalaze u neograničenom LHM sredstvu magnetske permeabilnosti μ . Neka su vodiči razmaknuti za d te neka kroz njih teku vremenski konstantne električne struje (Slika 16.41).

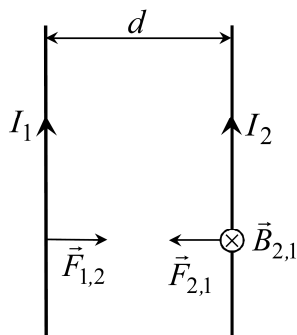
Pravocrtni vodič ne djeluje sam na sebe. Po zakonu akcije i reakcije vrijedi da je:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \quad (16.162)$$

gdje je:

$\vec{F}_{1,2}$ - sila na vodič 1 uslijed vremenski konstantne struje kroz vodič 2,

$\vec{F}_{2,1}$ - sila na vodič 2 uslijed vremenski konstantne struje kroz vodič 1.



Slika 16.41. Dva međusobno paralelna tankožičana vodiča

Vrijedi da je:

$$\vec{F}_{2,1} = I_2 \cdot (\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_{2,1}) \quad (16.163)$$

gdje je ℓ_2 duljina vodiča 2 na koju djeluje magnetska sila, dok je magnetska indukcija na mjestu vodiča 2 uslijed električne struje vodiča 1 opisana izrazom:

$$B_{2,1} = \mu \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot d} \quad (16.164)$$

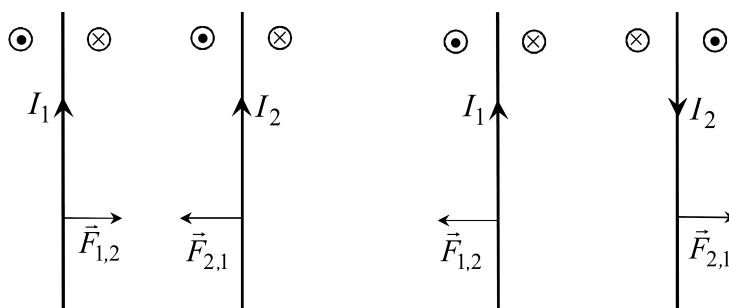
pa je iznos magnetske sile koja djeluje na jedinicu duljine vodiča 2:

$$\frac{F_{2,1}}{\ell_2} = I_2 \cdot B_{2,1} = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot d} \quad (\text{N/m}) \quad (16.165)$$

Dakle, privlačna magnetska sila po jedinici duljine beskonačno dugih tankožičanih vodiča opisana je izrazom:

$$F_{\text{jed}} = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot d} \quad (16.166)$$

Na Slici 16.42 dano je grafičko objašnjenje zašto je sila između tankožičanih vodiča privlačna kada njihove struje teku u istom smjeru. Ako električne struje teku u istom smjeru, onda se jakosti magnetskog polja između vodiča oduzimaju pa je stoga magnetska sila između vodiča privlačna. Razlog je težnja da se magnetsko polje jednoliko rasporede po cjelokupnom prostoru. Ako je smjer struja suprotan, onda se jakosti magnetskog polja između vodiča zbrajaju pa je stoga magnetska sila između vodiča odbojna.



Slika 16.42. Smjerovi jakosti magnetskog polja u ovisnosti o smjerovima električnih struja

Dakle, ako vremenski konstantna električna struja teče kroz kružnu zatvorenu konturu, onda magnetske sile žele tu konturu raširiti. U tom slučaju sve silnice prolaze kroz konturu (Slika 16.33-b), a težnja je da se silnice jednoliko rasporede po cjelokupnom prostoru.

16.16. Sila u magnetostatičkom polju izoliranog sustava

Sila se može izračunati iz energije sustava, odnosno iz induktiviteta sustava. Izolirani sustav jest sustav koji s okolinom ne razmjenjuje energiju, odnosno to je sustav u kojem su zadani vremenski konstantni ulančeni magnetski tokovi. Takav sustav teži stanju u kojem je energija minimalna pa je u njemu sila opisana izrazom:

$$\vec{F} = -\nabla W_m \quad (16.167)$$

gdje je W_m energija pohranjena u magnetostatičkom polju.

U izoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je izrazom:

$$\vec{F} = -\frac{\partial W_m}{\partial s} \cdot \vec{s}_0 = -\vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_m}{\partial s} \Big|_{\Psi = \text{konst.}} \quad (16.168)$$

gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor.

U izoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je i izrazom:

$$\vec{F} = -\vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_m}{\partial s} \Big|_{\Psi = \text{konst.}} = -\vec{s}_0 \cdot \frac{\Psi^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{L} \right) = \vec{s}_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Psi}{L} \right)^2 \cdot \frac{\partial L}{\partial s} \quad (16.169)$$

gdje su Ψ i L ulančeni magnetski tok i induktivitet izoliranog sustava.

16.17. Sila u magnetostatičkom polju neizoliranog sustava

Neizolirani sustav jest sustav koji s okolinom razmjenjuje energiju, odnosno to je sustav u kojem su zadane jakosti vremenski konstantnih električnih struja. Takav sustav teži stanju u kojem je energija maksimalna pa je u njemu sila opisana izrazom:

$$\vec{F} = \nabla W_m \quad (16.170)$$

gdje je W_m energija pohranjena u magnetostatičkom polju.

U neizoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je izrazom:

$$\vec{F} = \frac{\partial W_m}{\partial s} \cdot \vec{s}_0 = \vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_m}{\partial s} \Big|_{I = \text{konst.}} \quad (16.171)$$

gdje je \vec{s}_0 jedinični vektor.

U neizoliranom sustavu sila u smjeru vektora \vec{s} opisana je i izrazom:

$$\vec{F} = \vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_m}{\partial s} \Big|_{I = \text{konst.}} = \vec{s}_0 \cdot \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial s} \quad (16.172)$$

gdje su I i L jakost električne struje i induktivitet neizoliranog sustava.

Sila između dva električna strujna kruga, u neizoliranom sustavu, u smjeru vektora \vec{s} opisana je izrazom:

$$\vec{F}_{j,k} = \vec{s}_0 \cdot \frac{\partial W_m}{\partial s} \Big|_{I_j, I_k = \text{konst.}} = \vec{s}_0 \cdot \frac{I_j \cdot I_k}{2} \cdot \frac{\partial M_{j,k}}{\partial s} \quad (16.173)$$

gdje je $M_{j,k}$ međuinduktivitet j-tog i k-tog električnog strujnog kruga.

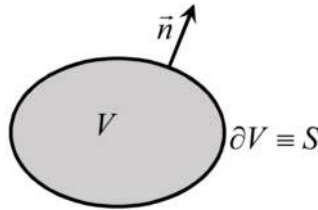
16.18. Sile i naprezanja u magnetostatičkom polju

Neka je volumen V omeđen zatvorenom ploha $S \equiv \partial V$ (Slika 16.43), gdje je \vec{n} vektor vanjske jedinične normale na plohu S .

Magnetska sila koja djeluje na volumen V može se izračunati integracijom po zatvorenoj plohi S :

$$\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} \cdot dV = \oint_S \vec{t}_m \cdot dS \quad (16.174)$$

gdje je \vec{t}_m vektor magnetskog naprezanja.



Slika 16.43. Volumen omeđen zatvorenom plohom S

U magnetostatičkom polju, vektor magnetskog naprezanja u LIH sredstvu opisan je izrazom:

$$\vec{t}_m = \mu \cdot \left[\vec{H} \cdot (\vec{H} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot \vec{n} \right] \quad (16.175)$$

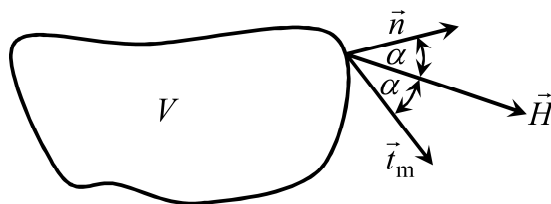
Plošni integral opisan izrazom (16.174) može se iskazati kao vektorski zbroj triju plošnih integrala prve vrste:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_m \cdot dS = \vec{i} \cdot \oint_S t_{mx} \cdot dS + \vec{j} \cdot \oint_S t_{my} \cdot dS + \vec{k} \cdot \oint_S t_{mz} \cdot dS \quad (16.176)$$

gdje je vektor magnetskog naprezanja u pravokutnom koordinatnom sustavu opisan izrazom:

$$\vec{t}_m = t_{mx} \cdot \vec{i} + t_{my} \cdot \vec{j} + t_{mz} \cdot \vec{k} \quad (16.177)$$

Vektor jakosti magnetskog polja \vec{H} raspolavlja kut između vektora jedinične normale \vec{n} i vektora magnetskog naprezanja \vec{t}_m (Slika 16.44):



Slika 16.44. Međusobni položaj triju vektora

U posebnom slučaju kada je vektor jakosti magnetskog polja kolinearan s vektorom vanjske jedinične normale vrijedi da je:

$$\vec{H} = \pm H \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{t}_m = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 \cdot \vec{n} \quad (16.178)$$

dok u drugom posebnom slučaju kada je vektor jakosti magnetskog polja okomit na vektor vanjska jedinična normale vrijedi da je:

$$\vec{H} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{t}_m = -\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 \cdot \vec{n} \quad (16.179)$$

Na temelju vektora magnetskog naprezanja na granici dvaju LIH sredstava magnetske permeabilnosti μ_1 i μ_2 , lako se može dobiti izraz za magnetski tlak na granici tih dvaju sredstava:

$$t_n^m = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{2} \cdot \left(\frac{B_n^2}{\mu_1 \cdot \mu_2} + H_t^2 \right) \quad (16.180)$$

gdje je:

B_n - normalna komponenta vektora magnetske indukcije,

H_t - tangencijalna komponenta vektora jakosti magnetskog polja.

Magnetska sila na granici dvaju sredstava opisana je plošnim integralom po graničnoj plohi dvaju LIH sredstava S_{gr} :

$$\vec{F}_{gr} = \int_{S_{gr}} t_n^m \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{S_{gr}} t_n^m \cdot d\vec{S} \quad (16.181)$$

gdje je \vec{n} vektor vanjske jedinične normale na graničnu plohu dvaju LIH sredstava, koji je usmjeren (orijentiran) od sredstva veće magnetske permeabilnosti prema sredstvu manje magnetske permeabilnosti.

Plošni integral opisan izrazom (16.181) može se iskazati kao vektorski zbroj triju plošnih integrala prve vrste:

$$\vec{F}_{gr} = \int_{S_{gr}} t_n^m \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{i} \cdot \int_{S_{gr}} t_n^m \cdot n_x \cdot dS + \vec{j} \cdot \int_{S_{gr}} t_n^m \cdot n_y \cdot dS + \vec{k} \cdot \int_{S_{gr}} t_n^m \cdot n_z \cdot dS \quad (16.182)$$

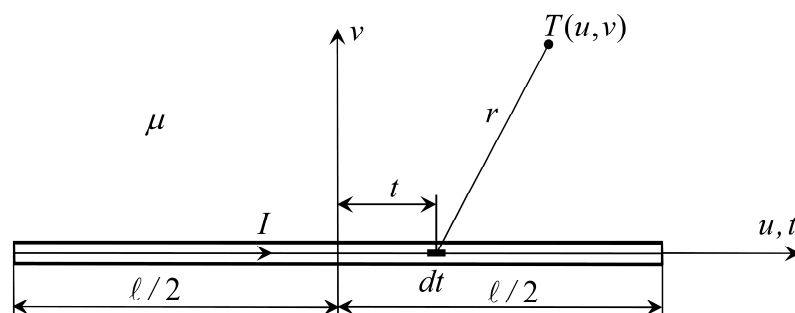
gdje je vektor vanjske jedinične normale na graničnu plohu dvaju LIH sredstava u pravokutnom koordinatnom sustavu opisan izrazom:

$$\vec{n} = n_x \cdot \vec{i} + n_y \cdot \vec{j} + n_z \cdot \vec{k} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (16.183)$$

gdje su α, β i γ prikloni kutovi vektora vanjske jedinične normale.

16.19. Vektorski magnetski potencijal odsječka tankožičanog vodiča

Neka duž osi tankožičanog pravocrtnog odsječaka (segmenta) cilindričnog vodiča polumjera r_0 , duljine ℓ , teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Neka se tankožičani odsječak vodiča nalazi u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ . Ako je $r_0 \ll \ell$, može se koristiti tankožičana aproksimacija po kojoj se pretpostavlja da vremenski konstantna električna struja teče duž osi odsječka vodiča, a traži se raspodjela vektorskog magnetskog potencijala u točkama izvan odsječka vodiča, uključujući površinu odsječka vodiča.



Slika 16.45. Odsječak cilindričnog vodiča u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v)

Radi jednostavnosti, odsječak se zadaje u lokalnom 2D koordinatnom sustavu (u, v) , u kojem leže os odsječka vodiča i točka promatranja $T(u, v)$. Položaj odsječka u (x, y, z) koordinatnom sustavu je proizvoljan. Prema Slici 16.45, točka $T(u, v)$ u kojoj se računa vektorski magnetski potencijal može biti u prvom ili u drugom kvadrantu lokalnog koordinatnog sustava (u, v) .

U neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ , diferencijal vektorskog magnetskog potencijala segmenta tankožičanog vodiča opisan je izrazom (16.32), koji glasi:

$$d\vec{A} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{r} \quad (16.184)$$

pa je:

$$\vec{A} = \vec{e}_u \cdot \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dt}{\sqrt{v^2 + (t-u)^2}} \quad (16.185)$$

gdje je \vec{e}_u jedinični vektor lokalne osi u , a smjer tog jediničnog vektora jest, ustvari, smjer vremenski konstantne električne struje jakosti I .

Nakon integracije, iz izraza (16.185), dobiju se sljedeći izrazi za je raspodjelu vektorskog magnetskog potencijala oko tankožičanog odsječka vodiča:

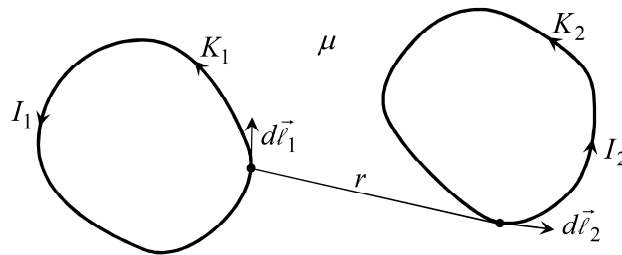
$$\vec{A} = \vec{e}_u \cdot \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\operatorname{Arsh} \frac{u + \frac{\ell}{2}}{v} - \operatorname{Arsh} \frac{u - \frac{\ell}{2}}{v} \right) \quad (16.186)$$

$$\vec{A} = \vec{e}_u \cdot \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{\sqrt{v^2 + \left(u + \frac{\ell}{2}\right)^2} + u + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{v^2 + \left(u - \frac{\ell}{2}\right)^2} + u - \frac{\ell}{2}} \quad (16.187)$$

Izrazi (16.186) i (16.187) mogu se lako dobiti i na temelju analogije s izrazima za raspodjelu skalarnog električnog potencijala oko odsječka cilindričnog vodiča u elektrostatičkom slučaju ili pak u slučaju stacionarnog strujnog polja.

16.20. Neumannova formula

Neka su zadane dvije tankožičane petlje (Slika 16.46). Neka petljom 1 teče vremenski konstantna električna struja I_1 , a petljom 2 vremenski konstantna električna struja I_2 . Neka se tankožičane petlje nalaze u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ . Cilj je dobiti izraz za induktivitet i međuinduktivitet ovih dviju tankožičanih petlji.



Slika 16.46. Dvije tankožičane petlje

Prema izrazu (16.32), vektorski magnetski potencijal na osi petlje 2 uslijed električne struje petlje 1 opisan je izrazom:

$$\vec{A}_{2,1} = \frac{\mu \cdot I_1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{K_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r} \quad (16.188)$$

Magnetski tok, uslijed struje petlje 1, koji ulančuje petlja 2 opisan je izrazom:

$$\Psi_{2,1} = \int_{S_2} \vec{B}_{2,1} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \vec{A}_{2,1}) \cdot d\vec{S} = \oint_{K_2} \vec{A}_{2,1} \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (16.189)$$

gdje S_2 orijentirana ploha koju zatvara krivulja K_2 , odnosno orijentirana ploha koju zatvara tankožičana petlja 2, uz uvažavanje pravila desne ruke.

Ako se izraz (16.188) uvrsti u izraz (16.189), dobije se da je:

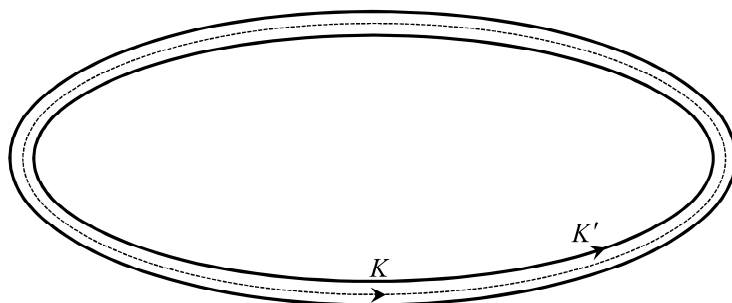
$$\Psi_{2,1} = \oint_{K_2} \vec{A}_{2,1} \cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu \cdot I_1}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r} \quad (16.190)$$

odakle slijedi da je međuinduktivitet tankožičanih petlji M opisan sljedećim izrazom:

$$M = M_{2,1} = M_{1,2} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r} \quad (16.191)$$

koji je poznat kao *Neumannova formula*.

Korištenjem Neumannove formule može se izračunati i vlastiti induktivitet tankožičane petlje (Slika 16.47). U tom je slučaju krivulja $K_1 = K$ na osi tankožičane petlje, a krivulja $K_2 = K'$ na unutarnjem rubu tankožičane petlje.



Slika 16.47. Integracijske krivulje za izračun vlastitog induktiviteta tankožičane petlje

Iz izraza (16.191), slijedi da je vlastiti induktivitet tankožičane petlje opisan sljedećim izrazima:

$$L = L_{\text{un}} + L_{\text{vanj}} \quad ; \quad L_{\text{vanj}} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_K \oint_{K'} \frac{d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}'}{r} \quad (16.192)$$

gdje je L_{vanj} vanjski induktivitet tankožičane petlje, dok je L_{un} unutarnji induktivitet tankožičane petlje, koji se u slučaju kada je tankožičani vodič kružnog poprečnog presjeka može aproksimirati sljedećim izrazom:

$$L_{\text{un}} = L_{\text{un}}^1 \cdot \ell_{\text{petlje}} = \frac{\mu_{\text{vodica}}}{8 \cdot \pi} \cdot \ell_{\text{petlje}} \quad (16.193)$$

gdje je:

$$L_{\text{un}}^1 = \frac{\mu_{\text{vodica}}}{8 \cdot \pi} \quad (16.194)$$

jedinični unutarnji induktivitet petlje, odnosno jedinični unutarnji induktivitet beskonačno dugog pravocrtnog vodiča kružnog poprečnog presjeka kojim teče vremenski konstantna električna struja.

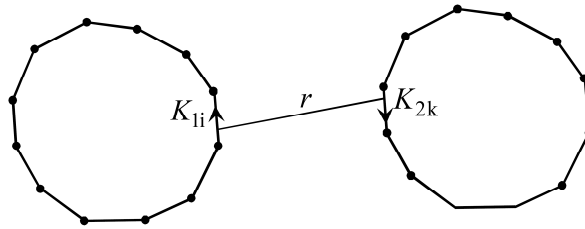
16.21. Induktiviteti odsječaka tankožičanih cilindričnih vodiča

Međuinduktivitet dviju tankožičanih petlji opisan Neumannovom formulom (16.191) može se izračunati tako da se svaka od tankožičanih petlji aproksimira skupom pravocrtnih odsječaka tankožičanog cilindričnog vodiča. Neka tankožičana petlja 1 ima m odsječaka vodiča, a tankožičana petlja 2 neka ima n odsječaka vodiča.

Uz uvedene pretpostavke, iz izraza (16.191) slijedi da je međuinduktivitet dviju tankožičanih petlji, prikazanih na Slici 16.48, aproksimiran sljedećim izrazom:

$$M = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \int_{K_{1i}} \int_{K_{2k}} \frac{d\vec{\ell}_{1i} \cdot d\vec{\ell}_{2k}}{r} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n L_{i,k} \quad (16.195)$$

gdje je $L_{i,k}$ međuinduktivitet i -tog odsječaka vodiča tankožičane petlje 1 i k -tog odsječaka vodiča tankožičane petlje 2. Za međuinduktivitete odsječaka vodiča koristi se i naziv: *parcijalni induktiviteti*.



Slika 16.48. Dvije tankožičane petlje aproksimirane skupom pravocrtnih odsječaka cilindričnog vodiča

Iz izraza (16.195) slijedi da su međuinduktiviteti dvaju odsječaka tankožičanih vodiča opisani sljedećim izrazom:

$$L_{i,k} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{K_{1i}} \int_{K_{2k}} \frac{d\vec{\ell}_{1i} \cdot d\vec{\ell}_{2k}}{r} \quad (16.196)$$

a mogu se opisati i izrazom:

$$L_{i,k} = \cos\beta_{i,k} \cdot \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{K_{1i}} \int_{K_{2k}} \frac{d\ell_{1i} \cdot d\ell_{2k}}{r} \quad (16.197)$$

gdje je $\beta_{i,k}$ kut između diferencijala lukova orijentiranih tankožičanih odsječaka vodiča:

$$\beta_{i,k} = \angle d\vec{\ell}_{1i}, d\vec{\ell}_{2k} \quad (16.198)$$

Vrijedi da je:

$$L_{i,k} = \cos\beta_{i,k} \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \ell_{1i} \cdot \ell_{2k} \cdot \alpha_{i,k} = \cos\beta_{i,k} \cdot \mu \cdot \kappa \cdot \ell_{1i} \cdot \ell_{2k} \cdot R_{i,k} \quad (16.199)$$

gdje su $\alpha_{i,k}$ potencijalni koeficijenti dvaju cilindričnih odsječaka vodiča u savršenom dielektriku, koji su u potpoglavlju 14.24 dobiveni po metodi srednjeg potencijala, dok su $R_{i,k}$ međusobni otpori dvaju cilindričnih odsječaka vodiča u vodljivom sredstvu, koji su dobiveni po metodi srednjeg potencijala.

Ako se tankožičana petlja aproksimira skupom od n pravocrtnih odsječaka tankožičanog cilindričnog vodiča, onda se iz izraza (16.192) dobije sljedeći izraz za induktivitet tankožičane petlje:

$$L = L_{\text{un}} + \sum_{i=1}^n L_{i,i} + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n L_{i,k} \quad ; \quad L_{\text{un}} = \frac{\mu_{\text{vodica}}}{8 \cdot \pi} \cdot \sum_{i=1}^n \ell_i \quad (16.200)$$

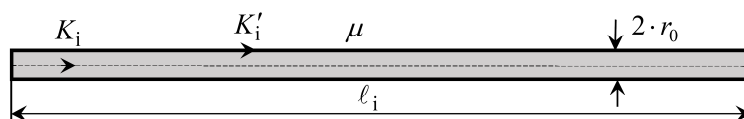
gdje je međuinduktivitet i-tog i k-tog odsječka tankožičane petlje $L_{i,k}$ opisan izrazom:

$$L_{i,k} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{K_i} \int_{K_k} \frac{d\vec{\ell}_i \cdot d\vec{\ell}_k}{r} \quad (16.201)$$

dok je je vanjski induktivitet i-tog odsječka tankožičane petlje $L_{i,i}$ opisan izrazom:

$$L_{i,i} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{K_i} \int_{K'_i} \frac{d\vec{\ell}_i \cdot d\vec{\ell}'_i}{r} \quad (16.202)$$

Integracijske krivulje K_i i K_k leže na osi pripadnog odsječka tankožičanog vodiča, dok integracijska krivulja K'_i leži na plaštu i-tog odsječka tankožičanog vodiča (Slika 16.49).



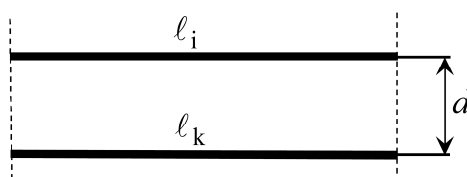
Slika 16.49. Pravocrtni odsječak cilindričnog vodiča u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ

Na temelju analogije s potencijalnim koeficijentima i otporima opisane izrazom (16.199), lako je zaključiti da je vanjski induktivitet i-tog odsječka cilindričnog vodiča, duljine ℓ_i i polumjera r_0 , u neograničenom LIH sredstvu permeabilnosti μ opisan izrazom:

$$L_{i,i} = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\ell_i \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell_i^2 + r_0^2} + \ell_i}{r_0} - \frac{\ell_i^2}{\sqrt{\ell_i^2 + r_0^2} + r_0} \right] = F(\ell_i, r_0) \quad (16.203)$$

gdje je pomoćna funkcija:

$$F(\ell, v) = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (16.204)$$



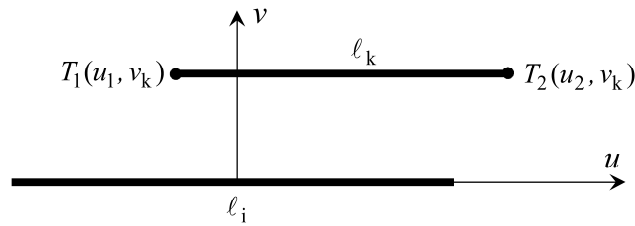
Slika 16.50. Poseban slučaj paralelnosti dvaju odsječaka vodiča

Ako se dva odsječka nalaze u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ te su međusobno paralelni na način prikazan na Slici 16.50 i razmaknuti za d , onda je njihov međuinduktivitet opisan izrazom:

$$L_{i,k} = L_{k,i} = \pm F(\ell_i, d) = \pm \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\ell_i \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell_i^2 + d^2} + \ell_i}{d} - \frac{\ell_i^2}{\sqrt{\ell_i^2 + d^2} + d} \right] \quad (16.205)$$

gdje predznak ovisi o orijentaciji odsječaka. Ova dva odsječka mogu pripadati istoj tankožičanoj petlji, a mogu pripadati i dvjema različitim tankožičanim petljama.

Ako se radi o općem slučaju paralelnosti dvaju odsječaka vodiča (Slika 16.51), onda se k-ti odsječak vodiča promatra u lokalnom koordinatnom sustavu (u, v) i-tog odsječka vodiča. U tom lokalnom koordinatnom sustavu krajnje točke k-tog segmenta su: $T_1(u_1, v_k)$ i $T_2(u_2, v_k)$.



Slika 16.51. Opći slučaj paralelnosti dvaju odsječaka vodiča

Ako se dva odsječka vodiča nalaze u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ te su međusobno paralelni na način prikazan na Slici 16.51, onda se njihov međuinuktivitet može opisati sljedećim izrazom:

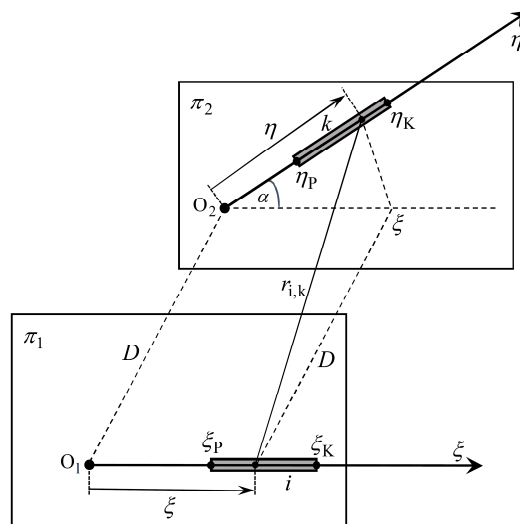
$$L_{i,k} = \pm \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot (C_1 + C_2 - C_3 - C_4) \quad (16.206)$$

gdje predznak ovisi o orijentaciji odsječaka vodiča, dok su pomoćne funkcije C_m opisane izrazima:

$$C_m = w_m \cdot \ln \left(\sqrt{w_m^2 + v_k^2} + w_m \right) - \sqrt{w_m^2 + v_k^2} \quad ; \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (16.207)$$

$$w_1 = u_2 + \frac{\ell_i}{2} \quad ; \quad w_2 = u_1 - \frac{\ell_i}{2} \quad ; \quad w_3 = u_1 + \frac{\ell_i}{2} \quad ; \quad w_4 = u_2 - \frac{\ell_i}{2} \quad (16.208)$$

Međusobno neparalelni (kosi i okomiti) odsječci vodiča leže u istoj ravnini ili pak u međusobno paralelnim ravninama. Dakle, ako neparalelni odsječci vodiča ne leže u istoj ravnini, onda postoje dvije i samo dvije međusobno paralelne ravnine u kojima oni leže (Slika 16.52). Ako leže u istoj ravnini, to je poseban slučaj dviju paralelnih ravnina koje su se preklopile. Neka su u ovom koraku odsječci orijentirani od točke P prema točki K . To znači da je kut $\alpha \in (0, \pi)$.



Slika 16.52. Opći slučaj neparalelnosti dvaju odsječaka vodiča

Iz izraza (16.197) slijedi da je međuinduktivitet dvaju neparalelnih odsječaka tankožičanog vodiča u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti μ definiran izrazom:

$$L_{i,k} = \pm \cos \alpha \cdot \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{\xi_p}^{\xi_k} \int_{\eta_p}^{\eta_k} \frac{d\xi \cdot d\eta}{r_{i,k}} \quad ; \quad \cos \beta_{i,k} = \pm \cos \alpha \quad (16.209)$$

gdje je:

$$r_{i,k} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + D^2 - 2 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \cos \alpha} \quad (16.210)$$

Parametri $\xi_p, \xi_k, \eta_p, \eta_k, \alpha$ i D mogu se lako izračunati iz globalnih koordinata početnih i krajnjih točaka odsječaka vodiča.

Rješenje integrala (16.209) jest Cejtlinova formula* koja glasi:

$$L_{i,k} = \pm \cos \alpha \cdot \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot [A(\xi_p, \eta_p) + A(\xi_k, \eta_k) - A(\xi_p, \eta_k) - A(\xi_k, \eta_p)] \quad (16.211)$$

gdje je:

$$A(\xi, \eta) = \xi \cdot \ln(\eta - \xi \cdot \cos \alpha + r_{i,k}) + \eta \cdot \ln(\xi - \eta \cdot \cos \alpha + r_{i,k}) + \frac{2 \cdot D}{\sin \alpha} \cdot \arctg \left(\frac{\xi + \eta + r_{i,k}}{D} \cdot \tg \frac{\alpha}{2} \right) \quad (16.212)$$

Predznak u izrazima (16.209) i (16.211) ovisi o orijentaciji vektora diferencijala luka i-tog i k-tog odsječaka vodiča. Ako su oba vektora diferencijala luka orijentirana od točke P prema točki K ili pak od točke K prema točki P , onda je predznak pozitivan. U protivnom je predznak negativan.

16.22. Veza između magnetskih silnica i vektorskog magnetskog potencijala

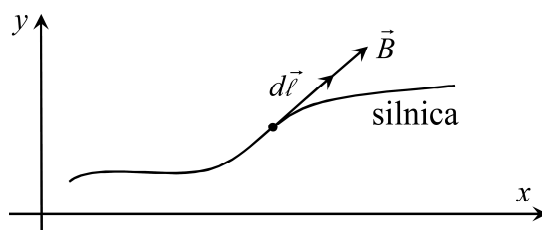
Kod 2D proračuna magnetskog polja pomoću vektorskog magnetskog potencijala vrlo je lako nacrtati magnetske silnice jer su linije $A = \text{konst.}$ ujedno i silnice. Dokaz ove tvrdnje slijedi u nastavku.

Budući da je magnetska indukcija tangencijalna u odnosu na magnetsku silnicu (Slika 16.53), vrijedi da su vektori:

$$\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} \quad ; \quad d\vec{\ell} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} \quad (16.213)$$

međusobno kolinearni, pa vrijedi izraz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \quad (16.214)$$



Slika 16.53. Magnetska silnica u (x, y) koordinatnom sustavu

* Formula je dobila ime po ruskom znanstveniku L. A. Cejtlinu

Budući da magnetska indukcija leži u (x, y) ravnini, vektorski magnetski potencijal je usmjeren duž osi z , odnosno vrijedi da je:

$$\vec{A} = A \cdot \vec{k} \quad (16.215)$$

pa je:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \vec{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (16.216)$$

Iz izraza (16.214) slijedi da je:

$$B_y \cdot dx - B_x \cdot dy = 0 \quad (16.217)$$

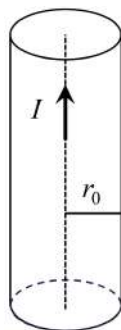
pa iz izraza (16.216) i (16.217) slijedi da za magnetsku silnicu vrijedi da je:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy = dA = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \text{konst.} \quad (16.218)$$

Time je dokazana tvrdnja da su kod 2D problema linije $A = \text{konst.}$ ujedno i magnetske silnice.

16.23. Zadaci

Zadatak 16.1. Pomoću Ampèrevog zakona izvedite izraz za jakost magnetskog polja unutar i izvan beskonačno dugog pravocrtnog cilindričnog vodiča kojim teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Neka je polumjer vodiča r_0 te neka se vodič nalazi u zraku.



Slika 16.54. Beskonačno dugi pravocrtni vodič

Rješenje:

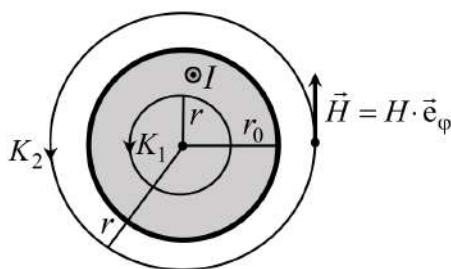
Raspodjela jakosti magnetskog polja je osno simetrična s obzirom na os vodiča pa se koristi cilindrični koordinatni sustav (r, φ, z) .

Plošna gustoća vremenski konstantne električne struje je konstantna po poprečnom presjeku vodiča:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{r_0^2 \cdot \pi} = konst. \quad (16.219)$$

Za $r \leq r_0$, Ampèrev zakon glasi (Slika 16.55):

$$\oint_{K_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = J \cdot r^2 \cdot \pi = I \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{r_0^2 \cdot \pi} \quad (16.220)$$



Slika 16.55. Integracijske krivulje unutar i izvan vodiča

Iz izraza (16.220) slijedi da je jakost magnetskog polja unutar vodiča opisana izrazom:

$$H = \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_0^2} \quad \text{za} \quad r \leq r_0 \quad (16.221)$$

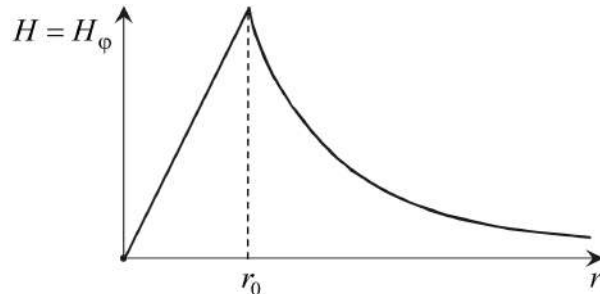
Za $r > r_0$, Ampèrev zakon glasi (Slika 16.55):

$$\oint_{K_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = I \quad (16.222)$$

odakle slijedi da je jakost magnetskog polja izvan vodiča opisana izrazom:

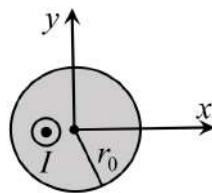
$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad \text{za } r > r_0 \quad (16.223)$$

Jakost magnetskog polja grafički je prikazana na Slici 16.56.



Slika 16.56. Grafički prikaz jakosti magnetskog polja

Zadatak 16.2. Neka beskonačno dugim pravocrtnim vodičem polumjera r_0 teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Odredite izraz za raspodjelu vektorskog magnetskog potencijala, a nakon toga iz poznate raspodjele vektorskog magnetskog potencijala odredite raspodjelu jakosti magnetskog polja. Neka se vodič nalazi u zraku, neka je permeabilnost vodiča μ te neka je $A = 0$ duž osi vodiča.



Slika 16.57. Vodič u pravokutnom koordinatnom sustavu

Rješenje:

Za vektorski magnetski potencijal vrijedi Poissonova diferencijalna jednačnja:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (16.224)$$

gdje je u ovom slučaju:

$$\vec{A} = A \cdot \vec{k} \quad ; \quad \vec{J} = J \cdot \vec{k} \quad (16.225)$$

Raspodjela vektorskog magnetskog potencijala je osnosimetrična s obzirom na os z pa se koristi cilindrični koordinatni sustav (r, φ, z) . U ovom slučaju vrijedi da je:

$$\Delta A = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}}_{=0} \quad (16.226)$$

Unutar vodiča ($r \leq r_0$) vrijedi da je:

$$\Delta A_1 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial A_1}{\partial r} \right) = -\mu \cdot J \quad (16.227)$$

dok izvan vodiča ($r > r_0$) vrijedi da je:

$$\Delta A_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial A_2}{\partial r} \right) = 0 \quad (16.228)$$

Slijedi da je:

$$A = A_1 = C_1 \cdot \ln r - \frac{1}{4} \cdot \mu \cdot J \cdot r^2 + C_2 \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (16.229)$$

$$A = A_2 = C_3 \cdot \ln r + C_4 \quad \text{za } r > r_0 \quad (16.230)$$

gdje su C_1 , C_2 , C_3 i C_4 nepoznate konstante koje se mogu odrediti iz sljedećih graničnih uvjeta:

$$A_1|_{r=0} = 0 \quad (16.231)$$

$$H_{1\varphi}|_{r=r_0} = H_{2\varphi}|_{r=r_0} \quad (16.232)$$

$$A_1|_{r=r_0} = A_2|_{r=r_0} \quad (16.233)$$

Iz graničnog uvjeta (16.231), slijedi da je:

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (16.234)$$

pa, prema izrazu (16.229), slijedi da je:

$$A = A_1 = -\frac{1}{4} \cdot \mu \cdot J \cdot r^2 \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (16.235)$$

Nadalje, vrijedi da je:

$$\vec{H} = \frac{I}{\mu} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu \cdot r} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cdot \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (16.236)$$

odakle slijedi da je:

$$H = H_\varphi = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \quad (16.237)$$

Iz izraza (16.232) i (16.237), slijedi da je:

$$\left(-\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \left(-\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad (16.238)$$

pa se, nakon deriviranja izraza (16.235) i (16.230), dobije da je:

$$\frac{1}{4} \cdot J \cdot 2 \cdot r \Big|_{r=r_0} = -\frac{C_3}{\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r=r_0} \quad (16.239)$$

odakle slijedi da je:

$$C_3 = -\frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot J \cdot r_0^2 = -\frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot J \cdot \frac{r_0^2 \cdot \pi}{\pi} = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \quad (16.240)$$

$$A = A_2 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r + C_4 \quad \text{za } r > r_0 \quad (16.241)$$

Nadalje, iz graničnog uvjeta (16.233) te iz izraza (16.235) i (16.241), slijedi da je:

$$-\frac{1}{4} \cdot \mu \cdot J \cdot r_0^2 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r_0 + C_4 \quad (16.242)$$

odakle slijedi da je:

$$C_4 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\ln r_0 - \frac{\mu_r}{2} \right) \quad (16.243)$$

$$A_2 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln r + \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\ln r_0 - \frac{\mu_r}{2} \right) \quad (16.244)$$

Konačni izrazi glase:

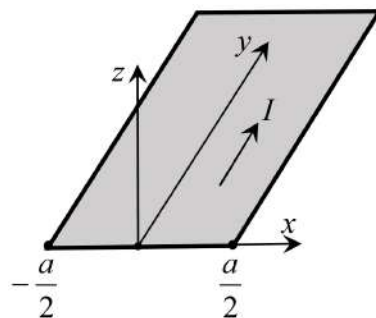
$$A = A_1 = -\frac{1}{4} \cdot \mu \cdot J \cdot r^2 \quad \text{za } r \leq r_0 \quad (16.245)$$

$$A = A_2 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\ln \frac{r}{r_0} + \frac{\mu_r}{2} \right) \quad \text{za } r > r_0 \quad (16.246)$$

$$H_1 = H_{1\varphi} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial r} = \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_0^2} \quad (16.247)$$

$$H_2 = H_{2\varphi} = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial r} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (16.248)$$

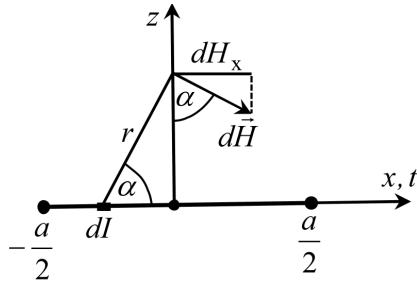
Zadatak 16.3. Po beskonačno dugoj traci širine a teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Odredite raspodjelu jakosti magnetskog polja duž osi z (u ravnini $x = 0$) koja je okomita na traku.



Slika 16.58. Vodljiva beskonačno duga traka

Rješenje:

Zbog simetrije, rezultatni vektor jakosti magnetskog polja duž osi z ima samo x komponentu (Slika 16.59).



Slika 16.59. Diferencijal jakosti magnetskog polja

Prema Slici 16.59, vrijedi da je:

$$dH_x = dH \cdot \sin \alpha = \frac{dl}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{z}{r} \quad (16.249)$$

gdje je:

$$dH = \frac{dl}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad ; \quad dl = \frac{I}{a} \cdot dt \quad ; \quad r = \sqrt{z^2 + t^2} \quad (16.250)$$

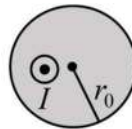
Slijedi da je:

$$dH_x = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{z}{z^2 + t^2} \cdot dt \quad (16.251)$$

pa je:

$$H = H_x = \frac{I \cdot z}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dt}{z^2 + t^2} = \frac{I}{\pi \cdot a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a}{2 \cdot z} \quad (16.252)$$

Zadatak 16.4. Za beskonačno dugi pravocrtni vodič polumjera r_0 kojim teče vremenski konstantna električna struja jakosti I odredite izraz za jedinični unutarnji induktivitet vodiča: a) iz ulančenog magnetskog toka, b) iz magnetske energije pohranjene u magnetostatičkom polju. Neka je sredstvo od kojeg je načinjen vodič linearno, homogeno i izotropno te neka mu je magnetska permeabilnost μ .



Slika 16.60. Beskonačno dugi cilindrični vodič

Rješenje:

Raspodjela jakosti magnetskog polja unutar vodiča opisana je izrazom:

$$H = \frac{I_{\text{ob}}}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_0^2} \quad (16.253)$$

a) Izračun jediničnog unutarnjeg induktiviteta iz ulančenog magnetskog toka

Magnetski tok se zatvara oko osi vodiča. Za magnetski tok po jedinici duljine vodiča vrijedi da je:

$$d\Phi = \mu \cdot H \cdot dS = \mu \cdot H \cdot dr \quad (16.254)$$

dok je ulančeni magnetski tok po jedinici duljine opisan izrazom:

$$d\Psi = k_u \cdot d\Phi = \frac{I_{ob}}{I} \cdot \mu \cdot H \cdot dr = \frac{r^2}{r_0^2} \cdot \mu \cdot H \cdot dr \quad (16.255)$$

gdje je k_u faktor ulančenja, koji je jednak omjeru električne struje obuhvaćene silnicom i ukupne struje preko koje se izražava ulančeni magnetski tok.

Slijedi da je:

$$d\Psi = \mu \cdot \frac{I \cdot r^3}{2 \cdot \pi \cdot r_0^4} \cdot dr \quad (16.256)$$

pa je ulančeni magnetski tok vodiča po jedinici duljine vodiča:

$$\Psi = \mu \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_0^4} \cdot \int_0^{r_0} r^3 \cdot dr = \frac{\mu \cdot I}{8 \cdot \pi} = L_{un} \cdot I \quad (16.257)$$

odakle slijedi da je jedinični unutarnji induktivitet vodiča, ili drukčije rečeno unutarnji induktivitet po jedinici duljine vodiča, opisan izrazom:

$$L_{un} = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} \quad (16.258)$$

b) Izračun jediničnog unutarnjeg induktiviteta iz pohranjene magnetske energije

Magnetska energija pohranjena unutar jednog metra duljine beskonačno dugog vodiča opisana je izrazom:

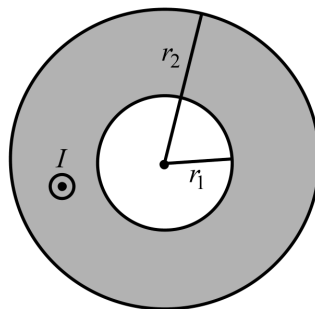
$$W_m = \frac{\mu}{2} \cdot \int_0^{r_0} H^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{\mu \cdot I^2}{4 \cdot \pi \cdot r_0^4} \cdot \int_0^{r_0} r^3 \cdot dr = \frac{\mu \cdot I^2}{16 \cdot \pi} = \frac{L_{un} \cdot I^2}{2} \quad (16.259)$$

odakle slijedi da je jedinični unutarnji induktivitet vodiča:

$$L_{un} = \frac{2 \cdot W_m}{I^2} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} \quad (16.260)$$

Napomena: Jedinični vanjski induktivitet beskonačno dugog pravocrtnog vodiča je beskonačan jer se zamišljeni povratni vodič nalazi u beskonačnosti.

Zadatak 16.5. Za bakreni beskonačno dugi pravocrtni šuplji cilindrični vodič unutarnjeg polumjera $r_1 = 1$ cm i vanjskog polumjera $r_2 = 5$ cm, izračunajte jedinični unutarnji induktivitet: a) iz ulančenog magnetskog toka, b) iz magnetske energije pohranjene u magnetostatičkom polju. Neka vodičem teče vremenski konstantna električna struja.



Slika 16.61. Beskonačno dugi šuplji cilindrični vodič

Rješenje:

Plošna gustoća vremenski konstantne električne struje u vodiču opisana je izrazom:

$$J = \frac{I}{(r_2^2 - r_1^2) \cdot \pi} \quad (16.261)$$

Slijedi da je jakost magnetskog polja u vodiču opisana izrazom:

$$H = \frac{I_{\text{ob}}}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{J \cdot (r^2 - r_1^2) \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{I}{2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \pi} \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{r} \quad (16.262)$$

a) Izračun jediničnog unutarnjeg induktiviteta iz ulančenog magnetskog toka

Magnetski tok se zatvara oko osi vodiča. Za magnetski tok po jedinici duljine vodiča vrijedi da je:

$$d\Phi = \mu_0 \cdot H \cdot dS = \mu_0 \cdot H \cdot dr \quad (16.263)$$

dok je ulančeni magnetski tok po jedinici duljine opisan izrazom:

$$d\Psi = k_u \cdot d\Phi = \frac{I_{\text{ob}}}{I} \cdot \mu_0 \cdot H \cdot dr = \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \mu_0 \cdot H \cdot dr \quad (16.264)$$

gdje je k_u faktor ulančenja, koji je jednak omjeru električne struje obuhvaćene silnicom i ukupne struje preko koje se izražava ulančeni magnetski tok.

Slijedi da je:

$$d\Psi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)^2 \cdot \pi} \cdot \left(r^3 - 2 \cdot r_1^2 \cdot r + \frac{r_1^4}{r} \right) \quad (16.265)$$

pa je ulančeni magnetski tok po jedinici duljine vodiča:

$$\Psi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)^2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} - r_1^2 \cdot r^2 + r_1^4 \cdot \ln r \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = L_{\text{un}} \cdot I \quad (16.266)$$

odakle slijedi da je jedinični unutarnji induktivitet vodiča:

$$L_{\text{un}} = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)^2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4} - r_1^2 \cdot r_2^2 + r_1^4 + r_1^4 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (16.267)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$L_{\text{un}} = \frac{\Psi}{I} = 4,639216594 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad (16.268)$$

b) Izračun jediničnog unutarnjeg induktiviteta iz pohranjene magnetske energije

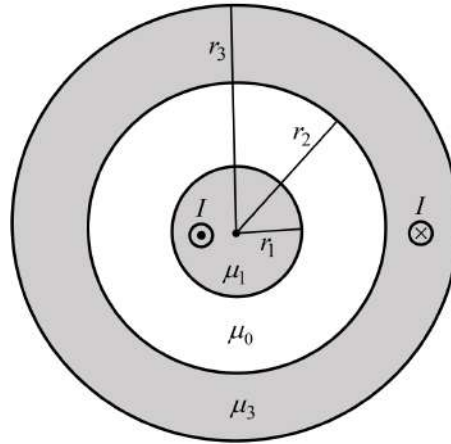
Magnetska energija pohranjena unutar jednog metra duljine beskonačno dugog vodiča opisana je izrazom:

$$W_m = \frac{\mu_0}{2} \cdot \int_{r_1}^{r_2} H^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4 \cdot (r_2^2 - r_1^2)^2 \cdot \pi} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r^2 - r_1^2)^2}{r} dr = \frac{L_{\text{un}} \cdot I^2}{2} \quad (16.269)$$

odakle slijedi da je jedinični unutarnji induktivitet vodiča:

$$L_{\text{un}} = \frac{2 \cdot W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)^2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4} - r_1^2 \cdot r_2^2 + r_1^4 + r_1^4 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (16.270)$$

Zadatak 16.6. Odredite jedinični induktivitet koaksijalnog kabela kojim teče vremenski konstantna električna struja. Neka je zadano: $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 2 \text{ cm}$, $r_3 = 3 \text{ cm}$, $\mu_{r1} = 10$, $\mu_{r3} = 5$.



Slika 16.62. Beskonačno dugi koaksijalni kabel

Rješenje:

Jedinični induktivitet najlakše je odrediti iz magnetske energije pohranjene u magnetostatičkom polju. Jakost magnetskog polja opisana je izrazima:

$$H = H_1 = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_1^2} \cdot r \quad \text{za } r \leq r_1 \quad (16.271)$$

$$H = H_2 = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad \text{za } r_1 < r \leq r_2 \quad (16.272)$$

$$H = H_3 = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad \text{za } r_2 < r \leq r_3 \quad (16.273)$$

Pohranjena energija opisana je izrazima:

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} = \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{2} \cdot I^2 \quad (16.274)$$

$$W_{mi} = \frac{\mu_i}{2} \cdot \int_{V_i} H_i^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot L_i \cdot I^2 \quad ; \quad i=1, 2, 3 \quad (16.275)$$

odakle slijedi da je:

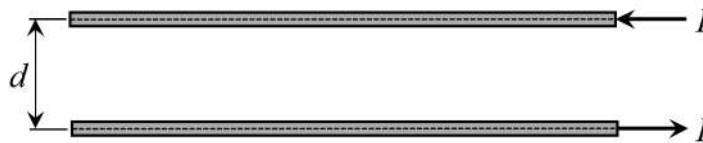
$$L_1 = \frac{\mu_1}{8 \cdot \pi} = 0,5 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad (16.276)$$

$$L_2 = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,13862944 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad (16.277)$$

$$L_3 = \frac{\mu_3}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3 \cdot r_3^2 - r_2^2}{4 \cdot (r_3^2 - r_2^2)} \right] = 0,16370695 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad (16.278)$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 0,8023364 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad (16.279)$$

Zadatak 16.7. Odredite jedinični induktivitet dvožičnog osamljenog voda, uz pretpostavku da vodom teče vremenski konstantna električna struja. Neka je polumjer vodiča r_0 , neka su vodiči razmaknuti za d , neka je magnetska permeabilnost vodiča μ te neka se vod nalazi u zraku. Pretpostavite da je $d \gg r_0$.



Slika 16.63. Dvožični osamljeni vod

Rješenje:

Budući da je $d \gg r_0$, može se uzeti da jedan vodič ne utječe na unutarnji induktivitet drugog vodiča. Prema izrazu (16.258), jedinični unutarnji induktivitet beskonačno dugog vodiča je:

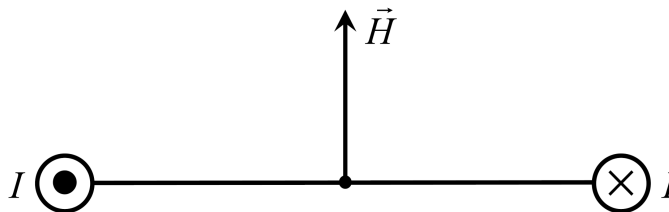
$$L_{\text{un vodiča}} = \frac{\mu}{8 \cdot \pi} \quad (16.280)$$

pa je jedinični unutarnji induktivitet voda:

$$L_{\text{un}} = 2 \cdot L_{\text{un vodiča}} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \quad (16.281)$$

Do ovog izraza najlakše se dođe tako da se unutarnji induktivitet vodiča izračuna iz magnetske energije pohranjene unutar osamljenog beskonačno dugog vodiča.

Jedinični vanjski induktivitet voda najlakše je izračunati iz ulančenog magnetskog toka, pošavši od Slike 16.64.



Slika 16.64. Vektor jakosti magnetskog polja između vodiča dvožičnog voda

Sav vanjski magnetski tok voda prolazi između vodiča. U cilindričnom koordinatnom sustavu kojemu je središte na osi lijevog vodiča, jakost magnetskog polja na spojnici između vodiča opisana je izrazom:

$$\vec{H} = \frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) \cdot \vec{e}_\varphi \quad (16.282)$$

Budući da vodiči podjednako doprinose magnetskom toku koji prolazi između vodiča, da bi se izračunao magnetski tok između vodiča može se izračunati magnetski tok samo od električne struje lijevog vodiča i potom udvostručiti:

$$\Psi = \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi} \cdot \ln \frac{d-r_0}{r_0} = L_{\text{vanj}} \cdot I \quad (16.283)$$

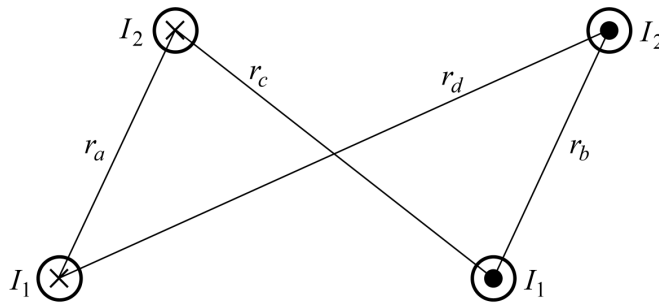
odakle slijedi da je jedinični vanjski induktivitet dvožičnog voda za $d \gg r_0$:

$$L_{\text{vanj}} = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{d-r_0}{r_0} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{r_0} \quad (16.284)$$

Slijedi da je ukupni jedinični induktivitet dvožičnog voda opisan izrazom:

$$L = L_{\text{un}} + L_{\text{vanj}} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{r_0} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \left(\frac{\mu_r}{4} + \ln \frac{d}{r_0} \right) \quad (16.285)$$

Zadatak 16.8. Odredite jedinični međuinduktivitet dvaju osamljenih beskonačno dugih međusobno paralelnih dvožičnih vodova. Neka je polumjer vodiča zanemariv u odnosu na međusobni razmak vodiča. Neka je zadano r_a, r_b, r_c i r_d . Neka vodovima koji se nalaze u zraku teku vremenski konstantne električne struje.

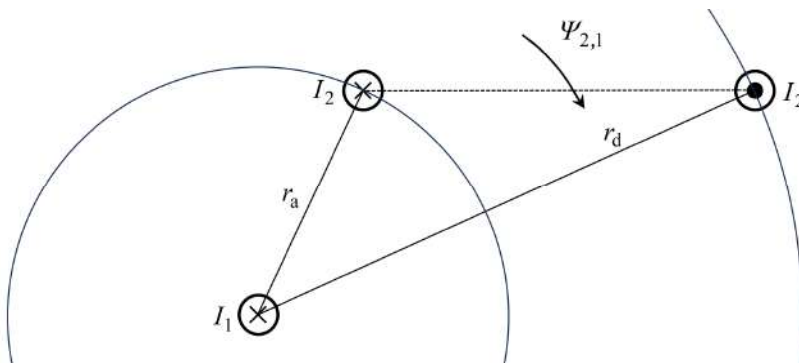


Slika 16.65. Dva osamljena dvožična voda

Rješenje:

Ulančeni magnetski tok koji ulančuje vod 2, a stvara ga vremenski konstantna električna struja voda 1 (Slika 16.66) opisan je izrazom:

$$\Psi_{2,1} = \Phi_{2,1} = \int_{r_a}^{r_d} \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot dr - \int_{r_c}^{r_b} \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot dr \quad (16.286)$$



Slika 16.66. Ulančeni magnetski tok od jednog vodiča voda 1

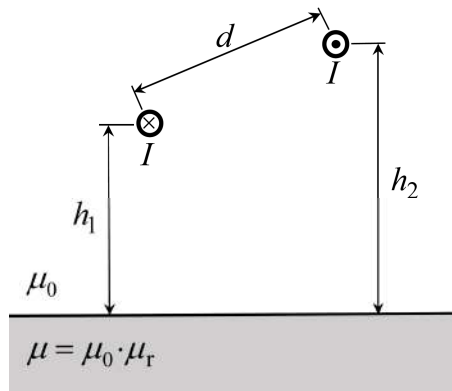
Iz izraza (16.286), slijedi da je:

$$\Psi_{2,1} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_c \cdot r_d}{r_a \cdot r_b} = M_{2,1} \cdot I_1 \quad (16.287)$$

pa je jedinični međuinduktivitet dvaju beskonačno dugih, međusobno paralelnih, vodova:

$$M = M_{1,2} = M_{2,1} = \frac{\Psi_{2,1}}{I_1} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_c \cdot r_d}{r_a \cdot r_b} \quad (16.288)$$

Zadatak 16.9. Zračni se dvožični vod nalazi u zraku iznad konačno permeabilnog poluprostora kojemu je relativna magnetska permeabilnost $\mu_r = 5$. Odredite jedinični vanjski induktivitet voda, uz upotrebu metode odslikavanja. Neka vodom teče vremenski konstantna električna struja. Neka je zadano: $h_1 = 5$ m, $h_2 = 5,5$ m, $r_0 = 2$ cm, $d = 2$ m. Pretpostavite da je $d \gg r_0$.



Slika 16.67. Dvožični vod iznad magnetskog poluprostora

Rješenje:

Utjecaj heterogenosti sredstva može se uzeti u račun tako da se granični uvjet na granici dvaju LIH sredstva zadovolji korištenjem metode odslikavanja. Po metodi odslikavanja dva vodiča u zraku nadomještaju četiri vodiča u neograničenom LIH sredstvu kojemu je magnetska permeabilnost jednaka magnetskoj permeabilnosti zraka (Slika 16.68).

Prema izrazu (16.64), faktor refleksije je:

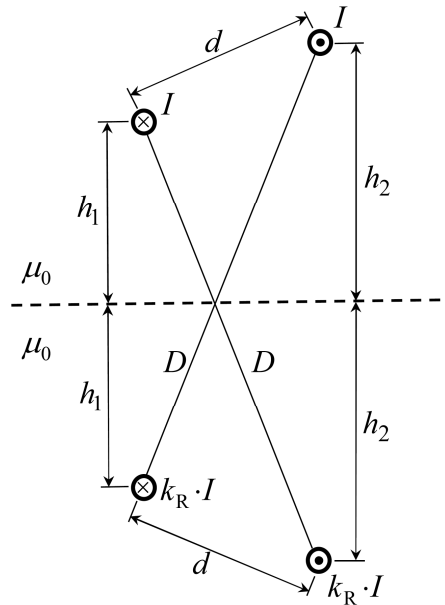
$$k_R = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} = \frac{2}{3} \quad (16.289)$$

dok je parametar D (Slika 16.68) opisan izrazom:

$$D = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d^2} - (h_1 - h_2) = \sqrt{d^2 + 4 \cdot h_1 \cdot h_2} = 10,67707825 \text{ m} \quad (16.290)$$

Vanjski ulančeni magnetski tok po jedinici duljine voda, uz pretpostavku da je $d \gg r_0$, opisan je izrazom:

$$\Psi = \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{r_0}^d \frac{dr}{r} + \frac{\mu_0 \cdot k_R \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_{2 \cdot h_1}^D \frac{dr}{r} - \int_D^{2 \cdot h_2} \frac{dr}{r} \right) = L_{\text{vanj}} \cdot I \quad (16.291)$$



Slika 16.68. Stvarni i odslikani dvožični vod u neograničenom LIH zraku

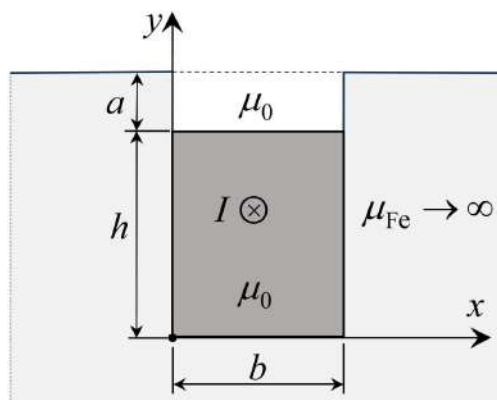
Iz izraza (16.291), slijedi da je:

$$L_{\text{vanj}} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot k_R \cdot \ln \frac{D^2}{4 \cdot h_1 \cdot h_2} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \left(\ln \frac{d}{r_0} + k_R \cdot \ln \frac{D}{2 \cdot \sqrt{h_1 \cdot h_2}} \right) \quad (16.292)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$L_{\text{vanj}} = 1,846830485 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad (16.293)$$

Zadatak 16.10. Izračunajte jedinični rasipni induktivitet utora električnog stroja, uz pretpostavku da je magnetska permeabilnost željeza beskonačna. Neka bakrenim vodičem teče vremenski konstantna električna struja. U račun trebate uzeti i rasipni induktivitet zračnog raspore iznad bakrenog vodiča, kojemu je visina a . Pretpostavite da je dio silnice u bakrenom vodiču i zračnom raspore pravocrtan i paralelan osi x te da je jakost magnetskog polja duž dijela pojedine silnice u bakrenom vodiču i zračnom raspore konstantna. Rješenje odredite: a) iz ulančenog magnetskog toka; b) iz magnetske energije pohranjene u magnetostatičkom polju. Neka je zadano: $a = 1$ cm, $b = 3$ cm, $h = 6$ cm.



Slika 16.69. Utor električnog stroja

Rješenje:

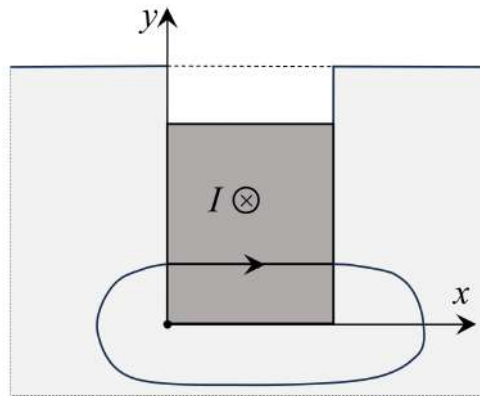
Uz uvedene pretpostavke, vrijedi da je:

$$H = H_x = H_1 = \frac{I_{ob}}{b} = I \cdot \frac{y}{h \cdot b} \quad \text{za} \quad 0 \leq y \leq h \quad (16.294)$$

$$H = H_x = H_2 = \frac{I_{ob}}{b} = \frac{I}{b} \quad \text{za} \quad h < y \leq h + a \quad (16.295)$$

a) Izračun rasipnog induktiviteta iz ulančenog magnetskog toka

Magnetske silnice se zatvaraju na način prikazan na Slici 16.70.



Slika 16.70. Grafički prikaz magnetske silnice

Diferencijal ulančenog magnetskog toka u bakrenom vodiču opisan je izrazom:

$$d\Psi_1 = \frac{I_{ob}}{I} \cdot d\Phi_1 = \frac{y}{h} \cdot d\Phi_1 = \frac{y}{h} \cdot \mu_0 \cdot H_1 \cdot dy = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{y^2}{h^2 \cdot b} \cdot dy \quad (16.296)$$

odakle slijedi da je ulančeni magnetski tok po jedinici duljine bakrenog vodiča:

$$\Psi_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{h^2 \cdot b} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = \frac{\mu_0 \cdot h}{3 \cdot b} \cdot I = L_1 \cdot I \quad (16.297)$$

Diferencijal ulančenog magnetskog toka u zračnom rasporu iznad bakrenog vodiča opisan je izrazom:

$$d\Psi_2 = \frac{I_{ob}}{I} \cdot d\Phi_2 = d\Phi_2 = \mu_0 \cdot H_2 \cdot dy = \mu_0 \cdot \frac{I}{b} \cdot dy \quad (16.298)$$

odakle slijedi da je ulančeni magnetski tok po jedinici duljine zračnog raspora:

$$\Psi_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{b} \cdot \int_h^{h+a} dy = \frac{\mu_0 \cdot a}{b} \cdot I = L_2 \cdot I \quad (16.299)$$

Ukupni jedinični rasipni induktivitet utora opisan je izrazom:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{I} = L_1 + L_2 = \frac{\mu_0}{b} \cdot \left(\frac{h}{3} + a \right) \quad (16.230)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$L = 1,256637061 \frac{\mu\text{H}}{\text{m}} \quad (16.301)$$

b) Izračun rasipnog induktiviteta iz pohranjene magnetske energije

Magnetska energija pohranjena u jedinici duljine bakrenog vodiča opisana je izrazom:

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \int_0^h H_1^2 \cdot b \cdot dy = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2 \cdot h^2 \cdot b} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot h}{3 \cdot b} = \frac{I^2}{2} \cdot L_1 \quad (16.302)$$

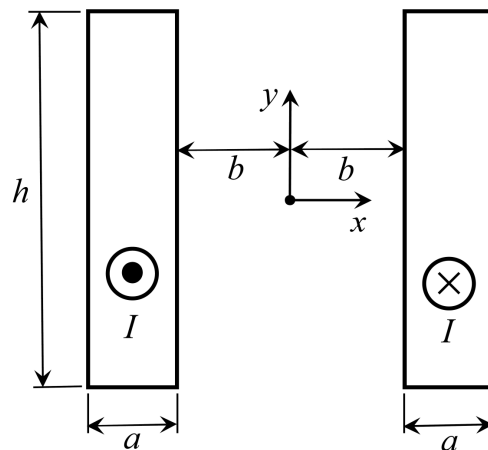
dok je magnetska energija pohranjena u jedinici duljine zračnog raspora iznad bakrenog vodiča opisana izrazom:

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \int_h^{h+a} H_2^2 \cdot b \cdot dy = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2 \cdot b} \cdot \int_h^{h+a} dy = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot a}{b} = \frac{I^2}{2} \cdot L_2 \quad (16.303)$$

Ukupni jedinični rasipni induktivitet utora opisan je izrazom:

$$L = \frac{2 \cdot W_m}{I^2} = \frac{2 \cdot (W_{m1} + W_{m2})}{I^2} = L_1 + L_2 = \frac{\mu_0}{b} \cdot \left(\frac{h}{3} + a \right) \quad (16.304)$$

Zadatak 16.11. Električni vod tvore dvije međusobno paralelne bakrene sabirnice kojima teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Pomoću Ampèreovog zakona odredite raspodjelu jakosti magnetskog polja, ulančeni magnetski tok i induktivitet po jedinici duljine voda. Zanimarite rubne efekte i pretpostavite da je duljina voda $\ell \gg h$ te da je $h \gg a, b$.

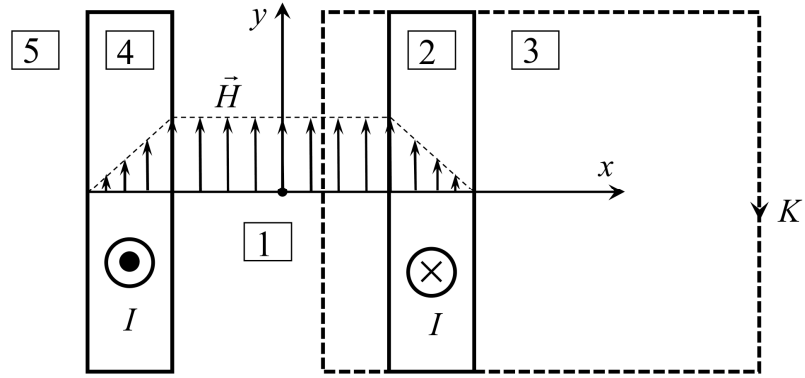


Slika 16.71. Dvožični električni vod

Rješenje:

2D područje se može podijeliti na pet različitih potpodručja (Slika 16.72). Uz uvedene pretpostavke, 3D problem se numerički svodi na 1D problem. Prema Slici 16.72 vrijedi da je:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_K \left(\frac{H_x}{0} \cdot dx + H_y \cdot dy + \frac{H_z}{0} \cdot dz \right) = \oint_K H_y \cdot dy = I_{ob} \quad (16.305)$$



Slika 16.72. Podjela 2D područja na pet dijelova

Iz izraza (16.305), slijedi da je:

$$H_1 = H_{1y} = \frac{I_{ob}}{h} = \frac{I}{h} \quad (16.306)$$

$$H_2 = H_{2y} = \frac{I_{ob}}{h} = \frac{I}{h} \cdot \frac{a+b-x}{a} \quad (16.307)$$

$$H_3 = H_{3y} = \frac{I_{ob}}{h} = 0 \quad (16.308)$$

$$H_4 = H_{4y} = \frac{I_{ob}}{h} = \frac{I}{h} \cdot \frac{a+b+x}{a} \quad (16.309)$$

$$H_5 = H_{5y} = \frac{I_{ob}}{h} = 0 \quad (16.310)$$

Važno je uočiti da je raspodjela jakosti magnetskog polja simetrična u odnosu na os y , odnosno da je to parna funkcija ovisna samo o varijabli x .

Ulančeni magnetski tok u smjeru y -osi u potpodručju 1 je:

$$\Psi_1 = \Phi_1 = \mu_0 \cdot H_1 \cdot 2 \cdot b \cdot 1 = 2 \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot b}{h} \quad (16.311)$$

Diferencijal ulančenog magnetskog toka u smjeru y -osi u potpodručju 2 je:

$$d\Psi_2 = \frac{I_{ob}}{I} \cdot d\Phi_2 = \frac{a+b-x}{a} \cdot \mu_0 \cdot H_2 \cdot dx \quad (16.312)$$

odakle slijedi da je:

$$\Psi_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{a^2 \cdot h} \cdot \int_b^{a+b} (a+b-x)^2 \cdot dx = -\frac{\mu_0 \cdot I}{a^2 \cdot h} \cdot \frac{(a+b-x)^3}{3} \Big|_b^{a+b} \quad (16.313)$$

pa je:

$$\Psi_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{3 \cdot a^2 \cdot h} \cdot a^3 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a}{3 \cdot h} \quad (16.314)$$

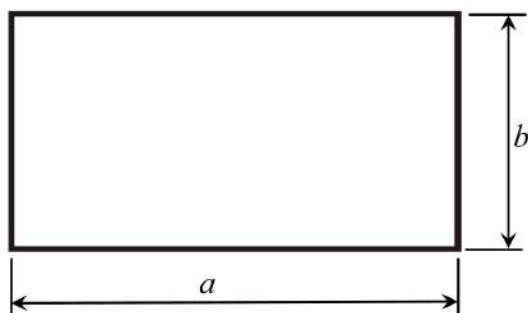
Ukupni ulančeni magnetski tok po jedinici duljine je:

$$\Psi = \Psi_1 + 2 \cdot \Psi_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{h} \cdot \left(2 \cdot b + \frac{2 \cdot a}{3} \right) \quad (16.315)$$

pa je jedinični induktivitet voda, ili drukčije rečeno induktivitet po jedinici duljine voda, opisan izrazom:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{2 \cdot \mu_0}{h} \cdot \left(b + \frac{a}{3} \right) \quad (16.316)$$

Zadatak 16.12. Pomoću Neumannove formule odredite vlastiti induktivitet pravokutne tankožičane petlje koja se nalazi u zraku. Neka su vodiči od bakra kružnog poprečnog presjeka, polumjera r_0 . Neka petljom teče vremenski konstantna električna struja. Pretpostavite da je $r_0 \ll a, b$.



Slika 16.73. Tankožičana pravokutna petlja

Rješenje:

Koristi se tankožičana aproksimacija vodiča, odnosno pretpostavlja se da je vremenski konstantna električna struja koncentrirana u osi vodiča. Vlastiti induktivitet tankožičane petlje, prema izrazu (16.192), opisan je Neumannovom formulom:

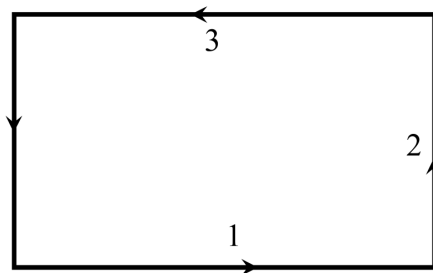
$$L = L_{\text{un}} + L_{\text{vanj}} ; L_{\text{vanj}} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_K \oint_{K'} \frac{d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}'}{r} \quad (16.317)$$

gdje je L_{vanj} vanjski induktivitet tankožičane petlje, dok je L_{un} unutarnji induktivitet tankožičane petlje, koji se u slučaju kada je bakreni tankožičani vodič kružnog poprečnog presjeka može, prema izrazu (16.193), aproksimirati sljedećim izrazom:

$$L_{\text{un}} = \frac{\mu_{\text{vodica}}}{8 \cdot \pi} \cdot \ell_{\text{petlje}} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot (a + b) \quad (16.318)$$

U općem slučaju, integracijske krivulje za izračun vlastitog induktiviteta tankožičane petlje dane su na Slici 16.74.

U prvom koraku, tankožičana se petlja podijeli na četiri orijentirana tankožičana odsječka vodiča (Slika 16.74).



Slika 16.74. Četiri orijentirana tankožičana odsječka vodiča

U ovom slučaju, opći izraz (16.317) poprima oblik:

$$L = L_{\text{un}} + \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 \int_{K_{1i}} \int_{K_{2k}} \frac{d\vec{\ell}_{1i} \cdot d\vec{\ell}_{2k}}{r} = L_{\text{un}} + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 L_{i,k} \quad (16.319)$$

gdje su, dakle, vlastiti i međusobni vanjski induktiviteti odsječaka vodiča opisani izrazom:

$$L_{i,k} = L_{k,i} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{K_{1i}} \int_{K_{2k}} \frac{d\vec{\ell}_{1i} \cdot d\vec{\ell}_{2k}}{r} \quad (16.320)$$

Međuinduktiviteti međusobno okomitih odsječaka vodiča jednaki su nuli, a, osim toga, vrijedi da je:

$$L_{1,1} = L_{3,3} \quad ; \quad L_{2,2} = L_{4,4} \quad (16.321)$$

pa je:

$$L = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot (a + b) + 2 \cdot (L_{1,1} + L_{2,2} + L_{1,3} + L_{2,4}) \quad (16.322)$$

Prema potpoglavlju 16.21, vlastiti vanjski induktiviteti odsječaka opisani su izrazima:

$$L_{1,1} = F(a, r_0) \quad ; \quad L_{2,2} = F(b, r_0) \quad (16.323)$$

dok su međuinduktiviteti odsječaka opisani izrazima:

$$L_{1,3} = -F(a, b) \quad ; \quad L_{2,4} = -F(b, a) \quad (16.324)$$

gdje je, prema izrazu (16.204), pomoćna funkcija $F(\ell, v)$ opisana izrazom:

$$F(\ell, v) = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + v^2} + \ell}{v} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + v^2} + v} \right] \quad (16.325)$$

Iz prethodnih izraza slijedi da je:

$$L_{1,1} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[a \cdot \ln \frac{\sqrt{a^2 + r_0^2} + a}{r_0} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + r_0^2} + r_0} \right] \quad (16.326)$$

$$L_{2,2} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[b \cdot \ln \frac{\sqrt{b^2 + r_0^2} + b}{r_0} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + r_0^2} + r_0} \right] \quad (16.327)$$

$$L_{1,3} = -\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[a \cdot \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + b} \right] \quad (16.328)$$

$$L_{2,4} = -\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[b \cdot \ln \frac{\sqrt{b^2 + a^2} + b}{a} - \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2} + a} \right] \quad (16.329)$$

Zadatak 16.13. Za pravocrtni odsječak bakrenog tankožičanog vodiča duljine $\ell = 10$ m, polumjera $r_0 = 5$ mm, pomoću Neumannove formule izračunajte vlastiti induktivitet. Neka se vodič nalazi u zraku. Neka vodičem teče vremenski konstantna električna struja. Pretpostavite da je $r_0 \ll \ell$.

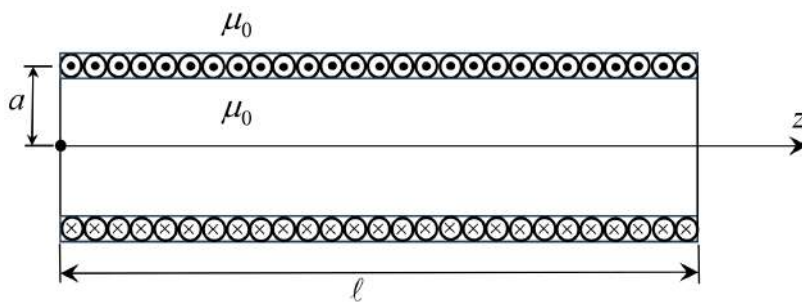
Rješenje:

$$L_{\text{un}} = \frac{\mu_0}{8 \cdot \pi} \cdot \ell = 0,5 \text{ } \mu\text{H} \quad (16.330)$$

$$L_{\text{vanj}} = F(\ell, r_0) = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\ell \cdot \ln \frac{\sqrt{\ell^2 + r_0^2} + \ell}{r_0} - \frac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + r_0^2} + r_0} \right] \quad (16.331)$$

$$L = L_{\text{un}} + L_{\text{vanj}} = 15,0890991552 \text{ } \mu\text{H} \quad (16.332)$$

Zadatak 16.14. Odredite raspodjelu jakosti magnetskog polja duž osi ravne tanke zavojnice duljine ℓ , polumjera a koja se nalazi u zraku. Neka je zavojnica gusto i jednoliko namotana na cilindar od materijala magnetske permeabilnosti μ_0 te neka ima ukupno N zavoja. Neka zavojnicom teče vremenski konstantna električna struja jakosti I .

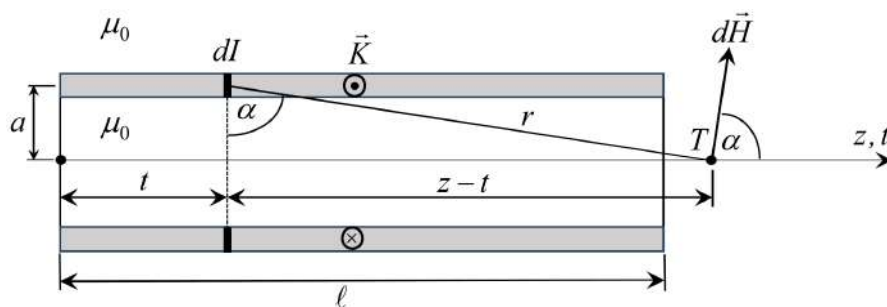


Slika 16.75. Gusto i jednoliko namotana ravna zavojnica

Rješenje:

U ovom se slučaju zavojnica može promatrati kao strujni oblog (linijska gustoća plošne električne struje):

$$K = \frac{N \cdot I}{\ell} \quad (16.333)$$



Slika 16.76. Ravna zavojnica prikazana kao strujni oblog

Prema Biot-Savartovom zakonu, za tankožičanu kružnu petlju kojom teče vremenski konstantna električna struja jakosti $dI = K \cdot dt$ (Slika 16.76) vrijedi da je:

$$d\vec{H} = \frac{dI}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{K \cdot dt}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{a \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{r}}{r^3} \quad (16.334)$$

Zbog simetrije, duž osi z jakost magnetskog polja ima samo z -komponentu pa je prema izrazu (16.334) i Slici 16.76:

$$dH_z = dH \cdot \cos \alpha = \frac{a}{r} \cdot dH = \frac{K \cdot du}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{a^2 \cdot d\varphi}{r^3} \quad (16.335)$$

odakle slijedi da je:

$$H = H_z = \frac{K \cdot a^2}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\ell \frac{dt}{r^3} = \frac{K \cdot a^2}{2} \cdot \int_0^\ell \frac{dt}{r^3} \quad (16.336)$$

gdje je:

$$r = \sqrt{(z-t)^2 + a^2} = \sqrt{(t-z)^2 + a^2} \quad (16.337)$$

pa je:

$$H = H_z = \frac{K \cdot a^2}{2} \cdot \int_0^\ell \frac{dt}{\left(\sqrt{(t-z)^2 + a^2}\right)^3} \quad (16.338)$$

Slijedi da je:

$$H = H_z = \frac{K \cdot a^2}{2} \cdot \frac{t-z}{a^2 \cdot \sqrt{(t-z)^2 + a^2}} \Bigg|_0^\ell \quad (16.339)$$

pa je:

$$H = H_z = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \ell} \cdot \left[\frac{\ell - z}{\sqrt{(\ell - z)^2 + a^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad (16.340)$$

Ako je točka promatranja unutar zavojnice, onda se izraz (16.340) može napisati u sljedećem obliku:

$$H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \ell} \cdot (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (16.341)$$

gdje je:

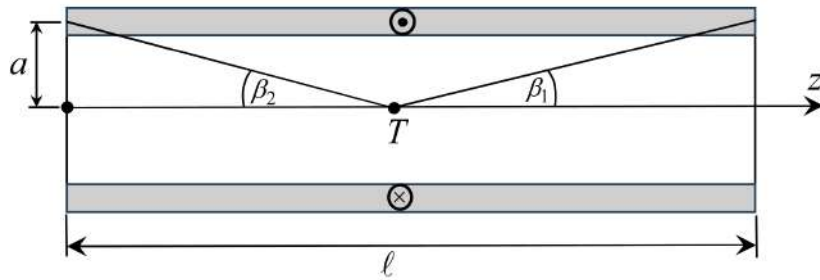
$$\cos \beta_1 = \frac{\ell - z}{\sqrt{(\ell - z)^2 + a^2}} \quad (16.342)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad (16.343)$$

Kutovi β_1 i β_2 prikazani su na Slici 16.77.

Za točku T duboko unutar vrlo duge zavojnice ($\ell \gg a$) vrijedi da je:

$$\beta_1 \rightarrow 0 \quad ; \quad \beta_2 \rightarrow 0 \quad ; \quad H \approx \frac{N \cdot I}{\ell} \quad (16.344)$$



Slika 16.77. Točka promatranja unutar ravne zavojnice

Zadatak 16.15. Odredite vlastiti vanjski induktivitet ravne tanke zavojnice duljine ℓ , polumjera a koja se nalazi u zraku i prikazana je na Slici 16.75. Neka je zavojnica gusto i jednoliko namotana na cilindar od materijala magnetske permeabilnosti μ_0 te neka ima ukupno N zavoja. Neka zavojnicom teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Pretpostavite da je magnetsko polje unutar zavojnice homogeno te da je jakost homogenog magnetskog polja jednaka srednjoj vrijednosti jakosti magnetskog polja duž osi zavojnice.

Rješenje:

Prema prethodnom zadatku, jakost magnetskog polja duž osi z opisana je izrazom (16.339), koji glasi:

$$H = H(z) = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \ell} \cdot \left(\frac{\ell - z}{\sqrt{(\ell - z)^2 + a^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \quad (16.345)$$

pa je srednja vrijednost jakosti magnetskog polja duž osi z , unutar zavojnice, opisana izrazom:

$$H_{\text{sr}} = \frac{1}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} H \cdot dz = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \ell^2} \cdot \int_0^{\ell} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{z - \ell}{\sqrt{(z - \ell)^2 + a^2}} \right) \cdot dz \quad (16.346)$$

odakle slijedi da je:

$$H_{\text{sr}} = \frac{N \cdot I}{\ell^2} \cdot \left(\sqrt{\ell^2 + a^2} - a \right) = \frac{N \cdot I}{\sqrt{\ell^2 + a^2} + a} \quad (16.347)$$

Aproksimacija ulačenog magnetskog toka zavojnice opisana je sljedećim izrazom:

$$\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot \mu_0 \cdot H_{\text{sr}} \cdot a^2 \cdot \pi \quad (16.348)$$

odakle slijedi da je:

$$\Psi = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot I \cdot a^2 \cdot \pi}{\sqrt{a^2 + \ell^2} + a} = L \cdot I \quad (16.349)$$

Slijedi da je vlastiti vanjski induktivitet zavojnice aproksimiran izrazom:

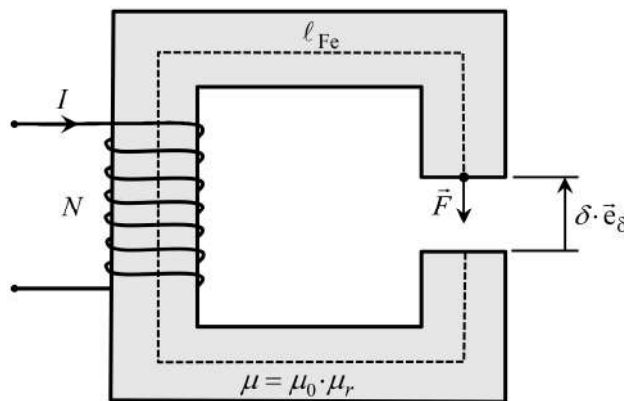
$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot a^2 \cdot \pi}{\sqrt{a^2 + \ell^2} + a} \quad (16.350)$$

Za vrlo dugu zavojnicu ($\ell \gg a$) vrijedi da je:

$$L \approx \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot a^2 \cdot \pi}{\ell} = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot S}{\ell} = \frac{N^2}{R_m} \quad (16.351)$$

gdje je S površina poprečnog presjeka zavojnice, dok je R_m magnetski otpor vrlo duge zavojnice.

Zadatak 16.16. Neka kroz zavojnicu elektromagneta teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Odredite izraz za silu kojom se privlače krajevi elektromagneta: a) iz magnetske energije pohranjene u magnetostatičkom polju, b) pomoću naprezanja (sile na granici dvaju sredstava). Pretpostavite da je ukupna srednja duljina magnetske silnice ℓ konstantna veličina. Zanemarite rasipanje magnetskih silnica u zračnom rasporu i rasipni magnetski tok. Neka je zadano: $N, I, \ell_{Fe}, \delta, \mu_r, S$.



Slika 16.78. Privlačna sila između polova elektromagneta

Rješenje:

Budući da su rasipanje magnetskih silnica u zračnom rasporu i rasipni magnetski tok zanemareni, vrijedi da je:

$$B_{Fe} = B_0 = B \quad ; \quad S_{Fe} = S_0 = S \quad (16.352)$$

gdje je:

B_{Fe} - magnetska indukcija u željezu,

B_0 - magnetska indukcija u zračnom rasporu,

S_{Fe} - površina plohe kroz koju prolazi magnetski tok u željezu,

S_0 - površina plohe kroz koju prolazi magnetski tok u zračnom rasporu.

Za magnetski krug prikazan na Slici 16.78, uz uvedena zanemarenja, vrijedi sljedeći izraz:

$$N \cdot I = H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + H_0 \cdot \delta = \frac{B}{\mu_0} \cdot \left(\frac{\ell_{Fe}}{\mu_r} + \delta \right) \quad (16.353)$$

gdje je:

ℓ_{Fe} - srednja duljina magnetske silnice u željezu,

δ - srednja duljina magnetske silnice u zračnom rasporu; širina zračnog raspora.

Iz izraza (16.353) slijedi da je magnetska indukcija u željezu kao i u zračnom rasporu opisana sljedećim izrazom:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\frac{\ell_{Fe}}{\mu_r} + \delta} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta} \quad (16.354)$$

a) Izračun sile iz pohranjene magnetske energije

Magnetska energija pohranjena u magnetostatičkom polju opisana je izrazom:

$$W_m = \frac{B \cdot H_{Fe} \cdot S \cdot \ell_{Fe}}{2} + \frac{B \cdot H_0 \cdot S \cdot \delta}{2} = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} \cdot (\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta) \quad (16.355)$$

Ako se izraz (16.354) uvrsti u izraz (16.355), dobije se sljedeći izraz za pohranjenu magnetsku energiju:

$$W_m = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot S}{2 \cdot (\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta)} \quad (16.356)$$

Izraz za magnetsku silu u neizoliranom sustavu, naznačenu na Slici 16.78, glasi:

$$\vec{F} = \frac{\partial W_m}{\partial \delta} \cdot \vec{e}_\delta \quad (16.357)$$

Prije deriviranja treba uvesti supstituciju:

$$\ell_{Fe} = \ell - \delta \quad (16.358)$$

gdje je ℓ ukupna srednja duljina magnetske silnice koja je, po uvedenoj pretpostavci, konstantna veličina.

Ako se supstitucija (16.358) uvrsti u izraz (16.356), dobije se alternativni izraz za pohranjenu magnetsku energiju:

$$W_m = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot S}{2 \cdot (\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta)} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot S}{2 \cdot (\ell - \delta + \mu_r \cdot \delta)} \quad (16.359)$$

koji je prikladan za deriviranje pohranjene magnetske energije po širini zračnog raspora δ .

Slijedi da je:

$$\vec{F} = \frac{\partial W_m}{\partial \delta} \cdot \vec{e}_\delta = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot S}{2 \cdot (\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta)^2} \cdot (\mu_r - 1) \cdot (-\vec{e}_\delta) \quad (16.360)$$

ili drukčije pisano:

$$\vec{F} = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot (-\vec{e}_\delta) = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H_0 \cdot S \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot (-\vec{e}_\delta) \quad (16.361)$$

Iz izraza (16.360) i (16.361) slijedi da se krajevi elektromagneta privlače, tj. težnja je da se smanji zračni raspor.

b) Izračun sile na granici dvaju sredstava

Tlak na granici dvaju sredstava opisan je izrazom (16.180), koji u ovom posebnom slučaju glasi:

$$t_n^m = \frac{|\mu_0 \cdot \mu_r - \mu_0|}{2} \cdot \left(\frac{B_n^2}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0} + H_t^2 \right) \quad (16.362)$$

gdje, u ovom slučaju, vrijedi da je:

$$B_n = B \quad ; \quad H_t = 0 \quad (16.363)$$

pa je tlak na granici željeza i zraka:

$$t_n^m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right) \quad (16.364)$$

Magnetska je sila na granici dvaju sredstava opisana izrazom:

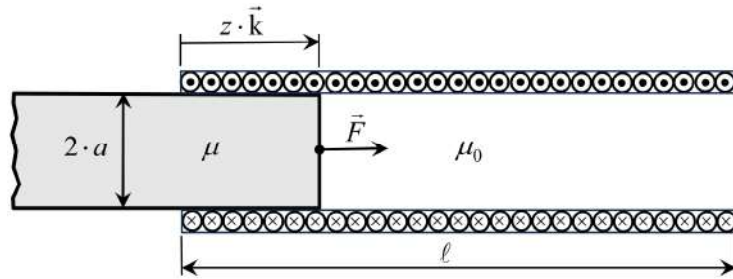
$$\vec{F} = t_n^m \cdot S \cdot (-\vec{e}_\delta) = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot (-\vec{e}_\delta) = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H_0 \cdot S \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot (-\vec{e}_\delta) \quad (16.365)$$

Ako magnetska permeabilnost željeza teži u beskonačnost, onda je magnetska sila opisana izrazom:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H_0 \cdot S \cdot (-\vec{e}_\delta) \quad (16.366)$$

dok su jakost magnetskog polja u željezu i magnetska energija pohranjena u željezu jednaki nuli.

Zadatak 16.17. U ravnu zavojnicu duljine $\ell = 0,25$ m, koja ima $N = 500$ zavoja i kroz koju teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 1$ A, djelomično je uvučena željezna jezgra. Uz zanemarenje rubnih efekata (unutar zavojnice magnetska indukcija homogena, a izvan jednaka nuli), odredite silu na jezgru za $z = 0,05$ m na dva načina: a) iz magnetske energije pohranjene u magnetostatičkom polju, b) pomoću naprezanja (sile na granici dvaju sredstava). Neka su željezna jezgra i zavojnica kružnog poprečnog presjeka te neka je polumjer željezne jezgre $a = 0,02$ m. Neka je relativna magnetska permeabilnost željeza $\mu_r = 600$.



Slika 16.79. Ravna zavojnica s djelomično uvučenim feromagnetikom

Rješenje:

Uz uvedena zanemarenja, vrijedi da je:

$$B_{Fe} = B_0 = B \quad ; \quad S_{Fe} = S_0 = S \quad (16.367)$$

$$N \cdot I = H_{Fe} \cdot z + H_0 \cdot (\ell - z) = \frac{B}{\mu_0} \cdot \left(\frac{z}{\mu_r} + \ell - z \right) \quad (16.368)$$

odakle slijedi da je magnetska indukcija opisana sljedećim izrazom:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{z + \mu_r \cdot (\ell - z)} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I}{\mu_r \cdot \ell - z \cdot (\mu_r - 1)} \quad (16.369)$$

a) Izračun sile iz pohranjene magnetske energije

Magnetska energija pohranjena u magnetostatičkom polju opisana je izrazom:

$$W_m = \frac{B \cdot H_{Fe} \cdot S \cdot z}{2} + \frac{B \cdot H_0 \cdot S \cdot (\ell - z)}{2} = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} \cdot [\mu_r \cdot \ell - z \cdot (\mu_r - 1)] \quad (16.370)$$

gdje je $S = a^2 \cdot \pi$ površina poprečnog presjeka željezne jezgre.

Ako se izraz (16.369) uvrsti u izraz (16.370), dobije se sljedeći izraz za pohranjenu magnetsku energiju:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot S}{\mu_r \cdot \ell - z \cdot (\mu_r - 1)} \quad (16.371)$$

Izraz za magnetsku silu u neizoliranom sustavu, naznačenu na Slici 16.79, glasi:

$$\vec{F} = \frac{\partial W_m}{\partial z} \cdot \vec{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot N^2 \cdot I^2 \cdot S}{[\mu_r \cdot \ell - z \cdot (\mu_r - 1)]^2} \cdot (\mu_r - 1) \cdot \vec{k} \quad (16.372)$$

ili drukčije pisano:

$$\vec{F} = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot \vec{k} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H_0 \cdot S \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot \vec{k} \quad (16.373)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je magnetska sila za $z = 0,05$ m:

$$\vec{F} \Big|_{z=0,05 \text{ m}} = 4,922474613 \cdot \vec{k} \text{ mN} \quad (16.374)$$

b) Izračun sile na granici dvaju sredstava

U općem slučaju, tlak na granici dvaju sredstava opisan je izrazom (16.180), koji u ovom slučaju glasi:

$$t_n^m = \frac{|\mu_0 \cdot \mu_r - \mu_0|}{2} \cdot \left(\frac{B_n^2}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0} + H_t^2 \right) \quad (16.375)$$

gdje, u ovom slučaju, vrijedi da je:

$$B_n = B \quad ; \quad H_t = 0 \quad (16.376)$$

pa je tlak na granici željeza i zraka:

$$t_n^m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right) \quad (16.377)$$

Magnetska je sila na granici dvaju sredstava opisana izrazom:

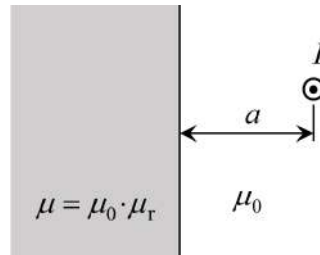
$$\vec{F} = t_n^m \cdot S \cdot \vec{k} = \frac{B^2 \cdot S}{2 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot \vec{k} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H_0 \cdot S \cdot \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \cdot \vec{k} \quad (16.378)$$

Ako magnetska permeabilnost željeza teži u beskonačnost, onda je magnetska sila opisana izrazom:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H_0 \cdot S \cdot \vec{k} \quad (16.379)$$

dok su jakost magnetskog polja u željezu i magnetska energija pohranjena u željezu jednaki nuli.

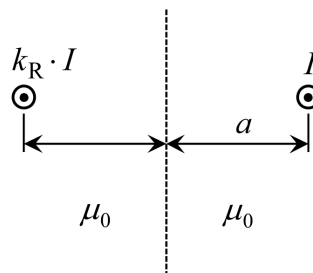
Zadatak 16.18. Beskonačno dugi pravocrtni vodič, koji se nalazi se u zraku, paralelan je graničnoj ravnini koja dijeli cjelokupni prostor na dva poluprostora različitih magnetskih permeabilnosti. Neka vodičem teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Odslikajte vodič na graničnoj ravnini i potom odredite izraz za silu koja djeluje na jedinicu duljine vodiča. Neka je zadano: $I = 1 \text{ A}$, $a = 1 \text{ m}$, $\mu_r = 500$.



Slika 16.80. Beskonačno dugi pravocrtni vodič paralelan graničnoj ravnini između zraka i feromagnetika

Rješenje:

Po metodi odslikavanja, ako se rješenje traži u zraku, beskonačno dugi tankožičani vodič u heterogenom sredstvu nadomještaju dva beskonačno duga tankožičana vodiča u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti jednake magnetskoj permeabilnosti zraka (Slika 16.81).



Slika 16.81. Stvarni i odslikani vodič

Prema izrazu (16.64), faktor refleksije opisan je izrazom:

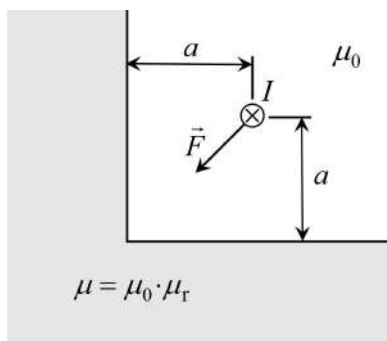
$$k_R = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r - \mu_0}{\mu_0 \cdot \mu_r + \mu_0} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \quad (16.380)$$

Magnetska sila po jedinici duljine između dva pravocrtna, beskonačno duga, međusobno paralelna tankožičana vodiča, koji se nalaze u neograničenom LIH sredstvu opisana je izrazom (16.166), koji u ovom slučaju glasi:

$$F = \mu_0 \cdot \frac{|k_R| \cdot I \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} = \mu_0 \cdot \frac{k_R \cdot I^2}{4 \cdot \pi \cdot a} = 99,6007984 \frac{\text{nN}}{\text{m}} \quad (16.381)$$

Između feromagnetika i beskonačno dugog vodiča djeluje privlačna sila jer vodič teži ulasku iz zraka u permeabilnije sredstvo. Ova sila je jednaka po iznosu sili na granici dvaju sredstava, ali je suprotnog smjera.

Zadatak 16.19. Neka su tri četvrtine cjelokupnog prostora ispunjene sredstvom kojemu je relativna magnetska permeabilnost $\mu_r = 9$. Neka je preostala četvrtina cjelokupnog prostora ispunjena zrakom. Neka se u zraku nalazi beskonačno dugi pravocrtni tankožičani vodič na udaljenosti $a = 0,1$ m od graničnih poluravnina. Neka tankožičanim vodičem teče vremenski konstantna električna struja jakosti I . Ako na vodič djeluje sila po jedinici duljine iznosa $F = 0,0049$ N/m, izračunajte jakost električne struje I .



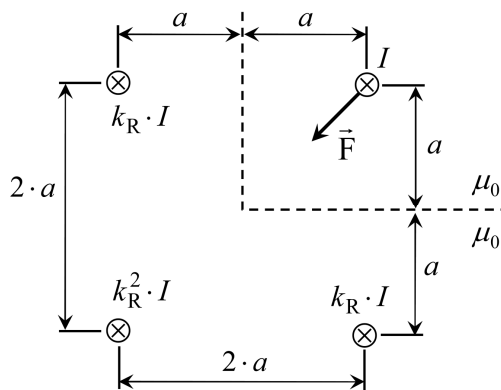
Slika 16.82. Beskonačno dugi vodič u heterogenom sredstvu

Rješenje:

Po metodi odslikavanja, ako se rješenje traži u zraku, beskonačno dugi tankožičani vodič u heterogenom sredstvu nadomještaju četiri beskonačno duga tankožičana vodiča u neograničenom LIH sredstvu magnetske permeabilnosti jednake magnetskoj permeabilnosti zraka (Slika 16.83).

Prema izrazu (16.64), faktor refleksije opisan je izrazom:

$$k_R = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r - \mu_0}{\mu_0 \cdot \mu_r + \mu_0} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} = 0,8 \quad (16.382)$$



Slika 16.83. Stvarni vodič i tri odslikana vodiča u homogenom neograničenom sredstvu

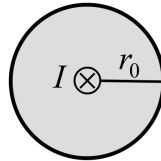
Budući da je faktor refleksije pozitivan, sva tri odslikana vodiča privlače stvarni vodič. Magnetska sila po jedinici duljine između dva pravocrtna, beskonačno duga, međusobno paralelna tankožičana vodiča, koji se nalaze u neograničenom LIH sredstvu opisana je izrazom (16.166). U ovom slučaju magnetska sila po jedinici duljine vodiča opisana je izrazom:

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot a)} \cdot \left(2 \cdot k_R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + k_R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \mu_0 \cdot k_R \cdot (2 + k_R)}{8 \cdot \pi \cdot a} \cdot I^2 \quad (16.383)$$

odakle slijedi da je:

$$I = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot a \cdot F}{\sqrt{2} \cdot \mu_0 \cdot k_R \cdot (2 + k_R)}} = 55,62006983 \text{ A} \quad (16.384)$$

Zadatak 16.20. Beskonačno dugim pravocrtnim bakrenim vodičem polumjera $r_0 = 1 \text{ cm}$ teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 50 \text{ A}$. Pomoću napreznja izračunajte silu po jedinici duljine kojom se privlače dvije uzdužne polovice vodiča. Zadatak riješite integracijom po plohi koja leži na razdjelnoj ravnini između dvije polovice vodiča.



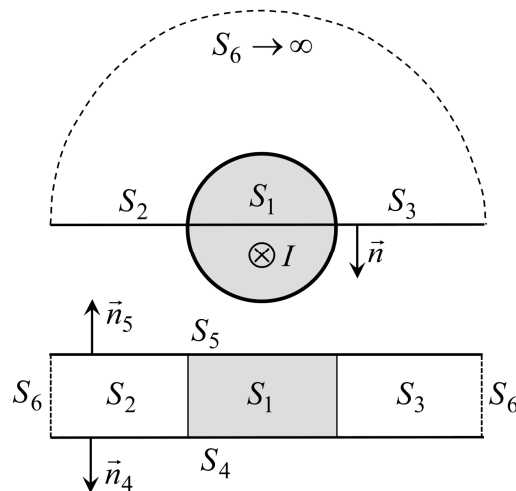
Slika 16.84. Beskonačno dugi pravocrtni bakreni vodič

Rješenje:

Privlačna magnetska sila između dviju uzdužnih polovice vodiča, po jedinici duljine vodiča, opisana je izrazom:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_m \cdot dS \quad (16.385)$$

gdje se zatvorena integracijska ploha S , unutar koje se nalazi jedan metar polovice vodiča, sastoji od ukupno šest dijelova (Slika 16.85).



Slika 16.85. Dijelovi zatvorene integracijske plohe S

Integracijske plohe S_4 i S_5 su bočne plohe (poluravnine) koje zatvaraju jedinicu duljine polovice vodiča. Integrali vektora magnetskog napreznja po tim plohama se poništavaju, tj. sile na njih su jednake po iznosu i suprotnog su smjera. Jakost magnetskog polja leži u plohama S_4 i S_5 pa je sila na njih suprotna od pripadne jedinične normale na plohu. Na plohi S_6 jakost magnetskog polja iščezava pa je magnetska sila na tu plohu jednaka nuli. Dakle, integracija vektora magnetskog napreznja po zatvorenoj plohi S svodi se na integraciju po plohama S_1 , S_2 i S_3 , koje leže u istoj ravnini pa stoga imaju zajedničku jediničnu normalu \vec{n} .

Na plohama S_1 , S_2 i S_3 vektor jakosti magnetskog polja opisan je izrazima:

$$\vec{H}_1 = \pm \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_0^2} \cdot \vec{n} \quad ; \quad \vec{H}_2 = -\frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{n} \quad ; \quad \vec{H}_3 = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{n} \quad (16.386)$$

gdje je r udaljenost točke promatranja od osi vodiča u cilindričnom koordinatnom sustavu.

U magnetostatičkom polju, vektor magnetskog napreznja u LIH sredstvu opisan je izrazom (16.175), koji na plohama S_1 , S_2 i S_3 poprima oblik:

$$\vec{t}_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \cdot H_1^2 \cdot \vec{n} \quad ; \quad \vec{t}_{m2} = \vec{t}_{m3} = \frac{\mu_0}{2} \cdot H_2^2 \cdot \vec{n} \quad (16.387)$$

Slijedi da je, u cilindričnom koordinatnom sustavu, magnetska sila na jedinicu duljine gornje polovice vodiča:

$$\vec{F} = \vec{n} \cdot 2 \cdot \int_0^{r_0} t_{m1} \cdot dr + \vec{n} \cdot 2 \cdot \int_{r_0}^{\infty} t_{m2} \cdot dr \quad (16.388)$$

pa, iz izraza (16.386) - (16.388), slijedi da je:

$$\vec{F} = \vec{n} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(\frac{1}{r_0^4} \cdot \int_0^{r_0} r^2 \cdot dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{3 \cdot \pi^2 \cdot r_0} \cdot \vec{n} \quad (16.389)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\vec{F} = 1,061032954 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{n} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (16.390)$$

Zadatak 16.21. Beskonačno dugim pravocrtnim bakrenim vodičem polumjera $r_0 = 1$ cm teče vremenski konstantna električna struja jakosti $I = 50$ A. Pomoću napreznja izračunajte silu po jedinici duljine kojom se privlače dvije uzdužne polovice vodiča. Zadatak riješite integracijom po plohi koja se jednim dijelom poklapa s plaštom vodiča. Beskonačno dugi pravocrtni bakreni vodič prikazan je na Slici 16.84.

Rješenje:

Privlačna magnetska sila između dviju uzdužnih polovica vodiča, po jedinici duljine vodiča, opisana je izrazom:

$$\vec{F} = \oint_S \vec{t}_m \cdot dS \quad (16.391)$$

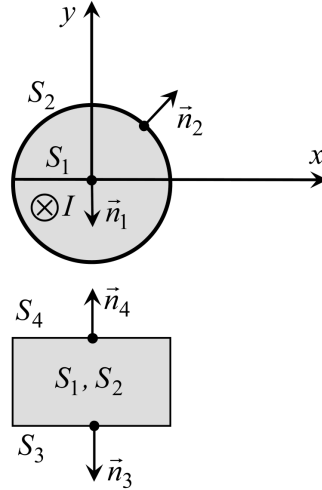
gdje se zatvorena integracijska ploha S , unutar koje se nalazi jedan metar polovice vodiča, sastoji od ukupno četiri dijela (Slika 16.86).

Integracijske plohe S_3 i S_4 su bočne plohe (polukrugovi) koje zatvaraju jedinicu duljine polovice vodiča. Integrali vektora magnetskog napreznja po tim plohama se poništavaju, tj. sile na njih su jednake po iznosu i suprotnog su smjera. Jakost magnetskog polja leži u plohama S_3 i S_4 pa je sila na njih suprotna od pripadne jedinične normale na plohu. Dakle, integracija vektora magnetskog napreznja po zatvorenoj plohi S svodi se na integraciju po plohama S_1 i S_2 .

Na plohama S_1 i S_2 vektor jakosti magnetskog polja opisan je izrazima:

$$\vec{H}_1 = -\frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_0^2} \cdot \vec{e}_\varphi \quad ; \quad \vec{H}_2 = -\frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_0} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (16.392)$$

gdje je r udaljenost točke promatranja od osi vodiča u cilindričnom koordinatnom sustavu.



Slika 16.86. Dijelovi zatvorene integracijske plohe S

U magnetostatičkom polju, vektor magnetskog naprezanja u LIH sredstvu opisan je izrazom (16.175), koji na plohamu S_1 i S_2 poprima oblik:

$$\vec{t}_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \cdot H_1^2 \cdot \vec{n}_1 = \frac{\mu_0}{2} \cdot H_1^2 \cdot (-\vec{j}) \quad (16.393)$$

$$\vec{t}_{m2} = -\frac{\mu_0}{2} \cdot H_2^2 \cdot \vec{n}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \cdot H_2^2 \cdot \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{2} \cdot H_2^2 \cdot (-\vec{e}_r) \quad (16.394)$$

Slijedi da je, u cilindričnom koordinatnom sustavu, magnetska sila na jedinici duljine gornje polovice vodiča:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-\vec{j}) \cdot 2 \cdot \int_0^{r_0} t_{m1} \cdot dr - t_{m2} \cdot r_0 \cdot \int_0^\pi \vec{e}_r \cdot d\varphi \quad (16.395)$$

Iz izraza (16.391) - (16.393), slijedi da je:

$$\vec{F}_1 = (-\vec{j}) \cdot \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot r_0^4} \cdot \int_0^{r_0} r^2 \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{12 \cdot \pi^2 \cdot r_0} \cdot (-\vec{j}) \quad (16.396)$$

Budući da magnetska sila \vec{F}_2 djeluje u smjeru osi y , dovoljno je integrirati samo y -komponentu vektora magnetskog naprezanja na plohi S_2 pa je:

$$\vec{F}_2 = -t_{m2} \cdot r_0 \cdot \int_0^\pi \vec{e}_r \cdot d\varphi = -\vec{j} \cdot t_{m2} \cdot r_0 \cdot \int_0^\pi (\vec{e}_r \cdot \vec{j}) \cdot d\varphi \quad (16.397)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{F}_2 = -\vec{j} \cdot t_{m2} \cdot r_0 \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cdot d\varphi = 2 \cdot t_{m2} \cdot r_0 \cdot (-\vec{j}) = \mu_0 \cdot r_0 \cdot H_2^2 \cdot (-\vec{j}) \quad (16.398)$$

Iz izraza (16.392) i (16.398), slijedi da je:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot r_0} \cdot (-\vec{j}) \quad (16.399)$$

pa je ukupna magnetska sila po jedinici duljine gornje polovice vodiča:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{3 \cdot \pi^2 \cdot r_0} \cdot (-\vec{j}) = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{3 \cdot \pi^2 \cdot r_0} \cdot \vec{n}_1 \quad (16.400)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\vec{F} = 1,061032954 \cdot 10^{-2} \cdot \vec{n}_1 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (16.401)$$

17. VREMENSKI PROMJENJIVO ELEKTROMAGNETSKO POLJE

Vremenski promjenjivo elektromagnetsko polje opisano je Maxwellovim diferencijalnim jednažbama, iz kojih se lako dobiju Maxwellove integralne jednažbe. Maxwellove diferencijalne i integralne jednažbe u vremenskom području detaljno su opisane u šestom poglavlju ovog udžbenika, dok su u sedmom poglavlju opisane Maxwellove diferencijalne i integralne jednažbe u fazorskom području. One su, radi cjelovitosti teksta, u ovom poglavlju ponovno navedene.

17.1. Maxwellove diferencijalne jednažbe u pokretnom sredstvu

U vremenskom području, Maxwellove diferencijalne jednažbe u pokretnom vodljivom sredstvu (pokretnom sustavu) opisane su izrazima (6.31) - (6.34), koji glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (17.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (17.2)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = g_{\text{st}} \quad (17.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.4)$$

gdje je:

\vec{H} - vektor jakosti magnetskog polja,

\vec{E} - vektor jakosti električnog polja,

\vec{D} - vektor električnog pomaka,

\vec{B} - vektor magnetske indukcije (vektor gustoće magnetskog toka),

\vec{J}_{uk} - vektor ukupne plošne gustoće električne struje,

\vec{J}_s - vektor plošne gustoće električne struje nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora,

\vec{J} - vektor plošne gustoće provodne električne struje,

g_{st} - volumna gustoća provodne i pomačne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno vodljivo sredstvo.

U vremenskom području, Maxwellove diferencijalne jednažbe u pokretnom savršenom dielektriku (pokretnom sustavu) opisane su izrazima (6.1) - (6.4), koji glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{uk}} = \vec{J}_s + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (17.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (17.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (17.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.8)$$

gdje je ρ_s volumna gustoća naboja nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora.

U vremenskom području, Maxwellove diferencijalne jednačbe u pokretnom savršenom dielektriku su poseban slučaj Maxwellovih diferencijalnih jednačbi u pokretnom vodljivom sredstvu. U savršenom dielektriku vrijedi da je:

$$\vec{J} = 0 \quad (17.9)$$

a prema izrazu (6.21) u savršenom dielektriku vrijedi da je:

$$g_{st} = \frac{d\rho_s}{dt} \quad (17.10)$$

gdje je u ovom posebnom slučaju g_{st} volumna gustoća pomačne električne struje.

Ako se pune derivacije po vremenu izraze pomoću parcijalnih derivacija po vremenu, u vremenskom području, Maxwellove diferencijalne jednačbe u pokretnom vodljivom sredstvu mogu se opisati izrazima (6.38) – (6.41), koji glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) \quad (17.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (17.12)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = g_{st} \quad (17.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.14)$$

gdje je \vec{v} vektor konstantne relativne brzine pokretnog sustava u odnosu na promatrača.

Ako se pune derivacije po vremenu izraze pomoću parcijalnih derivacija po vremenu, u vremenskom području, Maxwellove diferencijalne jednačbe u pokretnom savršenom dielektriku mogu se opisati izrazima (6.9) - (6.12), koji glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \rho_s \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) \quad (17.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (17.16)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (17.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.18)$$

U fazorskom području, iz izraza (17.11) - (17.14), lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednačbe u pokretnom vodljivom sredstvu, koje glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + j \cdot \omega \cdot \vec{D} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) \quad (17.19)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - j \cdot \omega \cdot \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (17.20)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \right) = - \nabla \cdot \vec{J}_s = \bar{g}_{st} \quad (17.21)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.22)$$

gdje je:

\vec{H} - fazor vektora jakosti magnetskog polja,

\vec{E} - fazor vektora jakosti električnog polja,

\vec{D} - fazor vektora električnog pomaka,

\vec{B} - fazor vektora magnetske indukcije (vektora gustoće magnetskog toka),

\vec{J}_s - fazor vektora plošne gustoće električne struje nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora,

\vec{J} - fazor vektora plošne gustoće provodne električne struje,

\vec{g}_{st} - fazor volumne gustoće provodne i pomačne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno sredstvo,

ω - kružna frekvencija,

\vec{v} - vektor konstantne relativne brzine pokretnog sustava u odnosu na promatrača,

j - imaginarna jedinica.

U fazorskom području, iz izraza (17.15) - (17.18), lako se dobiju Maxwelllove diferencijalne jednadžbe u pokretnom savršenom dielektriku, koje glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{\rho}_s \cdot \vec{v} + j \cdot \omega \cdot \vec{D} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{D}) \quad (17.23)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (17.24)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \vec{\rho}_s \quad (17.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.26)$$

gdje je $\vec{\rho}_s$ fazor volumne gustoće naboja nezavisnog (vanjskog; narinutog) izvora.

17.2. Maxwelllove diferencijalne jednadžbe u mirujućem sredstvu

Maxwellove diferencijalne jednadžbe u mirujućem sredstvu lako se dobiju iz Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi u pokretnom sredstvu tako da se pune derivacije po vremenu zamijene s parcijalnim derivacijama po vremenu ili pak tako da se uvaži činjenica da je u mirujućem sustavu $\vec{v} = 0$.

Iz izraza (17.1) - (17.4), lako se dobije da su u vremenskom području Maxwelllove diferencijalne jednadžbe u mirujućem vodljivom sredstvu opisane izrazima:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{uk} = \vec{J}_s + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (17.27)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17.28)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \vec{g}_{st} \quad (17.29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.30)$$

Iz izraza (17.5) - (17.8), lako se dobije da su u vremenskom području Maxwelllove diferencijalne jednadžbe u mirujućem savršenom dielektriku opisane izrazima:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (17.31)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \quad (17.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.34)$$

U fazorskom području, iz izraza (17.27) - (17.30) ili pak iz izraza (17.19) - (17.22), lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem vodljivom sredstvu, koje glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \quad (17.35)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (17.36)$$

$$\nabla \cdot (\vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D}) = \bar{g}_{st} \quad (17.37)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.38)$$

U fazorskom području, iz izraza (17.31) - (17.34) ili pak iz izraza (17.23) - (17.26), lako se dobiju Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom LIH dielektriku, koje glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \quad (17.39)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (17.40)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \bar{\rho}_s \quad (17.41)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (17.42)$$

17.3. Maxwellove integralne jednačbe u pokretnom sredstvu

U vremenskom području, Maxwellove integralne jednačbe u pokretnom vodljivom sredstvu (pokretnom sustavu) opisane su izrazima (6.90) - (6.93), koji glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \left(\vec{J}_s + \vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{r} \quad (17.43)$$

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (17.44)$$

$$\oint_{\partial V} \left(\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_V \bar{g}_{st} \cdot dV \quad (17.45)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.46)$$

gdje je e elektromotorna sila (EMS) inducirana u zatvorenoj konturi K , dok je Φ magnetski tok koji prolazi kroz plohu S . Ploha S i zatvorena krivulja K opisane su Slikom 1.4, dok su volumen V i zatvorena ploha ∂V opisani Slikom 1.3.

U vremenskom području, Maxwellove integralne jednačbe u pokretnom savršenom dielektriku (pokretnom sustavu) opisane su izrazima (6.82) - (6.85), koji glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J}_s + \rho_s \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell} \quad (17.47)$$

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (17.48)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_s \cdot dV = q_s \quad (17.49)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.50)$$

gdje je q_s količina naboja nezavisnih izvora unutar volumena V (Slika 1.3).

U fazorskom području, iz izraza (17.43) - (7.46), lako se dobiju Maxwellove integralne jednačbe u pokretnom vodljivom sredstvu, koje glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J}_s + \vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell} \quad (17.51)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (17.52)$$

$$\oint_{\partial V} \left(\vec{J} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{D}) + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \right) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV \quad (17.53)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.54)$$

U fazorskom području, iz izraza (17.47) - (17.50), lako se dobiju Maxwellove integralne jednačbe u pokretnom savršenom dielektriku, koje glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \left(\vec{J}_s + \bar{\rho}_s \cdot \vec{v} + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \right) \cdot d\vec{S} - \oint_K (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{\ell} \quad (17.55)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (17.56)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \bar{\rho}_s \cdot dV = \bar{Q}_s \quad (17.57)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.58)$$

gdje je \bar{Q}_s fazor naboja nezavisnog izvora unutar volumena V (Slika 1.3).

17.4. Maxwellove integralne jednadžbe u mirujućem sredstvu

Maxwellove integralne jednadžbe u mirujućem sredstvu lako se dobiju iz Maxwellovih integralnih jednadžbi u pokretnom sredstvu tako da se pune derivacije po vremenu zamijene s parcijalnim derivacijama po vremenu ili pak tako da se uvaži činjenica da je u mirujućem sustavu $\vec{v} = 0$.

Iz izraza (17.43) - (17.46), lako se dobije da su u vremenskom području Maxwellove integralne jednadžbe u mirujućem vodljivom sredstvu opisane izrazima:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_s + \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = i_s + i_{pr} + i_{pom} \quad (17.59)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (17.60)$$

$$\oint_{\partial V} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV = i_{st} \quad (17.61)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.62)$$

gdje je:

i_s - jakost električne struje nezavisnog izvora koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4); opisana je izrazom (6.76),

i_{pr} - jakost provodne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

i_{pom} - jakost pomaćne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4); opisana je izrazom (6.77),

i_{st} - jakost provodne i pomaćne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno sredstvo.

Iz izraza (17.47) - (17.50), lako se dobije da su u vremenskom području Maxwellove integralne jednadžbe u mirujućem savršenom dielektriku opisane izrazom:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = i_s + i_{pom} \quad (17.63)$$

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (17.64)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_s \cdot dV = q_s \quad (17.65)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.66)$$

U fazorskom području, iz izraza (17.59) - (17.62) ili pak iz izraza (17.51) - (17.54), lako se dobiju Maxwellove integralne jednadžbe u mirujućem vodljivom sredstvu, koje glase:

$$\oint_K \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{l} = \int_S \underline{\vec{J}}_s \cdot d\vec{S} + \int_S \underline{\vec{J}} \cdot d\vec{S} + j \cdot \omega \cdot \int_S \underline{\vec{D}} \cdot d\vec{S} = \bar{I}_s + \bar{I}_{pr} + \bar{I}_{pom} \quad (17.67)$$

$$\oint_K \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{l} = - j \cdot \omega \cdot \int_S \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{S} = - j \cdot \omega \cdot \bar{\Phi} \quad (17.68)$$

$$\oint_{\partial V} (\vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{g}_{st} \cdot dV = \bar{I}_{st} \quad (17.69)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.70)$$

gdje je:

\bar{I}_s - fazor električne struje nezavisnog izvora koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

\bar{I}_{pr} - fazor provodne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

\bar{I}_{pom} - fazor pomačne električne struje koja prolazi kroz plohu S (Slika 1.4),

\bar{I}_{st} - fazor provodne i pomačne električne struje koju nezavisni izvor ispušta u okolno sredstvo.

U fazorskom području, iz izraza (17.63) - (17.66) ili pak iz izraza (17.55) - (17.58), lako se dobiju Maxwelllove integralne jednačbe u mirujućem savršenom dielektriku, koje glase:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_s \cdot d\vec{S} + j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \bar{I}_s + \bar{I}_{pom} \quad (17.71)$$

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j \cdot \omega \cdot \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -j \cdot \omega \cdot \bar{\Phi} \quad (17.72)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \bar{\rho}_s \cdot dV = \bar{Q}_s \quad (17.73)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (17.74)$$

17.5. Sastavnice jakosti električnog polja i napon između dviju točaka

U pokretnom koordinatnom sustavu koji se giba relativnom brzinom \vec{v} u odnosu na magnetsko polje, (ukupna) jakost električnog polja može se opisati izrazom:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (17.75)$$

dok je magnetska indukcija opisana izrazom:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (17.76)$$

gdje je φ skalarni električni potencijal, a \vec{A} vektorski magnetski potencijal.

Ukupna jakost električnog polja može se izraziti kao zbroj statičke i inducirane jakosti električnog polja:

$$\vec{E} = \vec{E}_{stat} + \vec{E}_{ind} \quad (17.77)$$

Dakle, vremenski promjenjivo električno polje ima dvije sastavnice:

- *statičko električno polje* koje je bezvrtložno (konzervativno), a stvaraju ga naboji u savršenom dielektriku i vremenski konstantne električne struje u vodljivom sredstvu,
- *inducirano električno polje* koje je vrtložno i uzrokuje ga vremenski promjenjivo magnetsko polje.

Statičko električno polje stvaraju naboji u mirovanju ili jednolikom gibanju. Elektrostatičko polje stvaraju naboji u mirovanju, a stacionarno strujno polje naboji u jednolikom gibanju (vremenski konstantne električne struje).

Vremenski konstantne električne struje stvaraju i magnetostatičko polje. Vremenski promjenjive električne struje (naboji u nejednolikom gibanju) stvaraju vremenski promjenjivo električno polje i vremenski promjenjivo magnetsko polje, odnosno vremenski promjenjivo elektromagnetsko polje.

Statička jakost električnog polja opisana je izrazom:

$$\vec{E}_{\text{stat}} = -\nabla\varphi \quad (17.78)$$

dok je u pokretnom koordinatnom sustavu inducirana jakost električnog polja opisana izrazom:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}_{\text{ind-tr}} + \vec{E}_{\text{ind-kr}} \quad (17.79)$$

gdje je:

$$\vec{E}_{\text{ind-tr}} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (17.80)$$

inducirana jakost električnog polja uslijed transformacije, odnosno vremenske promjene vektorskog magnetskog potencijala pa time i magnetske indukcije, dok je:

$$\vec{E}_{\text{ind-kr}} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (17.81)$$

inducirana jakost električnog polja uslijed relativnog kretanja magnetskog polja u odnosu na koordinatni sustav.

U slučaju elektrostatickog polja i stacionarnog strujnog polja, inducirana jakost električnog polja jednaka je nuli pa je:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{stat}} = -\nabla\varphi \quad (17.82)$$

odakle slijedi da su elektrostaticko polje i stacionarno strujno polje konzervativna polja jer je napon između točaka A i B opisan izrazom:

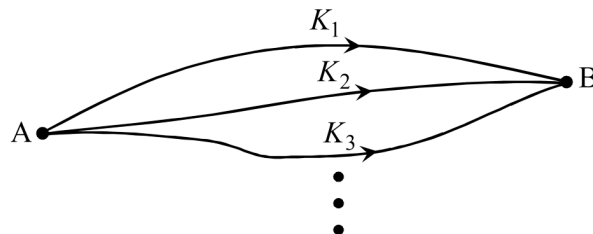
$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{\ell} \quad (17.83)$$

što znači da je napon između dvije točke jednak razlici skalarnih električnih potencijala tih točaka, odnosno ne ovisi o putu integracije (integracijskoj krivulji).

U vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju napon između dviju točaka jednak je krivuljnom integralu ukupne jakosti električnog polja:

$$u_{AB} = u_{AB}^{K_i} = \int_{K_i} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{K_i} \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{\ell} + \int_{K_i} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = \varphi_A - \varphi_B + e_{AB} \quad (17.84)$$

gdje je K_i razmatrana proizvoljna i -ta integracijska krivulja (Slika 17.1).



Slika 17.1. Proizvoljno odabrane integracijske krivulje između točaka A i B

U vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju napon i inducirana EMS između dviju točaka ovisi o putu integracije, dok je razlika skalarnih električnih potencijala neovisna o putu integracije:

$$\int_{K_i} \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{\ell} = \varphi_A - \varphi_B ; \quad \forall K_i \quad (17.85)$$

Dakle, o putu integracije ovisi i *inducirana EMS*:

$$e_{AB} = e_{AB}^{K_i} = \int_{K_i} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = \int_{K_i} \vec{E}_{\text{ind-tr}} \cdot d\vec{\ell} + \int_{K_i} \vec{E}_{\text{ind-kr}} \cdot d\vec{\ell} = e_{AB-\text{tr}} + e_{AB-\text{kr}} \quad (17.86)$$

Inducirana EMS transformacije opisana je izrazom:

$$e_{AB-\text{tr}} = \int_{K_i} \vec{E}_{\text{ind-tr}} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{K_i} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \quad (17.87)$$

dok je EMS inducirana uslijed kretanja opisana izrazom:

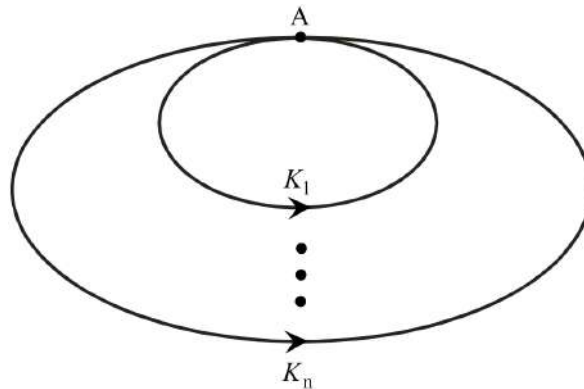
$$e_{AB-\text{kr}} = \int_{K_i} \vec{E}_{\text{ind-kr}} \cdot d\vec{\ell} = \int_{K_i} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (17.88)$$

Dakle, vrijedi da je:

$$u_{AB}^{K_i} \neq e_{AB}^{K_i} \neq \varphi_A - \varphi_B \quad (17.89)$$

Za zatvorenu konturu (integracijsku krivulju) koja se nalazi u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju (Slika 17.2) vrijedi da je:

$$u = u_{AA} = \oint_{K_i} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{K_i} \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{K_i} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\varphi_A - \varphi_A}_{=0} + e = \oint_{K_i} \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} \quad (17.90)$$



Slika 17.2. Proizvoljno odabrane zatvorene integracijske krivulje

Prema izrazu (17.48), za zatvorenu konturu K vrijedi Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$u = e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_K \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt} ; \quad \Psi = \Phi \quad (17.91)$$

gdje je Φ magnetski tok koji prolazi kroz zatvorenu konturu K , uz uvažavanje pravila desne ruke, dok je Ψ ulančeni magnetski tok.

Nadalje, prema izrazu (17.48), za zatvorenu konturu u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju vrijedi sljedeći izraz:

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_K \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = - \underbrace{\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}_{e_{\text{tr}}} + \underbrace{\oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}_{e_{\text{kr}}} \quad (17.92)$$

odakle, sukladno izrazu (17.79), slijedi da je:

$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_K \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = - \oint_K \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \oint_K (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (17.93)$$

U općem slučaju, u zatvorenoj konturi koja se nalazi u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju inducira se EMS transformacije i EMS kretanja i/ili deformacije. U slučaju zatvorene konture može se govoriti i o *induciranom naponu* jer je napon duž zatvorene konture jednak induciranoj EMS. To je u skladu s drugim Kirchhoffovim zakonom.

Ako se u vremenski promjenjivim strujnim krugovima zanemari Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, onda su naponi jednaki razlici potencijala. Izabere se referentni čvor u kojem je potencijal jednak nuli, a potencijali čvorova (naponi čvorova u odnosu na referentni čvor) ne ovise o putu kojim se dođe iz jednog čvora u drugi.

Napon koji mjeri voltmetar između dviju točaka izmjenične električne mreže ovisi i o načinu priključka voltmetra, tj. napon ovisi o EMS induciranoj u konturi koju zatvaraju voltmetar sa svojim priključnicama i električna mreža.

17.6. Lorenzovi potencijali u mirujućem LIH sredstvu

Vektorski magnetski potencijal \vec{A} i skalarni električni potencijal φ u mirujućem LIH sredstvu definirani su izrazima:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (17.94)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (17.95)$$

Kao veza između elektromagnetskih potencijala u vodljivom LIH sredstvu najčešće se koristi Lorenzov baždarski uvjet:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi = 0 \quad (17.96)$$

koji u slučaju savršenog dielektrika poprima novi oblik:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (17.97)$$

Ako elektromagnetske potencijale povezuje Lorenzov baždarski uvjet, oni se nazivaju Lorenzovim potencijalima.

Prva i treća Maxwelllova diferencijalna jednačba u mirujućem savršenom LIH dielektriku opisane su izrazima (9.10) i (9.11), koji glase:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{J}_s + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (17.98)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.99)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti i iz izraza (17.31) i (17.33) ako se u njih uvrste jednačbe građe (3.11).

Ako se izrazi (17.94) i (17.95) uvrste u Maxwelllove diferencijalne jednačbe (17.98) i (17.99) koje vrijede za mirujući savršeni LIH dielektrik, dobiju se izrazi (9.15) i (9.16), koji glase:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.100)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.101)$$

Na temelju izraza (17.100) lako je zaključiti zašto se u mirujućem savršenom LIH dielektriku kao veza između elektromagnetskih potencijala najčešće koristi baš Lorenzov baždarski uvjet (17.97). Osim Lorenzovog baždarskog uvjeta, ponekad se kosistiti i Coulombov baždarski uvjet:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (17.102)$$

Ako se Lorenzov baždarski uvjet (17.97) uvrsti u diferencijalne jednadžbe (17.100) i (17.101), dobije se sljedeći sustav nehomogenih neprigušenih valnih jednadžbi Lorenzovih potencijala u mirujućem savršenom LIH dielektriku:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.103)$$

$$\Delta \varphi - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.104)$$

gdje su \vec{J}_s i ρ_s gustoće nezavisnih izvora elektromagnetskog polja, koje zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta (6.30).

Prema izrazima (6.50) i (6.52), prva i treća Maxwellova diferencijalna jednadžba u mirujućem vodljivom LIH sredstvu opisane su izrazima:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{J}_s + \mu \cdot \kappa \cdot \vec{E} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (17.105)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \vec{E}) = g_{st} \quad (17.106)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti i iz izraza (17.27) i (17.29) ako se u njih uvrste jednadžbe građe (3.11).

Ako se izrazi (17.94) i (17.95) uvrste u Maxwellove diferencijalne jednadžbe (17.105) i (17.106) koje vrijede za mirujuće vodljivo LIH sredstvo, dobiju se izrazi (6.27) i (6.28), koji glase:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi \right) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.107)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) \right) = -g_{st} \quad (17.108)$$

Ako se Lorenzov baždarski uvjet (17.96) uvrsti u diferencijalne jednadžbe (17.107) i (17.108), dobije se sljedeći sustav nehomogenih prigušenih diferencijalnih jednadžbi potencijala u mirujućem vodljivom LIH sredstvu:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.109)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta \varphi - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -g_{st} \quad (17.110)$$

koje u mirujućem vodljivom LIH sredstvu *bez izvora* postaju homogene prigušene valne jednačbe Lorenzovih potencijala:

$$\Delta \bar{A} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \quad (17.111)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = 0 \quad (17.112)$$

U fazorskom području, nehomogene neprigušene valne jednačbe Lorenzovih potencijala u mirujućem savršenom LIH dielektriku (17.103) i (17.104) postaju Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe (9.20) i (9.21), koje glase:

$$\Delta \bar{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_s \quad (17.113)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (17.114)$$

gdje je:

$$\bar{\gamma}^2 = -k^2 = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \quad ; \quad k = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot k \quad (17.115)$$

Realna konstanta k jest *valni broj*, a kompleksna konstanta $\bar{\gamma}$ je *valna konstanta*.

U fazorskom području, nehomogene prigušene diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala u mirujućem vodljivom LIH sredstvu (17.109) i (17.110) postaju Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe (9.36) i (9.37), koje glase:

$$\Delta \bar{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_s \quad (17.116)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (17.117)$$

gdje je:

$$\bar{\gamma}^2 = -\bar{k}^2 = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot \bar{k} \quad (17.118)$$

Iz izraza (17.115) i izraza (17.116) slijedi da je u slučaju savršenog dielektrika valni broj realna konstanta, dok je u slučaju vodljivog sredstva valni broj kompleksna konstanta.

Valna se konstanta sredstva može izraziti na sljedeći način:

$$\bar{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta \quad (17.119)$$

gdje je α prigušna konstanta, dok je β fazna konstanta.

Lako se može pokazati da su konstante vodljivog LIH sredstva:

$$\alpha = \frac{\kappa}{N} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2}} \quad ; \quad \beta = N \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2}} \quad (17.120)$$

gdje je:

$$N = \sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}} \quad (17.121)$$

dok su konstante savršenog LIH dielektrika ($\kappa = 0$) opisane izrazima:

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = k = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \quad (17.122)$$

Dakle, valni broj savršenog LIH dielektrika jednak je faznoj konstanti savršenog LIH dielektrika.

Važno je još jednom istaknuti da su jednadžbe koje vrijede za savršeni LIH dielektrik poseban slučaj jednadžbi koje vrijede za vodljivo LIH sredstvo. Sukladno tome, Helmholtzova diferencijalna jednadžba (17.114) koja vrijedi za savršeni LIH dielektrik jest poseban slučaj Helmholtzove diferencijalne jednadžbe (17.117) koja vrijedi za vodljivo LIH sredstvo, uz supstitucije:

$$\kappa = 0 \quad ; \quad \bar{g}_{st} = j \cdot \omega \cdot \bar{\rho}_s \quad (17.123)$$

što slijedi iz izraza (6.30).

17.7. Darwinovo elektromagnetsko polje u savršenom dielektriku

Hibridno ili Darwinovo elektromagnetsko polje u mirujućem savršenom LIH dielektriku dobije se iz potpunog sustava Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi, uz djelomično zanemarenje pomaćnih električnih struja:

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{E}_{ind}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (17.124)$$

pa, uz uvedeno zanemarenje, Maxwellove diferencijalne jednadžbe u savršenom LIH dielektriku glase:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_s + \varepsilon \cdot \frac{\partial \bar{E}_{stat}}{\partial t} \quad (17.125)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (17.126)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.127)$$

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (17.128)$$

Nepriugušene valne jednadžbe Lorenzovih potencijala u mirujućem savršenom LIH dielektriku (17.103) i (17.104), uz uvedeno zanemarenje, glase:

$$\Delta \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_s \quad (17.129)$$

$$\Delta \varphi - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.130)$$

što znači da je vektorski magnetski potencijal opisan Poissonovom diferencijalnom jednadžbom, dok je skalarni električni potencijal opisan nepriugušenom valnom jednadžbom.

Budući da oba Lorenzova potencijala nisu opisana Poissonovom diferencijalnom jednadžbom, Darwinova aproksimacija elektromagnetskog polja u mirujućem savršenom LIH dielektriku nije kvazistatička. Nju nema smisla koristiti u slučaju mirujućeg vodljivog LIH sredstva jer nijedan potencijal nije opisan Poissonovom diferencijalnom jednadžbom.

U fazorskom području, nehomogene diferencijalne jednadžbe Lorenzovih potencijala u mirujućem savršenom LIH dielektriku (17.129) i (17.130) poprimaju sljedeći oblik:

$$\Delta \bar{A} = -\mu \cdot \bar{J}_s \quad (17.131)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (17.132)$$

gdje je valna konstanta $\bar{\gamma}$ opisana izrazima (17.119) i (17.122).

17.8. Magnetodinamičko elektromagnetsko polje u vodljivom sredstvu

Magnetodinamičko elektromagnetsko polje može se dobiti iz potpunog sustava Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi u *mirujućem vodljivom sredstvu* uz potpuno zanemarenje pomačnih električnih struja:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (17.133)$$

što je uobičajena aproksimacija elektromagnetskog polja u dobrim vodičima jer je:

$$J \gg \frac{\partial D}{\partial t} \quad (17.134)$$

odnosno plošna gustoća pomačne električne struje zanemariva je u odnosu na plošnu gustoću provodne električne struje.

Za sinusoidalno elektromagnetsko polje kružne frekvencije ω , uvjet (17.134) glasi:

$$\kappa \gg \omega \cdot \varepsilon \quad (17.135)$$

Uz zanemarenje pomačnih električnih struja, Maxwellove diferencijalne jednadžbe u mirujućem vodljivom LIH sredstvu opisane su izrazima (6.68) - (6.71), koji glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} \quad (17.136)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (17.137)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{g_{st}}{\kappa} \quad (17.138)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.139)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti i iz izraza (17.27) - (17.30) ako se u njih uvrsti uvjet (17.133) i jednadžbe građe (3.11).

Uz uvedeno zanemarenje, odnosno za $\varepsilon = 0$, diferencijalne jednadžbe Lorenzovih potencijala (17.109) i (17.110) poprimaju novi oblik:

$$\Delta \vec{A} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.140)$$

$$\Delta \varphi - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{g_{st}}{\kappa} \quad (17.141)$$

dok, prema izrazu (17.96), Lorenzov baždarski uvjet, uz zanemarenje pomačnih električnih struja, glasi:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi = 0 \quad (17.142)$$

Diferencijalne jednadžbe (17.140) i (17.141) su nehomogene difuzijske jednadžbe. Elektromagnetsko polje u neograničenom prostoru, opisano ovim jednadžbama, nije kvazistatičko. U dobrim vodičima, ako je ispunjen uvjet (17.133), rješenja difuzijskih jednadžbi (17.140) i (17.141) odlično numerički aproksimiraju rješenja diferencijalnih jednadžbi Lorenzovih potencijala (17.109) i (17.110). Stoga je ovakvo elektromagnetsko polje prikladno zvati *magnetodinamičkim elektromagnetskim poljem* [14]. Ovakva aproksimacija elektromagnetskog polja u vremenskom području je uobičajena i opravdana u slučaju dobrih LIH vodiča jer se diferencijalne jednadžbe Lorenzovih potencijala (17.109) i (17.110) značajno pojednostavne.

U fazorskom području, nehomogene difuzijske diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala u mirujućem vodljivom LIH sredstvu (17.140) i (17.141) postaju Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe (9.39) i (9.40), koje glase:

$$\Delta \vec{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.143)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (17.144)$$

gdje je:

$$\bar{\gamma}^2 = -\bar{k}^2 = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \kappa \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot \bar{k} \quad (17.145)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta = (1 + j) \cdot \alpha \quad ; \quad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}{2}} \quad (17.146)$$

što se može dobiti i iz izraza (17.119) - (17.121) ako se u njih uvrsti $\varepsilon = 0$.

Ako je elektromagnetsko polje u dobrim LIH vodičima sinusoidalno, onda je i dinamičko sinusoidalno elektromagnetsko polje i magnetodinamičko sinusoidalno elektromagnetsko polje opisano Helmholtzovim nehomogenim diferencijalnim jednačbama Lorenzovih potencijala. Stoga u slučaju sinusoidalnog elektromagnetskog polja u dobrim LIH vodičima zanemarenje pomaćnih električnih struja nije od velike koristi iako se njihovim zanemarenjem ne čini zamjetna numerička greška. Međutim, to zanemarenje itekako ima smisla u vremenskom području.

17.9. Kvizistatičko elektromagnetsko polje

Neka su kvazistatički ili kvazistacionarni elektromagnetski problemi dinamički problemi koji se mogu rješavati kao statički, a da se pritom ne čini velika numerička greška. Neka su kod njih u *neograničenom* LIH sredstvu potencijali opisani Poissonovim diferencijalnim jednačbama:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.147)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad \text{ili} \quad \Delta \varphi = -\frac{g_{st}}{\kappa} \quad (17.148)$$

Ove Poissonove diferencijalne jednačbe formalno imaju isti oblik kao i u slučaju statičkih polja. Međutim, potencijali, plošna gustoća električne struje, volumna gustoća električnog naboja ρ_s i volumna gustoća električne struje nezavisnog izvora g_{st} ovise o vremenu.

Partikularna rješenja Poissonovih diferencijalnih jednačbi kvazistatičkog elektromagnetskog polja su:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot dV}{r} \quad (17.149)$$

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\rho_s \cdot dV}{r} \quad \text{ili} \quad \varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int_V \frac{g_{st} \cdot dV}{r} \quad (17.150)$$

Vrijedi da je:

$$g_{st} = -\nabla^s \cdot \vec{J}_s \quad (17.151)$$

gdje izraz:

$$\nabla^s = \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y_s} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z_s} \cdot \vec{k} \quad (17.152)$$

opisuje Hamiltonov diferencijalni vektorski operator po koordinatama točke u kojoj se nalazi izvor, a koordinate točke izvora u pravokutnom koordinatnom sustavu su (x_s, y_s, z_s) .

Logično je da i partikularna rješenja Poissonovih diferencijalnih jednadžbi formalno imaju isti oblik kao i u slučaju statičkih polja. To znači da se, uz uvedena zanemarenja, promjene polja pojavljuju istog trenutka u svim točkama prostora.

Za sinusoidalno elektromagnetsko polje kružne frekvencije ω , u ograničenom LIH području, elektromagnetsko polje se može razmatrati kao kvazistatičko (sporo promjenjivo) elektromagnetsko polje ako je ispunjen uvjet:

$$\beta \cdot R_{\max} \ll 1 \quad (17.153)$$

gdje je β fazna konstanta sredstva, dok je R_{\max} najveća udaljenost između dviju točaka u području proračuna.

Za sinusoidalno elektromagnetsko polje kružne frekvencije ω u savršenom LIH dielektriku uvjet kvazistatičnosti glasi:

$$R_{\max} \ll \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (17.154)$$

gdje je β fazna konstanta savršenog LIH dielektrika, koja je opisana izrazom (17.122).

Za sinusoidalno elektromagnetsko polje kružne frekvencije ω u vodljivom LIH sredstvu uvjet kvazistatičnosti glasi:

$$R_{\max} \ll \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}}} \quad (17.155)$$

gdje je β fazna konstanta vodljivog LIH sredstva, koja je opisana izrazima (17.120) i (17.121).

U dobrim vodičima mogu se zanemariti pomaćne električne struje, odnosno može se uzeti da je $\varepsilon = 0$, pa za sinusoidalno elektromagnetsko polje kružne frekvencije ω u dobrom LIH vodiču uvjet kvazistatičnosti glasi:

$$R_{\max} \ll \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}} \quad (17.156)$$

gdje je β fazna konstanta dobrog LIH vodiča, koja je opisana izrazima (17.146).

Za sinusoidalno elektromagnetsko polje frekvencije 50 Hz, u ograničenom području, elektromagnetsko polje se može razmatrati kao kvazistatičko elektromagnetsko polje ako je najveća udaljenost između dviju točaka u području proračuna R_{\max} :

- za zrak: $R_{\max} \ll 954,3$ km (obično se kao granica uzima 100 km),
- za morsku vodu ($\mu_r = 1, \varepsilon_r = 80, \kappa = 5$ S/m): $R_{\max} \ll 31,83$ m,
- za bakar ($\mu_r = 1, \varepsilon_r = 1, \kappa = 59,6$ MS/m): $R_{\max} \ll 9,22$ mm,
- čelik ($\mu_r = 100, \varepsilon_r = 1, \kappa = 6,99$ MS/m): $R_{\max} \ll 2,69$ mm.

17.10. Magnetokvazistatičko elektromagnetsko polje u savršenom dielektriku

Magnetokvazistatičko elektromagnetsko polje može se dobiti iz potpunog sustava Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi u mirujućem savršenom dielektriku uz potpuno zanemarenje pomaćnih električnih struja:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (17.157)$$

Uz zanemarenje pomačnih električnih struja, Maxwellove diferencijalne jednačbe u mirujućem savršenom LIH dielektriku glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (17.158)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (17.159)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.160)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.161)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti iz izraza (17.31) - (17.34) ako se u njih uvrsti uvjet (17.157) i jednačbe građe (3.11).

Uvedeno zanemarenje pomačnih električnih struja ima za posljedicu to da u diferencijalnu jednačbu potencijala u savršenom LIH dielektriku (17.100) treba uvrstiti $\varepsilon = 0$, pa diferencijalne jednačbe potencijala (17.100) i (17.101) poprimaju oblik:

$$\Delta \vec{A} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.162)$$

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.163)$$

što znači da se Lorenzov baždarski uvjet (17.97) svodi na Coulombov baždarski uvjet (17.102). Nakon uvrštenja Coulombovog baždarskog uvjeta u diferencijalne jednačbe potencijala (17.162) i (17.163), dobiju se dvije Poissonove diferencijalne jednačbe:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.164)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.165)$$

koje u fazorskom zapisu glase:

$$\Delta \underline{\vec{A}} = -\mu \cdot \underline{\vec{J}}_s \quad (17.166)$$

$$\Delta \underline{\varphi} = -\frac{\underline{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (17.167)$$

Dakle, ovo elektromagnetsko polje je kvazistatičko i ono se, u ovom slučaju, naziva *magnetokvazistatičkim* elektromagnetskim poljem.

U savršenom je LIH dielektriku magnetsko polje formalno opisano istim parom Maxwellovih diferencijalnih jednačbi kao i magnetostatičko polje:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.168)$$

dok je električno polje ovisno o magnetskom polju i opisano je dodatnim diferencijalnim jednačbama:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.169)$$

17.11. Elektrovkzistatičko elektromagnetsko polje u mirujućem sredstvu

Elektrovkzistatičko elektromagnetsko polje u mirujućem sredstvu može se dobiti iz potpunog sustava Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi uz zanemarenje inducirane komponente jakosti električnog polja:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (17.170)$$

što znači da su elektromagnetski potencijali opisani izrazima:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi \quad (17.171)$$

Ovo zanemarenje ima za posljedicu da ne vrijedi Faradayev zakon elektromagnetske indukcije.

Uz uvedeno zanemarenje, Maxwellove diferencijalne jednadžbe u mirujućem savršenom LIH dielektriku glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (17.172)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.173)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.174)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.175)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti iz izraza (17.31) - (17.34) ako se u njih uvrsti uvjet (17.170) i jednadžbe građe (3.11).

Ako se izrazi (17.171) uvrste u Maxwellove diferencijalne jednadžbe (17.172) i (17.174), uz uvažavanje izraza (9.14), dobiju se sljedeće diferencijalne jednadžbe potencijala:

$$\Delta \vec{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.176)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.177)$$

pa se nakon uvrštenja Lorenzovog baždarskog uvjeta (17.97) u izraz (17.176) dobiju Poissonove diferencijalne jednadžbe (17.164) i (17.165), koje su u fazorskom području opisane izrazima (17.166) i (17.167).

Dakle, uz uvedeno zanemarenje (17.170), elektromagnetsko polje u savršenom LIH dielektriku je kvazistatičko i ono se, u ovom slučaju, naziva *elektrovkzistatičkim* elektromagnetskim poljem.

U savršenom LIH dielektriku za elektrovkzistatičko elektromagnetsko polje vrijedi da je električno polje formalno opisano istim parom Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi kao i elektrostatičko polje:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.178)$$

dok je magnetsko polje ovisno o električnom polju i opisano je diferencijalnim jednadžbama:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.179)$$

Uz uvedeno zanemarenje (17.170), Maxwellove diferencijalne jednadžbe u mirujućem vodljivom LIH sredstvu glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (17.180)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.181)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \vec{E}) = g_{st} \quad (17.182)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.183)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti iz izraza (17.27) - (17.30) ako se u njih uvrsti uvjet (17.168) i jednačbe građe (3.11).

Ako se izrazi (17.171) uvrste u Maxwellove diferencijalne jednačbe (17.180) i (17.182), uz uvažavanje izraza (9.14), dobiju se sljedeće diferencijalne jednačbe potencijala:

$$\Delta \vec{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi \right) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.184)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \varphi = -g_{st} \quad (17.185)$$

pa se nakon uvrštenja Lorenzovog baždarskog uvjeta (17.96) u izraz (17.184) dobiju sljedeće diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.186)$$

$$\left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \varphi = -g_{st} \quad (17.187)$$

koje u fazorskom području glase:

$$\Delta \underline{\vec{A}} = -\mu \cdot \underline{\vec{J}}_s \quad (17.188)$$

$$\Delta \underline{\varphi} = -\frac{\underline{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (17.189)$$

a to su Poissonove diferencijalne jednačbe.

Dakle, uz uvedeno zanemarenje (17.170), elektromagnetsko polje u vodljivom LIH sredstvu je kvazistatičko i ono se, i u ovom slučaju, naziva *elektrokvazistatičkim* elektromagnetskim poljem.

U vodljivom LIH sredstvu za elektrokvazistatičko elektromagnetsko polje vrijedi da je električno polje neovisno o magnetskom polju i opisano je sljedećim parom Maxwellovih jednačbi:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\kappa + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla \cdot \vec{E}) = g_{st} \quad (17.190)$$

dok je magnetsko polje ovisno o električnom polju i opisano je Maxwellovim diferencijalnim jednačbama:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.191)$$

17.12. Potpunokvazistatičko elektromagnetsko polje u mirujućem sredstvu

Potpunokvazistatičko elektromagnetsko polje u mirujućem sredstvu može se dobiti iz potpunog sustava Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi uz istovremeno zanemarenje pomačnih električnih struja i inducirane komponente jakosti električnog polja:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (17.192)$$

što znači da su elektromagnetski potencijali opisani izrazima:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla \varphi \quad (17.193)$$

To znači da se u Maxwellove jednadžbe elektrokvazistatičkog polja uvodi još jedno zanemarenje. Bez dodatne provjere, lako je zaključiti, da je ovakvo polje u mirujućem LIH sredstvu kvazistatičko.

Uz uvedena zanemarenja (17.192), Maxwellove diferencijalne jednadžbe u mirujućem savršenom LIH dielektriku glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad (17.194)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.195)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.196)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.197)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti iz izraza (17.27) - (17.30) ako se u njih uvrste uvjeti (17.192) i jednadžbe građe (3.11).

Ako se izrazi (17.193) uvrste u Maxwellove diferencijalne jednadžbe (17.194) i (17.196), uz uvažavanje izraza (9.14), dobiju se sljedeće diferencijalne jednadžbe potencijala:

$$\Delta \vec{A} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.198)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.199)$$

pa se nakon uvrštenja Coulombovog baždarskog uvjeta (17.102) u izraz (17.198) dobiju Poissonove diferencijalne jednadžbe (17.164) i (17.165), koje su u fazorskom području opisane izrazima (17.166) i (17.167).

Dakle, uz uvedena zanemarenja (17.192), elektromagnetsko polje u savršenom LIH dielektriku je kvazistatičko i ono se, u ovom slučaju, naziva *potpunokvazistatičkim* elektromagnetskim poljem.

U savršenom LIH dielektriku za potpunokvazistatičko elektromagnetsko polje vrijedi da su električno polje i magnetsko polje neovisna polja. Električno polje formalno opisano istim parom Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi kao i elektrostatičko polje:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (17.200)$$

dok je magnetsko polje formalno opisano istim parom Maxwellovih jednadžbi kao i magnetostatičko polje:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.201)$$

Uz uvedena zanemarenja (17.192), Maxwellove diferencijalne jednadžbe u mirujućem vodljivom LIH sredstvu glase:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} \quad (17.202)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (17.203)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\mathcal{G}_{st}}{\kappa} \quad (17.204)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.205)$$

a ovi se izrazi mogu lako dobiti iz izraza (17.27) - (17.30) ako se u njih uvrste uvjeti (17.192) i jednačbe građe (3.11).

Ako se izrazi (17.193) uvrste u Maxwellove diferencijalne jednačbe (17.202) i (17.204), uz uvažavanje izraza (9.14), dobiju se sljedeće diferencijalne jednačbe potencijala:

$$\Delta \vec{A} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \mu \cdot \kappa \cdot \varphi) = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.206)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\mathcal{G}_{st}}{\kappa} \quad (17.207)$$

pa se nakon uvrštenja Lorenzovog baždarskog uvjeta (17.142) u izraz (17.206) dobiju Poissonove diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.208)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\mathcal{G}_{st}}{\kappa} \quad (17.209)$$

U vodljivom LIH sredstvu za potpunokvazistatičko elektromagnetsko polje vrijedi da je električno polje neovisno o magnetskom polju i opisano je sljedećim parom Maxwellovih jednačbi:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\mathcal{G}_{st}}{\kappa} \quad (17.210)$$

dok je magnetsko polje ovisno o električnom polju i opisano je diferencijalnim jednačbama:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \kappa \cdot \vec{E} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (17.211)$$

17.13. Usporedba aproksimacija elektromagnetskih polja

Aproksimacije elektromagnetskog polja u mirujućem neograničenom LIH sredstvu, u ovisnosti o vrsti zanemarenja, prikazane su u Tablici 17.1.

Kvazistatička elektromagnetska polja aproksimiraju dinamička elektromagnetska polja. Hibridna ili Darwinova aproksimacija elektromagnetskog polja jest najbolja od prikazanih aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja, ali ona nije kvazistatička aproksimacija u neograničenom sredstvu. Darwinovu aproksimaciju elektromagnetskog polja ima smisla koristiti samo za elektromagnetska polja u mirujućem savršenom dielektriku.

Magnetokvazistatička aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja u mirujućem savršenom dielektriku utemeljena je na zanemarenju pomačnih električnih struja. Ovo je relativno dobra kvazistatička aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja.

Ako se pomačne električne struje zanemare u mirujućem vodljivom sredstvu, za skalarni električni potencijal i vektorski magnetski potencijal vrijede difuzijske jednačbe. To je tzv. magnetodinamičko polje, koje mnogi pogrešno nazivaju kvazistatičkim poljem. Tim jednačbama su opisani tzv. problemi vrtložnih struja (engl. *eddy current problems*).

Elektrokvazistatička aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja utemeljena je na zanemarenju inducirane jakosti električnog polja, što znači da u tom slučaju ne vrijedi Faradayev zakon elektromagnetske indukcije. Ovo je relativno gruba aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja, koja je kvazistatička i u mirujućem vodljivom sredstvu i u mirujućem savršenom dielektriku.

Tablica 17.1. Razvrstavanje polja u ovisnosti o vrsti zanemarenja i vrsti sredstva

Zanemarenje	Vrsta sredstva	Vrsta polja
$\frac{\partial \vec{E}_{\text{ind}}}{\partial t} = 0$	savršeni dielektrik	Darwinovo
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$	savršeni dielektrik	magnetokvazistatičko
	vodljivo sredstvo	magnetodinamičko
$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	savršeni dielektrik	elektrokvazistatičko
	vodljivo sredstvo	
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ i $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	savršeni dielektrik	potpunokvazistatičko
	vodljivo sredstvo	

Potpunokvazistatička aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja utemeljena je na zanemarenju pomačnih električnih struja i inducirane jakosti električnog polja, što znači da su u tom slučaju u Maxwellovim diferencijalnim jednadžbama zanemarene sve derivacije po vremenu. To je vrlo gruba aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja, koja je kvazistatička i u mirujućem vodljivom sredstvu i u mirujućem savršenom dielektriku.

17.14. Partikularna rješenja Helmholtzovih diferencijalnih jednadžbi

U fazorskom području, u neograničenom LIH sredstvu, Lorenzovi potencijali su rješenja Helmholtzovih diferencijalnih jednadžbi. Ako se koristi kvazistatička aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja, onda se Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednadžbe svode na Poissonove diferencijalne jednadžbe elektromagnetskih potencijala.

U vodljivom LIH sredstvu, Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednadžbe Lorenzovih potencijala opisane su izrazima (17.116) i (17.117), koji glase:

$$\Delta \vec{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.212)$$

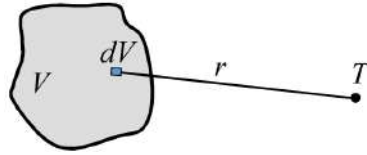
$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{\text{st}}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (17.213)$$

a njihova partikularna rješenja, koja vrijede za neograničeno sredstvo, su (Slika 17.3):

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot dV = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot e^{-\alpha \cdot r} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}}{r} \cdot dV \quad (17.214)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_V \frac{\bar{g}_{\text{st}} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot dV \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_V \frac{\bar{g}_{\text{st}} \cdot e^{-\alpha \cdot r} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}}{r} \cdot dV \end{aligned} \quad (17.215)$$

gdje su valna konstanta $\bar{\gamma}$, prigušna konstanta α i fazna konstanta β opisane izrazima (17.119) - (17.121).



Slika 17.3. Volumen u kojem se nalaze izvori polja i točka promatranja

U dobrim LIH vodičima, uz zanemarenje pomaćnih električnih struja, dinamičko elektromagnetsko polje se može aproksimirati magnetodinamičkim elektromagnetskim poljem. Tada su Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala opisane izrazima (17.143) i (17.144), koji glase:

$$\Delta \vec{A} - \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.216)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (17.217)$$

a njihova partikularna rješenja su, također, opisana izrazima (17.214) i (17.215), dok su valna konstanta $\bar{\gamma}$, prigušna konstanta α i fazna konstanta β opisane izrazima (17.145) i (17.146).

Ako se koristi elektrovazistatička aproksimacija elektromagnetskog polja u vodljivom LIH sredstvu, onda se Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala (17.212) i (17.213) svode na Poissonove diferencijalne jednačbe (17.188) i (17.189), koje glase:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.218)$$

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (17.219)$$

a njihova partikularna rješenja su:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot dV}{r} \quad (17.220)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_V \frac{\bar{g}_{st} \cdot dV}{r} \quad (17.221)$$

koja se mogu dobiti iz partikularnih rješenja (17.214) i (17.215) za $\bar{\gamma} = 0$.

Ako se koristi potpunokvazistatička aproksimacija elektromagnetskog polja u vodljivom LIH sredstvu, onda se Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednačbe Lorenzovih potencijala (17.212) i (17.213) svode na Poissonove diferencijalne jednačbe:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}_s \quad (17.222)$$

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa} \quad (17.223)$$

a njihova partikularna rješenja su:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot dV}{r} \quad (17.224)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \kappa} \cdot \int_V \frac{\bar{g}_{st} \cdot dV}{r} \quad (17.225)$$

koja se mogu dobiti iz partikularnih rješenja (17.214) i (17.215) ako se u njih uvrste supstitucije: $\bar{\gamma} = 0$ i $\varepsilon = 0$.

U savršenom LIH dielektriku, Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednadžbe Lorenzovih potencijala opisane su izrazima (17.113) i (17.114), koji glase:

$$\Delta \bar{\underline{A}} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\underline{A}} = -\mu \cdot \bar{\underline{J}}_s \quad (17.226)$$

$$\Delta \bar{\varphi} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{\varphi} = -\frac{\bar{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (17.227)$$

a njihova partikularna rješenja su (Slika 17.3):

$$\bar{\underline{A}} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\bar{\underline{J}}_s \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot dV = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\bar{\underline{J}}_s \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}}{r} \cdot dV \quad (17.228)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\bar{\rho}_s \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot dV = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\bar{\rho}_s \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot r}}{r} \cdot dV \quad (17.229)$$

gdje su valna konstanta $\bar{\gamma}$ i fazna konstanta β opisane izrazima (17.119) i (17.122).

Ako se koristi elektrokvazistatička, magnetokvazistatička ili potpunokvazistatička aproksimacija elektromagnetskog polja u savršenom LIH sredstvu, onda se Helmholtzove nehomogene diferencijalne jednadžbe Lorenzovih potencijala (17.226) i (17.227) svode na Poissonove diferencijalne jednadžbe:

$$\Delta \bar{\underline{A}} = -\mu \cdot \bar{\underline{J}}_s \quad (17.230)$$

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\bar{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (17.231)$$

a njihova partikularna rješenja su:

$$\bar{\underline{A}} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\bar{\underline{J}}_s \cdot dV}{r} \quad (17.232)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\bar{\rho}_s \cdot dV}{r} \quad (17.233)$$

koja se mogu dobiti iz partikularnih rješenja (17.228) i (17.229) za $\bar{\gamma} = j \cdot \beta = 0$.

17.15. Fazna brzina elektromagnetskog vala

Brzina širenja sinusoidalnog elektromagnetskog vala, odnosno fazna brzina elektromagnetskog vala opisana je izrazom:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (17.234)$$

gdje je ω kružna frekvencija sinusoidalnog elektromagnetskog polja.

Iz izraza (17.120), (17.121) i (17.234) slijedi da je fazna brzina sinusoidalnog elektromagnetskog vala u vodljivom LIH sredstvu opisana izrazom:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}}} \quad (17.235)$$

pa je u dobrim vodičima, uz zanemarenje pomaćnih električnih struja, odnosno za $\varepsilon = 0$, fazna brzina vala aproksimirana izrazom:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{\mu \cdot \kappa}} \quad (17.236)$$

što se može lako dobiti i iz izraza (17.146) i (17.234).

Iz izraza (17.235) i (17.236) slijedi da je fazna brzina elektromagnetskog vala u vodljivom LIH sredstvu ovisna o značajkama sredstva i o frekvenciji sinusoidalnog elektromagnetskog vala.

Iz izraza (17.122) i (17.234) slijedi da je fazna brzina sinusoidalnog elektromagnetskog vala u savršenom LIH dielektriku opisana izrazom:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (17.237)$$

i ovisi samo o značajkama sredstva.

Dakle, za razliku od vodljivog LIH sredstva, u savršenom LIH dielektriku sinusoidalni elektromagnetski valovi svih frekvencija imaju istu brzinu. Za vakuum (zrak) vrijedi da je fazna brzina elektromagnetskog vala:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (17.238)$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu.

17.16. Fourierova transformacija i inverzna Fourierova transformacija

Elektromagnetski problemi koji su u vremenskom području opisani linearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama mogu se rješavati u vremenskom području, ali se složeniji problemi rješavaju korištenjem integralnih transformacija. Najčešće se koristi Fourierova transformacija koja parcijalne diferencijalne jednačbe iz vremenskog područja transformira u sustav linearnih algebarskih jednačbi u frekvencijskom području. Fourierova transformacija, koja funkcije iz vremenskog područja preslikava u frekvencijsko (spektralno) područje, opisana je izrazom:

$$\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt \quad (17.239)$$

gdje je:

$g(t)$ - zadana realna funkcija u vremenskom području,

$\bar{G}(\omega)$ - kompleksna funkcija u frekvencijskom području,

$t \geq 0$ - vrijeme,

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ - kružna frekvencija.

U općem slučaju, vrijeme $t \in (-\infty, \infty)$, ali je u elektromagnetskom problemima $t \geq 0$ pa tada Fourierova transformacija glasi:

$$\bar{G}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt \quad (17.240)$$

Za preslikavanje iz frekvencijskog područja u vremensko područje koristi se inverzna Fourierova transformacija, koja je opisana izrazom:

$$g(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega t} \cdot d\omega \quad (17.241)$$

Iz izraza (17.239), slijedi da je:

$$\overline{G}(-\omega) = (\overline{G}(\omega))^* \quad ; \quad e^{-j\omega t} = (e^{j\omega t})^* \quad (17.242)$$

pa se izraz za inverznu Fourierovu transformaciju (17.241) može preinačiti u praktičniji oblik:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \text{Re} [\overline{G}(\omega) \cdot e^{j\omega t}] \cdot d\omega \quad (17.243)$$

što znači da se u izračunu može uzeti da je $\omega \geq 0$.

Korištenjem diskretne brze Fourierove transformacije (FFT) ili pak kontinuirane numeričke Fourierove transformacije (CNFT) riješi se integral opisan izrazom (17.240) za skup tzv. uzorkovanih točaka u frekvencijskom području. Potom se za svaku od tih uzorkovanih frekvencija riješi pripadni sustav linearnih algebarskih jednadžbi u frekvencijskom (fazorskom) području, a nakon toga se veličine od interesa preslikaju iz frekvencijskog područja u vremensko područje korištenjem inverzne brze Fourierove transformacije (IFFT) ili pak inverzne kontinuirane numeričke Fourierove transformacije (ICNFT) te se na taj riješi integral (17.243). Integral (17.243) treba riješiti za svaku pojedinu uzorkovanu točku u vremenskom području.

Ako se koristi FFT / IFFT numerički algoritam, anda je uzorkovanje u vremenskom području spregnuto s uzorkovanjem u frekvencijskom području, a uzorkovane točke u pojedinom području moraju biti međusobno ekvidistantne. U praktičnoj primjeni IFFT algoritma, postoje dvije otegotne okolnosti. Prva otegotna okolnost jest to što je područje integracije beskonačno a uzorkovane točke moraju biti ekvidistantne, dok je druga otegotna okolnost to što je podintegralna funkcija vrlo oscilatorna, osobito na visokim frekvencijama.

Ako se koristi CNFT / ICNFT numerički algoritam, onda su uzorkovanja u vremenskom području i u frekvencijskom području potpuno neovisna i potpuno proizvoljna. To značajno poboljšava robusnost i točnost ovog numeričkog algoritma, a on ima i neke druge prednosti u odnosu na FFT / IFFT numerički algoritam.

17.17. Retardirani potencijali u neograničenom savršenom LIH dielektriku

Iz izraza (17.228), (17.229) i (17.234) slijedi da su partikularna rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi Lorenzovih potencijala (17.113) i (17.114) u mirujućem savršenom LIH dielektriku, u fazorskom (frekvencijskom) području, opisana izrazima:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot e^{-j\beta \cdot r}}{r} \cdot dV = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot e^{-j\omega \frac{r}{v}}}{r} \cdot dV \quad (17.244)$$

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\vec{\rho}_s \cdot e^{-j\beta \cdot r}}{r} \cdot dV = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\vec{\rho}_s \cdot e^{-j\omega \frac{r}{v}}}{r} \cdot dV \quad (17.245)$$

U mirujućem savršenom LIH dielektriku nema gušenja elektromagnetskog polja, fazna konstanta β opisuje negativno zakretanje faze u frekvencijskom području, što se u vremenskom području manifestira kao kašnjenje (retardacija). To opisuje inverzna Fourierova transformacija:

$$g\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}(\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{v}} \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (17.246)$$

što znači da su Lorenzovi potencijali u vremenskom području opisani izrazima:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \left(t - \frac{r}{v} \right) \cdot dV}{r} \quad ; \quad \varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \frac{\rho_s \left(t - \frac{r}{v} \right) \cdot dV}{r} \quad (17.247)$$

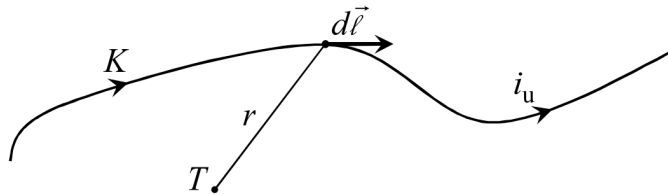
koji su poznati pod imenom: *retardirani ili zakašnjeli potencijali*.

Retardirani potencijali, opisani izrazima (17.247), partikularna su rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednačbi Lorenzovih potencijala (17.113) i (17.114) u savršenom LIH dielektriku, u vremenskom području. Retardirani potencijali su neovisni o frekvenciji, jer je brzina širenja vala v koja je opisana izrazom (17.237) neovisna o frekvenciji, pa izrazi (17.113) i (17.114) u savršenom LIH dielektriku vrijede i za sinusoidalna i za nesinusoidalna elektromagnetska polja. Utjecaj izvora elektromagnetskog polja se širi brzinom v te se u točku udaljenu za r prenese nakon protoka vremena:

$$t_0 = \frac{r}{v} \quad (17.248)$$

U vakuumu je brzina širenja vala v jednaka brzini svjetlosti c .

Neka duž osi tankožičanog vodiča, koji se nalazi u neograničenom savršenom LIH dielektriku dielektričnosti ε , teče vremenski promjenjiva uzdužna struja (Slika 17.4).



Slika 17.4. Tankožičani vodič u savršenom LIH dielektriku

Za tankožičani vodič vrijedi da je:

$$\vec{J}_s \cdot dV \rightarrow i_u \cdot d\vec{l} \quad ; \quad \rho_s \cdot dV \rightarrow \lambda_s \cdot dl \quad (17.249)$$

gdje je:

i_u - jakost uzdužne struje nezavisnog izvora,

λ_s - linijska gustoća naboja nezavisnog izvora.

Iz izraza (17.247) i (17.249), slijedi da su retardirani potencijali tankožičanog vodiča u mirujućem savršenom LIH dielektriku opisani sljedećim izrazima:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{i_u \left(t - \frac{r}{v} \right) \cdot d\vec{l}}{r} \quad ; \quad \varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_K \frac{\lambda_s \left(t - \frac{r}{v} \right) \cdot dl}{r} \quad (17.250)$$

koji u frekvencijskom (fazorskom) području glase:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{\vec{I}_u \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{r}{v}} \cdot d\vec{l}}{r} \quad ; \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_K \frac{\bar{\lambda}_s \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{r}{v}} \cdot dl}{r} \quad (17.251)$$

gdje je:

\vec{I}_u - fazor uzdužne struje nezavisnog izvora,

$\bar{\lambda}_s$ - fazor linijske gustoće naboja nezavisnog izvora.

17.18. Lorenzovi potencijali tankožičanog vodiča u vodljivom LIH sredstvu

U mirujućem vodljivom LIH sredstvu, partikularna rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi (17.116) i (17.117) opisana su izrazima (17.214) i (17.215), koji glase:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{J}_s \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot dV \quad (17.252)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_V \frac{\bar{g}_{st} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot dV \quad (17.253)$$

gdje je valna konstanta $\bar{\gamma}$ vodljivog LIH sredstva opisana izrazima (17.119) - (17.121).

Neka duž osi tankožičanog vodiča, koji se nalazi u neograničenom vodljivom LIH sredstvu, teče sinusoidalna uzdužna struja (Slika 17.5).

Za tankožičani vodič vrijede izrazi:

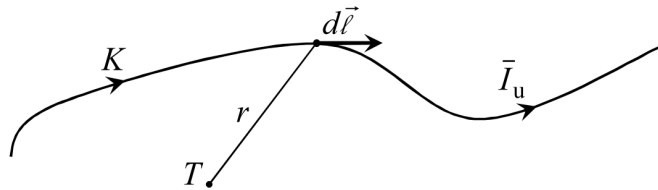
$$\vec{J}_s \cdot dV \rightarrow \bar{I}_u \cdot d\vec{\ell} \quad (17.254)$$

$$\bar{g}_{st} \cdot dV \rightarrow \bar{\tau}_s \cdot d\ell \quad (17.255)$$

gdje je:

\bar{I}_u - fazor uzdužne struje nezavisnog izvora,

$\bar{\tau}_s$ - fazor linijske gustoće poprečne električne struje nezavisnog izvora.



Slika 17.5. Tankožičani vodič u vodljivom LIH sredstvu

Fazor linijske gustoće poprečne električne struje koju tankožičani vodič iz svoje osi ispušta u okolno vodljivo sredstvo opisan je izrazom:

$$\bar{\tau}_s = - \frac{\partial \bar{I}_u}{\partial \ell} \quad (17.256)$$

Iz izraza (17.252) - (17.255), slijedi da su Lorenzovi potencijali tankožičanog vodiča u mirujućem savršenom LIH dielektriku, u fazorskom području, opisani sljedećim izrazima:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_K \frac{\bar{I}_u \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot d\vec{\ell} \quad (17.257)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_K \frac{\bar{\tau}_s \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot r}}{r} \cdot d\ell \quad (17.258)$$

U mirujućem vodljivom LIH sredstvu osim retardacije (kašnjenja) elektromagnetskog vala postoji i gušenje elektromagnetskog vala. Osim toga, fazna brzina vala, koja je opisana izrazom (17.235), ovisi o frekvenciji elektromagnetskog polja. Stoga ne postoji analitičko partikularno rješenje Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi Lorenzovih potencijala (17.116) i (17.117) u vremenskom području. U tom slučaju treba koristiti Fourierovu integralnu transformaciju za prijelaz između vremenskog i frekvencijskog područja.

Budući da su partikularna rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi u mirujućem savršenom LIH dielektriku, u fazorskom području, opisana izrazima (17.251), poseban slučaj partikularnih rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi u mirujućem vodljivom LIH sredstvu, opisanih izrazima (17.257) i (17.258), važno je istaknuti da pri prijelazu s vodljivog sredstva na savršeni dielektrik vrijede sljedeći izrazi:

$$\bar{\tau}_s \rightarrow j \cdot \omega \cdot \bar{\lambda}_s ; \quad \kappa \rightarrow 0 ; \quad \bar{\gamma} \rightarrow j \cdot \beta = j \cdot \frac{\omega}{v} \quad (17.259)$$

17.19. Elektrokvizistatičko i potpunokvizistatičko sinusoidalno strujno polje

U osrednje vodljivom LIH sredstvu kao što je tlo, kod kojeg je električna provodnost $\kappa < 1$ S/m, koristi se *elektrokvizistatička aproksimacija* niskofrekvencijskog strujnog polja. Iz izraza (17.190), slijedi da je elektrokvizistatičko sinusoidalno strujno polje nezavisno od magnetskog polja te da je opisano diferencijalnim jednadžbama:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 ; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\bar{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (17.260)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{E} = -\nabla \bar{\varphi} \quad (17.261)$$

te da je:

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\bar{g}_{st}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (17.262)$$

Partikularno rješenje Poissonove diferencijalne jednadžbe (17.262) je:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_V \frac{\bar{g}_{st} \cdot dV}{r} \quad (17.263)$$

gdje je r udaljenost između točke izvora i točke promatranja.

Za tankožičani vodič vrijedi izraz (17.255) pa u tom slučaju partikularno rješenje Poissonove diferencijalne jednadžbe glasi:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon)} \cdot \int_K \frac{\bar{\tau}_s \cdot d\ell}{r} \quad (17.264)$$

Partikularna rješenja Poissonovih diferencijalnih jednadžbi opisuju raspodjelu skalarnog električnog potencijala u neograničenom vodljivom LIH sredstvu.

Iz izraza (17.262) slijedi da za točkasti izvor sinusoidalne električne struje u vodljivom LIH sredstvu vrijedi Poissonova diferencijalna jednadžba:

$$\Delta \bar{\varphi} = -\frac{\bar{I}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \cdot \delta(\vec{r}) ; \quad \bar{g}_{st} \rightarrow \bar{I} \cdot \delta(\vec{r}) \quad (17.265)$$

čije je partikularno rješenje:

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{I}}{4 \cdot \pi \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot r} \quad (17.266)$$

Ako se u izraze navedene u ovom poglavlju uvrsti $\varepsilon = 0$, onda jednadžbe elektrokvizistatičkog sinusoidalnog strujnog polja u vodljivom LIH sredstvu postaju jednadžbe potpunokvizistatičkog sinusoidalnog strujnog polja u vodljivom LIH sredstvu.

17.20. Helmholtzove jednadžbe polja u mirujućem LIH sredstvu bez izvora

U desetom poglavlju ovog udžbenika izvedene su valne jednadžbe polja u mirujućem LIH sredstvu bez izvora. U mirujućem vodljivom LIH sredstvu bez izvora, valne jednadžbe polja opisane su izrazima (10.9) i (10.10), koje glase:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (17.267)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (17.268)$$

koje u mirujućem savršenom LIH dielektriku bez izvora postaju homogene neprigušene valne jednadžbe polja (10.11) i (10.12), koje glase:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (17.269)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (17.270)$$

dok u mirujućem dobrom LIH vodiču bez izvora, uz zanemarenje pomačnih električnih struja, postaju homogene difuzijske jednadžbe polja (10.13), koje glase:

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (17.271)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (17.272)$$

Homogene valne jednadžbe polja i homogene difuzijske jednadžbe polja se iz vremenskog područja mogu transformirati u Helmholtzove homogene diferencijalne jednadžbe polja u fazorskom području, koje glase:

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \quad ; \quad \Delta \underline{\vec{H}} - \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0 \quad (17.273)$$

ili drukčije pisano:

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{\vec{E}} \quad ; \quad \Delta \underline{\vec{H}} = \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{\vec{H}} \quad (17.274)$$

gdje je valna konstanta sredstva $\bar{\gamma}$ opisana:

- izrazima (17.119) - (17.121) u vodljivom LIH sredstvu,
- izrazima (17.119) i (17.122) u savršenom LIH dielektriku,
- izrazom (17.146) u dobrom LIH vodiču.

Helmholtzove homogene diferencijalne jednadžbe polja u fazorskom području, opisane izrazima (17.274), mogu se, za vodljivo LIH sredstvo bez izvora, izvesti iz Maxwellovih diferencijalnih jednadžbi:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \underline{\vec{E}} \quad (17.275)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \underline{\vec{H}} \quad (17.276)$$

koje su u vremenskom području opisane izrazima (10.1) i (10.2). Izrazima (17.275) i (17.276) treba pridodati i dva sljedeća izraza:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} \quad (17.277)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (17.278)$$

Iz izraza (17.275) i (17.277), slijedi da je:

$$\Delta \vec{H} = -(\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot (\nabla \times \vec{E}) \quad (17.279)$$

Iz izraza (17.276) i (17.278), slijedi da je:

$$\Delta \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad (17.280)$$

Iz izraza (17.276) i (17.279), slijedi da je:

$$\Delta \vec{H} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \vec{H} = \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad (17.281)$$

Iz izraza (17.275) i (17.280), slijedi da je:

$$\Delta \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \vec{E} = \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{E} \quad (17.282)$$

U savršenom LIH dielektriku bez izvora, Maxwellova diferencijalna jednačba (17.275) poprima novi oblik:

$$\nabla \times \vec{H} = j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (17.283)$$

U dobrom LIH vodiču bez izvora, uz zanemarenje pomačnih električnih struja, Maxwellova diferencijalna jednačba (17.275) poprima novi oblik:

$$\nabla \times \vec{H} = \kappa \cdot \vec{E} \quad (17.284)$$

Maxwellova diferencijalna jednačba (17.276), također, vrijedi u savršenom LIH dielektriku bez izvora i u dobrom LIH vodiču bez izvora.

17.21. Dubina prodiranja elektromagnetskog vala

Dubina prodiranja elektromagnetskog vala d opisana je izrazom:

$$d = \frac{1}{\alpha} \quad (17.285)$$

gdje je α prigušna konstanta sredstva.

Iz izraza (17.120), (17.121) i (17.285) slijedi da je dubina prodiranja elektromagnetskog vala u vodljivom LIH sredstvu:

$$d = \frac{1}{\kappa} \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu}} \cdot \sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}} \quad (17.286)$$

dok je u dobrom vodiču, uz zanemarenje pomačnih električnih struja, dubina prodiranja elektromagnetskog vala opisana izrazom:

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}} \quad (17.287)$$

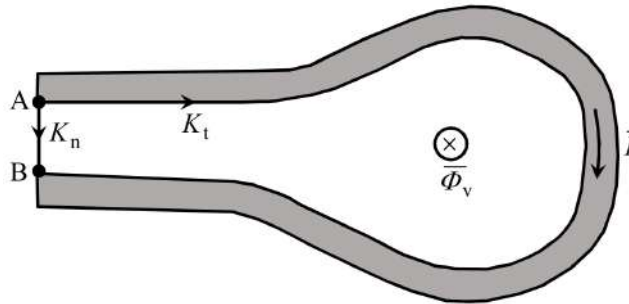
U savršenom LIH dielektriku nema gušenja elektromagnetskog vala, a prigušna konstanta sredstva jednaka je nuli, pa je dubina prodiranja elektromagnetskog vala u takvom sredstvu beskonačna.

Ako sinusoidalni elektromagnetski val u vodljivom sredstvu prevali udaljenost koja je jednaka dubini prodiranja elektromagnetskog vala, tada se njegova amplituda (pa i efektivna vrijednost) na tom putu smanji na 36,78794 % iznosa jer je:

$$e^{-\alpha \cdot d} = e^{-1} \approx 0,3678794 \quad (17.288)$$

17.22. Impedancija vodiča i unutarnja impedancija vodiča

Neka kroz vodič načinjen od LIH materijala teče sinusoidalna električna struja (Slika 17.6).



Slika 17.6. Vodič od LIH materijala protjecan sinusoidalnom električnom strujom

Neka je krivulja K_n takva da je na nju vektorski magnetski potencijal okomit. Tada je električni napon duž te krivulje tzv. poprečni napon ili kraće rečeno električni napon, a u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju napon nije jednoznačan. Dakle, pod naponom se podrazumijeva poprečni napon, a to je poseban slučaj napona koji je jednak razlici skalarnih električnih potencijala.

Vrijedi da je:

$$\int_{K_n} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \bar{\varphi}_A - \bar{\varphi}_B - \int_{K_n} j \cdot \omega \cdot \underbrace{\vec{A}}_{=0} \cdot d\vec{l} = \bar{\varphi}_A - \bar{\varphi}_B = \bar{U} \quad (17.289)$$

gdje je \bar{U} fazor (poprečnog) napona vodiča.

Nadalje je:

$$\bar{U} = \bar{\varphi}_A - \bar{\varphi}_B = \bar{Z} \cdot \bar{I} = (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \bar{I} \quad (17.290)$$

gdje je:

- \bar{Z} - impedancija vodiča,
- R - radni otpor vodiča,
- ω - kružna frekvencija električne struje,
- L - ukupni induktivitet vodiča,
- \bar{I} - fazor jakosti električne struje koja teče vodičem.

Prema Faradayevom zakonu elektromagnetske indukcije vrijedi da je:

$$\int_{K_t} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{K_n} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j \cdot \omega \cdot \bar{\Phi}_v = -j \cdot \omega \cdot L_v \cdot \bar{I} \quad (17.291)$$

gdje je:

- $\bar{\Phi}_v$ - fazor vanjskog magnetskog toka (Slika 17.6),
- L_v - vanjski induktivitet vodiča.

Iz izraza (17.288) i (17.290), slijedi da je:

$$\int_{K_t} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \bar{U} - j \cdot \omega \cdot L_v \cdot \bar{I} = (\bar{Z} - j \cdot \omega \cdot L_v) \cdot \bar{I} = \bar{Z}_{un} \cdot \bar{I} \quad (17.292)$$

gdje je \bar{Z}_{un} unutarnja impedancija vodiča.

Dakle, unutarnja impedancija vodiča definirana je izrazom:

$$\bar{Z}_{un} = \bar{Z} - j \cdot \omega \cdot L_v = \frac{1}{\bar{I}} \cdot \int_{K_t} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (17.293)$$

U slučaju beskonačno dugog pravocrtnog vodiča kružnog poprečnog presjeka, jedinična unutarnja impedancija vodiča, ili drukčije rečeno unutarnja impedancija po jedinici duljine vodiča, definirana je izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{E}_t}{\bar{I}} \quad (17.294)$$

gdje je \bar{E}_t fazor jakosti tangencijalne komponente električnog polja na površini vodiča.

U općem slučaju, prema izrazima (12.29) i (12.41), unutarnja impedancija vodiča može se izračunati pomoću formule koja slijedi iz Poyntingovog teorema:

$$\bar{S}_{p,ul} = \bar{Z}_{un} \cdot I^2 = -\bar{S}_{p,izl} = -\oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} \quad (17.295)$$

gdje je:

$\bar{S}_{p,ul}$ - kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u volumena V ,

$\bar{S}_{p,izl}$ - kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja izlazi iz volumena V ,

S - vanjska ploha vodiča ili pak vanjska ploha jediničnog odsječka vodiča ako se računa jedinična unutarnja impedancija.

Iz izraza (17.295), slijedi da je unutarnja impedancija vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un} = -\frac{1}{I^2} \cdot \oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{I^2} \cdot \oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (17.296)$$

Slijedi da je u slučaju beskonačno dugog pravocrtnog cilindričnog vodiča, polumjera r_v , jedinična unutarnja impedancija vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = -\frac{1}{I^2} \cdot \oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = \frac{\bar{E}_t \cdot \bar{H}_t^*}{I^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_v \quad (17.297)$$

gdje je:

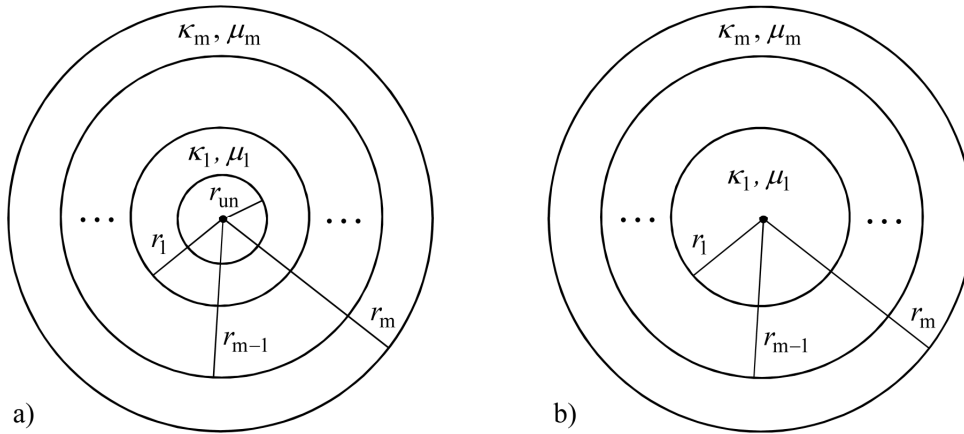
$$\bar{H}_t^* = \frac{\bar{I}^*}{2 \cdot \pi \cdot r_v} \quad (17.298)$$

pa je:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{E}_t \cdot \bar{I}^*}{I^2} = \frac{\bar{E}_t \cdot \bar{I}^*}{\bar{I} \cdot \bar{I}^*} = \frac{\bar{E}_t}{\bar{I}} = \frac{1}{2 \cdot r_v \cdot \pi} \cdot \frac{\bar{E}_t}{\bar{H}_t} \quad (17.299)$$

17.23. Unutarnja impedancija višeslojnog cilindričnog vodiča

Neka beskonačno dugim, pravocrtnim, višeslojnim cilindričnim vodičem, koji se sastoji od m vodljivih LIH slojeva, teče sinusoidalna struja. Višeslojni cilindrični vodič može biti šuplji (Slika 17.7-a) ili pak puni (Slika 17.7-b). Neka je polje u vodiču magnetodinamičko, što znači da se pomaćne električne struje zanemaruju.



Slika 17.7. Šuplji i puni m -slojni cilindrični vodič

Neka se beskonačno dugi m -slojni puni ili šuplji cilindrični vodič nalazi duž osi z koordinatnog sustava te neka se os vodiča poklapa s osi z . Neka sinusoidalna električna struja teče u smjeru osi z . Budući da je problem osnosimetričan, koristi se cilindrični koordinatni sustav (r, φ, z) .

Za razmatrani cilindrični vodič, električno i magnetsko polje u i -tom sloju m -slojnog vodiča imaju samo po jednu komponentu, odnosno vrijedi da je:

$$\underline{\vec{E}}_i = \bar{E}_i \cdot \bar{e}_z \quad ; \quad \underline{\vec{H}}_i = \bar{H}_i \cdot \bar{e}_\varphi \quad (17.300)$$

Uz zanemarenje pomaćnih električnih struja, za i -ti sloj vrijede sljedeće jednačbe:

$$\Delta \bar{E}_i = \bar{\gamma}_i^2 \cdot \bar{E}_i \quad (17.301)$$

$$\Delta \bar{H}_i = \bar{\gamma}_i^2 \cdot \bar{H}_i \quad (17.302)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}}_i = \kappa_i \cdot \underline{\vec{E}}_i \quad (17.303)$$

$$\bar{\gamma}_i^2 = j \cdot \omega \cdot \mu_i \cdot \kappa_i \quad (17.304)$$

$$\bar{\gamma}_i = \sqrt{\omega \cdot \mu_i \cdot \kappa_i} \cdot e^{j45^\circ} = (1 + j) \cdot \alpha_i \quad ; \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_i \cdot \kappa_i}{2}} \quad (17.305)$$

Za laplasijan fazora vektora jakosti magnetskog polja vrijedi da je:

$$\Delta \underline{\vec{H}}_i = \nabla \left(\underbrace{\nabla \cdot \underline{\vec{H}}_i}_{=0} \right) - \nabla \times (\nabla \times \underline{\vec{H}}_i) = -\nabla \times (\nabla \times \underline{\vec{H}}_i) \quad (17.306)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) vrijedi da je:

$$\nabla \times \underline{\vec{H}}_i = \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r \cdot \bar{e}_\varphi & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & r \cdot \bar{H}_i & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \bar{H}_i)}{\partial r} \cdot \bar{e}_z \quad (17.307)$$

pa je:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\bar{H}}_i) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r \cdot \bar{e}_\phi & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \bar{H}_i)}{\partial r} \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \bar{H}_i)}{\partial r} \right] \cdot \bar{e}_\phi \quad (17.308)$$

Iz izraza (17.302), (17.306) i (17.308), slijedi da je:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \bar{H}_i)}{\partial r} \right] = \bar{\gamma}_i^2 \cdot \bar{H}_i = -\bar{k}_i^2 \cdot \bar{H}_i \quad (17.309)$$

gdje je \bar{k}_i kompleksni valni broj i-tog sloja za koji vrijedi sljedeći izraz:

$$\bar{k}_i = -j \cdot \bar{\gamma}_i = \sqrt{\omega \cdot \mu_i \cdot \kappa_i} \cdot e^{-j45^\circ} = (1-j) \cdot \alpha_i \quad ; \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_i \cdot \kappa_i}{2}} \quad (17.310)$$

Iz izraza (17.309) slijedi da je:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \bar{H}_i + \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial r} \right] = \bar{\gamma}_i^2 \cdot \bar{H}_i = -\bar{k}_i^2 \cdot \bar{H}_i \quad (17.311)$$

odakle se lako dobiju sljedeće dvije inačice ove diferencijalne jednadžbe:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}_i}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial r} + (\bar{k}_i^2 \cdot r^2 - 1) \cdot \bar{H}_i = 0 \quad (17.312)$$

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}_i}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial r} - (\bar{\gamma}_i^2 \cdot r^2 + 1) \cdot \bar{H}_i = 0 \quad (17.313)$$

Diferencijalna jednadžba opisana izrazom (17.312) jest poseban slučaj Besselove diferencijalne jednadžbe za $n^2=1$, dok je diferencijalna jednadžba opisana izrazom (17.313) poseban slučaj modificirane Besselove diferencijalne jednadžbe za $n^2=1$.

Partikularno rješenje Besselove diferencijalne jednadžbe (17.312) glasi:

$$\bar{H}_i = \bar{C}_i \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_i \cdot r) + \bar{D}_i \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_i \cdot r) \quad (17.314)$$

gdje su:

$\bar{J}_1(\bar{k}_i \cdot r)$ - kompleksna Besselova funkcija prve vrste prvog reda,

$\bar{N}_1(\bar{k}_i \cdot r)$ - kompleksna Besselova funkcija druge vrste prvog reda; kompleksna Neumannova funkcija prvog reda,

\bar{C}_i, \bar{D}_i - nepoznati kompleksni koeficijenti.

Iz izraza (17.303) i (17.307) slijedi da je:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{\kappa_i} \cdot (\nabla \times \bar{H}_i) = \frac{1}{\kappa_i} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \bar{H}_i)}{\partial r} \cdot \bar{e}_z \quad ; \quad \bar{E}_i = \frac{1}{\kappa_i} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \bar{H}_i)}{\partial r} \quad (17.315)$$

te vrijedi da je:

$$\frac{d}{dr} [r \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_i \cdot r)] = \bar{k}_i \cdot r \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_i \cdot r) \quad ; \quad \frac{d}{dr} [r \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_i \cdot r)] = \bar{k}_i \cdot r \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_i \cdot r) \quad (17.316)$$

gdje su:

$\bar{J}_0(\bar{k}_i \cdot r)$ - kompleksna Besselova funkcija prve vrste nultog reda,

$\bar{N}_0(\bar{k}_i \cdot r)$ - kompleksna Besselova funkcija druge vrste nultog reda; kompleksna Neumannova funkcija nultog reda.

Iz izraza (17.314) - (17.316) dobije se da je:

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{k}_i}{\kappa_i} \cdot [\bar{C}_i \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_i \cdot r) + \bar{D}_i \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_i \cdot r)] \quad (17.317)$$

Numerički rezultati pokazuju da je, pogotovo za velike vrijednosti argumenata, umjesto partikularnog rješenja (17.314) Besselove diferencijalne jednadžbe (17.312), puno bolje koristiti partikularno rješenje modificirane Besselove diferencijalne jednadžbe (17.313), koje glasi:

$$\bar{H}_i = \bar{C}_i \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_i \cdot r) + \bar{D}_i \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_i \cdot r) \quad (17.318)$$

gdje su:

$\bar{J}_1(\bar{\gamma}_i \cdot r)$ - kompleksna modificirana Besselova funkcija prve vrste prvog reda,

$\bar{K}_1(\bar{\gamma}_i \cdot r)$ - kompleksna modificirana Besselova funkcija druge vrste prvog reda,

\bar{C}_i, \bar{D}_i - nepoznati kompleksni koeficijenti.

Sljedeći izrazi povezuju kompleksne Besselove funkcije i kompleksne modificirane Besselove funkcije n-tog reda:

$$\bar{J}_n(\bar{k}_i \cdot r) = (-j)^n \cdot \bar{J}_n(\bar{\gamma}_i \cdot r) \quad ; \quad \bar{J}_n(\bar{\gamma}_i \cdot r) = j^n \cdot \bar{J}_n(\bar{k}_i \cdot r) \quad (17.319)$$

$$\bar{K}_n(\bar{\gamma}_i \cdot r) = (-j)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [\bar{J}_n(\bar{k}_i \cdot r) - j \cdot \bar{N}_n(\bar{k}_i \cdot r)] \quad (17.320)$$

Vrijedi da je:

$$\frac{d}{dr} [r \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_i \cdot r)] = \bar{\gamma}_i \cdot r \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_i \cdot r) \quad ; \quad \frac{d}{dr} [r \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_i \cdot r)] = -\bar{\gamma}_i \cdot r \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_i \cdot r) \quad (17.321)$$

Iz izraza (17.315), (17.318) i (17.321) dobije se da je:

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{\gamma}_i}{\kappa_i} \cdot [\bar{C}_i \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_i \cdot r) - \bar{D}_i \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_i \cdot r)] \quad (17.322)$$

Dakle, ako se koriste kompleksne Besselove funkcije, onda je raspodjela polja u i-tom sloju m-slojnog cilindričnog vodiča opisana izrazima (17.314) i (17.317), a iznimka je prvi sloj m-slojnog *punog* cilindričnog vodiča za koji vrijedi da je:

$$\bar{D}_1 = 0 \quad ; \quad \bar{H}_1 = \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r) \quad ; \quad \bar{E}_1 = \frac{\bar{k}_1}{\kappa_1} \cdot \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r) \quad (17.323)$$

jer Neumannove funkcije za $r = 0$ poprimaju beskonačnu vrijednost.

Ako se koriste kompleksne modificirane Besselove funkcije, onda je raspodjela polja u i-tom sloju m-slojnog cilindričnog vodiča opisana izrazima (17.318) i (17.322), a iznimka je prvi sloj m-slojnog *punog* cilindričnog vodiča za koji vrijedi da je:

$$\bar{D}_1 = 0 \quad ; \quad \bar{H}_1 = \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r) \quad ; \quad \bar{E}_1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\kappa_1} \cdot \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r) \quad (17.324)$$

jer modificirane Besselove funkcije druge vrste za $r = 0$ poprimaju beskonačnu vrijednost.

Nepoznati koeficijenti se određuju iz sustava jednadžbi, koji se dobije ako se u granične uvjete uvrste izrazi (17.314) i (17.317) ako se koriste kompleksne Besselove funkcije, ili pak ako se u granične uvjete uvrste izrazi (17.318) i (17.322) ako se koriste kompleksne modificirane Besselove funkcije.

Za puni m-slojni cilindrični vodič granični uvjeti glase:

$$\bar{H}_i \Big|_{r=r_i} = \bar{H}_{i+1} \Big|_{r=r_i} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (17.325)$$

$$\bar{E}_i \Big|_{r=r_i} = \bar{E}_{i+1} \Big|_{r=r_i} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (17.326)$$

$$\bar{H}_m \Big|_{r=r_m} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot r_m \cdot \pi} \quad (17.327)$$

Za puni m-slojni cilindrični vodič dobije se sustav od 2·m-1 jednažbi, a nepoznanice su:

- \bar{C}_1 ,
- \bar{C}_i, \bar{D}_i ; $i = 2, 3, \dots, m$.

Za šuplji m-slojni cilindrični vodič vrijede granični uvjeti (17.325) - (17.327) i dodatni granični uvjet:

$$\bar{H}_1 \Big|_{r=r_{un}} = 0 \quad (17.328)$$

Za šuplji m-slojni cilindrični vodič dobije se sustav od 2·m jednažbi, a nepoznanice su: \bar{C}_i, \bar{D}_i ; $i = 1, 2, \dots, m$.

Iz izraza (17.299) slijedi da je jedinična unutarnja impedancija m-slojnog cilindričnog vodiča, bio on šupalj ili pak pun, opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{1}{2 \cdot r_m \cdot \pi} \cdot \frac{\bar{E}_m \Big|_{r=r_m}}{\bar{H}_m \Big|_{r=r_m}} = \frac{\bar{E}_m \Big|_{r=r_m}}{\bar{I}} \quad (17.329)$$

gdje je r_m vanjski polumjer m-slojnog cilindričnog vodiča.

Ako se koriste kompleksne Besselove funkcije, prema izrazima (17.314), (17.317) i (17.329), jedinična unutarnja impedancija m-slojnog cilindričnog vodiča opisana je izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{k}_m}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot \kappa_m} \cdot \frac{\bar{C}_m \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_m \cdot r_m) + \bar{D}_m \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_m \cdot r_m)}{\bar{C}_m \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_m \cdot r_m) + \bar{D}_m \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_m \cdot r_m)} \quad (17.330)$$

Iz numeričkih razloga, za upotrebu su prikladnije skalirane vrijednosti koeficijenata i skalirane vrijednosti kompleksnih Besselovih funkcija pa izraz (17.330) poprima novi oblik:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{k}_m}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot \kappa_m} \cdot \frac{\bar{C}_m^s \cdot \bar{J}_0^s(\bar{k}_m \cdot r_m) + \bar{D}_m^s \cdot \bar{N}_0^s(\bar{k}_m \cdot r_m)}{\bar{C}_m^s \cdot \bar{J}_1^s(\bar{k}_m \cdot r_m) + \bar{D}_m^s \cdot \bar{N}_1^s(\bar{k}_m \cdot r_m)} \quad (17.331)$$

gdje se svi koeficijenti skaliraju istim faktorom, dok se za skaliranje kompleksnih Besselovih funkcija mogu koristiti sljedeći izrazi:

$$\bar{J}_n^s(\bar{k}_m \cdot r_m) = e^{-\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{J}_n(\bar{k}_m \cdot r_m) \quad ; \quad \bar{J}_n(\bar{k}_m \cdot r_m) = e^{\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{J}_n^s(\bar{k}_m \cdot r_m) \quad (17.332)$$

$$\bar{N}_n^s(\bar{k}_m \cdot r_m) = e^{-\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{N}_n(\bar{k}_m \cdot r_m) \quad ; \quad \bar{N}_n(\bar{k}_m \cdot r_m) = e^{\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{N}_n^s(\bar{k}_m \cdot r_m) \quad (17.333)$$

gdje je $n = 0, 1$. Parametar α_m opisan je izrazom (17.310).

Radi jasnoće, dobro je navesti da za kompleksni argument $\bar{z} = x + j \cdot y$ vrijede izrazi:

$$\bar{J}_n^s(\bar{z}) = e^{-|y|} \cdot \bar{J}_n(\bar{z}) \quad ; \quad \bar{J}_n(\bar{z}) = e^{|y|} \cdot \bar{J}_n^s(\bar{z}) \quad (17.334)$$

$$\bar{N}_n^s(\bar{z}) = e^{-|y|} \cdot \bar{N}_n(\bar{z}) \quad ; \quad \bar{N}_n(\bar{z}) = e^{|y|} \cdot \bar{N}_n^s(\bar{z}) \quad (17.335)$$

gdje je $n = 0, 1, 2, \dots$

Ako se koriste kompleksne modificirane Besselove funkcije, prema izrazima (17.318), (17.322) i (17.329), jedinična unutarnja impedancija m-slojnog cilindričnog vodiča opisana je izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}_m}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot \kappa_m} \cdot \frac{\bar{C}_m \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) - \bar{D}_m \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_m \cdot r_m)}{\bar{C}_m \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) + \bar{D}_m \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_m \cdot r_m)} \quad (17.336)$$

Ako se pojavljuju i velike vrijednosti argumenata, onda, iz numeričkih razloga, treba koristiti skalirane vrijednosti koeficijenata i skalirane vrijednosti kompleksnih modificiranih Besselovih funkcija pa izraz (17.336) poprima novi oblik:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}_m}{2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot \kappa_m} \cdot \frac{\bar{C}_m^s \cdot \bar{J}_0^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) - \bar{D}_m^s \cdot \bar{K}_0^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) \cdot e^{-2 \cdot \alpha_m \cdot r_m}}{\bar{C}_m^s \cdot \bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) + \bar{D}_m^s \cdot \bar{K}_1^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) \cdot e^{-2 \cdot \alpha_m \cdot r_m}} \quad (17.337)$$

gdje se svi koeficijenti skaliraju istim faktorom, dok se za skaliranje kompleksnih Besselovih funkcija mogu koristiti sljedeći izrazi:

$$\bar{J}_n^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) = e^{-\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{J}_n(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) \quad ; \quad \bar{J}_n(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) = e^{\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{J}_n^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) \quad (17.338)$$

$$\bar{K}_n^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) = e^{\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{K}_n(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) \quad ; \quad \bar{K}_n(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) = e^{-\alpha_m \cdot r_m} \cdot \bar{K}_n^s(\bar{\gamma}_m \cdot r_m) \quad (17.339)$$

gdje je $n = 0, 1$.

Radi jasnoće, dobro je navesti da za kompleksni argument $\bar{z} = x + j \cdot y$ vrijede izrazi:

$$\bar{J}_n^s(\bar{z}) = e^{-|x|} \cdot \bar{J}_n(\bar{z}) \quad ; \quad \bar{J}_n(\bar{z}) = e^{|x|} \cdot \bar{J}_n^s(\bar{z}) \quad (17.340)$$

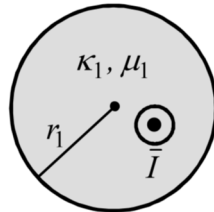
$$\bar{K}_n^s(\bar{z}) = e^x \cdot \bar{K}_n(\bar{z}) \quad ; \quad \bar{K}_n(\bar{z}) = e^{-x} \cdot \bar{K}_n^s(\bar{z}) \quad (17.341)$$

gdje je $n = 0, 1, 2, \dots$

Analitičke izraze za nepoznate koeficijente \bar{C}_m i \bar{D}_m , odnosno za nepoznate koeficijente \bar{C}_m^s i \bar{D}_m^s , ima smisla izvoditi samo za jednoslojne ($m = 1$) i dvoslojne ($m = 2$) cilindrične vodiče, dok se za $m > 2$ preporučuje numerički izračun utemeljen na rješavanju sustava linearnih jednadžbi. U nastavku će biti izvedeni analitički izrazi samo za nepoznate koeficijente jednoslojnih cilindričnih vodiča.

17.24. Unutarnja impedancija jednoslojnog punog cilindričnog LIH vodiča

Jednoslojni puni, beskonačno dugi, cilindrični LIH vodič jest poseban slučaj m-slojnog punog cilindričnog vodiča. Parametri vodiča dani su na Slici 17.8.



Slika 17.8. Jednoslojni, beskonačno dugi, puni cilindrični LIH vodič

Ako se koriste kompleksne Besselove funkcije, prema izrazima (17.323), raspodjele jakosti magnetskog polja i jakosti električnog polja opisane su izrazima:

$$\bar{H}_1 = \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r) \quad ; \quad \bar{E}_1 = \frac{\bar{k}_1}{\kappa_1} \cdot \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r) \quad (17.342)$$

pa iz izraza (17.329), za $m = 1$, slijedi da je jedinična unutarnja impedancija beskonačno dugog jednoslojnog punog cilindričnog vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1)} = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{J}_0^s(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_1)} \quad (17.343)$$

što je poseban slučaj izraza (17.330) i (17.331), gdje je $\bar{D}_1 = \bar{D}_1^s = 0$.

Ako se koriste kompleksne modificirane Besselove funkcije, prema izrazima (17.324), raspodjele jakosti magnetskog polja i jakosti električnog polja opisane su izrazima:

$$\bar{H}_1 = \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r) \quad ; \quad \bar{E}_1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\kappa_1} \cdot \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r) \quad (17.344)$$

pa iz izraza (17.329), za $m = 1$, slijedi da je jedinična unutarnja impedancija beskonačno dugog jednoslojnog cilindričnog vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{J}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} \quad (17.345)$$

što je poseban slučaj izraza (17.336) i (17.337), gdje je $\bar{D}_1 = \bar{D}_1^s = 0$.

U ovom posebnom slučaju, i za male i za velike vrijednosti argumenata, dobiju se visokotočni rezultati bez obzira da li se koriste kompleksne Besselove funkcije ili pak kompleksne modificirane Besselove funkcije.

Za vrlo velike vrijednosti argumenata, vrijedi da je:

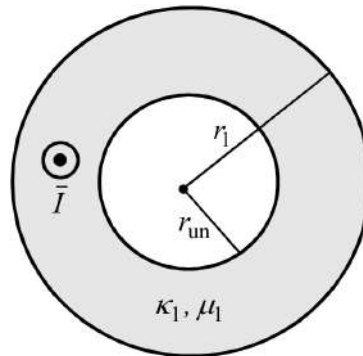
$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 \approx \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \quad (17.346)$$

jer je:

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \frac{\bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1)} = j \quad ; \quad \lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \frac{\bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} = 1 \quad ; \quad \bar{\gamma}_1 = j \cdot \bar{k}_1 \quad (17.347)$$

17.25. Unutarnja impedancija jednoslojnog šupljeg cilindričnog LIH vodiča

Jednoslojni šuplji, beskonačno dugi, cilindrični vodič jest poseban slučaj m-slojnog punog cilindričnog vodiča. Parametri vodiča dani su na Slici 17.9.



Slika 17.9. Jednoslojni, beskonačno dugi, šuplji cilindrični LIH vodič

Za male vrijednosti argumenata, odnosno za niske frekvencije, jedinična unutarnja impedancija šupljeg cilindričnog vodiča može se dovoljno točno izračunati i pomoću skaliranih ili neskaliranih kompleksnih Besselovih funkcija. Iz izraza (17.330) slijedi da je:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1 \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1 \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1)} \quad (17.348)$$

gdje su \bar{C}_1 i \bar{D}_1 nepoznati kompleksni koeficijenti.

Umjesto nepoznatih koeficijenata \bar{C}_1 i \bar{D}_1 , mogu se koristiti njihove skalirane vrijednosti, pa izraz (17.348) poprima novi oblik:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1^s \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1^s \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1)} \quad (17.349)$$

a mogu se skalirati i kompleksne Besselove funkcije, pa vrijedi da je:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_0^s(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1^s \cdot \bar{N}_0^s(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1^s \cdot \bar{N}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_1)} \quad (17.350)$$

Prema izrazima (17.314) i (17.317), raspodjele jakosti magnetskog polja i jakosti električnog polja opisane su izrazima:

$$\bar{H}_1 = \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r) + \bar{D}_1 \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r) \quad (17.351)$$

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{k}_1}{\kappa_1} \cdot [\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r) + \bar{D}_1 \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_1 \cdot r)] \quad (17.352)$$

Analitički izrazi za nepoznate koeficijente \bar{C}_1 i \bar{D}_1 mogu se dobiti iz graničnih uvjeta:

$$\bar{H}_1|_{r=r_{\text{un}}} = 0 \quad ; \quad \bar{H}_1|_{r=r_1} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot r_1 \cdot \pi} \quad (17.353)$$

Iz izraza (17.351) i (17.353), lako se dobije sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{\text{un}}) + \bar{D}_1 \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{\text{un}}) = 0 \quad (17.354)$$

$$\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1 \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \quad (17.355)$$

koji u matričnom zapisu glasi:

$$[\bar{B}] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{D}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \end{Bmatrix} \quad ; \quad [\bar{B}] = \begin{bmatrix} \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{\text{un}}) & \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{\text{un}}) \\ \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) & \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) \end{bmatrix} \quad (17.356)$$

Po Cramerovom pravilu rješenje ovog matričnog sustava linearnih jednadžbi glasi:

$$\bar{C}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{\text{un}}) \\ \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} & \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) \end{vmatrix}}{\det \bar{B}} \quad ; \quad \bar{D}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{\text{un}}) & 0 \\ \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) & \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \end{vmatrix}}{\det \bar{B}} \quad (17.357)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{C}_1 = -\frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{C}_1^s = \bar{M} \cdot \bar{C}_1^s \quad (17.358)$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{D}_1^s = \bar{M} \cdot \bar{D}_1^s \quad (17.359)$$

Koeficijenti se skaliraju tako da se izdvoji zajednički dio \bar{M} opisan izrazom:

$$\bar{M} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \quad (17.360)$$

odakle slijedi da su skalirani koeficijenti opisani izrazima:

$$\bar{C}_1^s = -\bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \quad ; \quad \bar{D}_1^s = \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \quad (17.361)$$

Iz izraza (17.349) i (17. 361), uz promjenu predznaka brojnika i nazivnika, slijedi da je jedinična unutarnja impedancija šupljeg cilindričnog vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{J}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1) - \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{N}_0(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1) - \bar{J}_1(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{N}_1(\bar{k}_1 \cdot r_1)} \quad (17.362)$$

Prema izrazima (17.332) - (17.335), kompleksne Besselove funkcije prve i druge vrste skaliraju se na sljedeći način:

$$\bar{J}_n(\bar{k}_1 \cdot r) = e^{\alpha_1 \cdot r} \cdot \bar{J}_n^s(\bar{k}_1 \cdot r) \quad ; \quad \bar{N}_n(\bar{k}_1 \cdot r) = e^{\alpha_1 \cdot r} \cdot \bar{N}_n^s(\bar{k}_1 \cdot r) \quad (17.363)$$

pa nakon njihovog skaliranja izraz (17.362) poprima konačni oblik:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{k}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{N}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{J}_0^s(\bar{k}_1 \cdot r_1) - \bar{J}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{N}_0^s(\bar{k}_1 \cdot r_1)}{\bar{N}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{J}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_1) - \bar{J}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{N}_1^s(\bar{k}_1 \cdot r_1)} \quad (17.364)$$

Međutim, i nakon skaliranja svih kompleksnih Besselovih funkcija, konačni izraz (17.364) ne daje dovoljno točne rezultate za velike vrijednosti argumenata. Tada se pojavljuju numerički problemi jer se kod izračuna dobije neodređeni oblik 0/0.

Jedinična unutarnja impedancija šupljeg cilindričnog vodiča (Slika 17.9) može se dovoljno točno izračunati pomoću kompleksnih modificiranih Besselovih funkcija. Iz izraza (17.336) slijedi da je:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) - \bar{D}_1 \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1 \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} \quad (17.365)$$

gdje su \bar{C}_1 i \bar{D}_1 nepoznati kompleksni koeficijenti.

Umjesto nepoznatih koeficijenata \bar{C}_1 i \bar{D}_1 mogu se koristiti njihove skalirane vrijednosti, pa izraz (17.365) poprima novi oblik:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) - \bar{D}_1^s \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1^s \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} \quad (17.366)$$

a mogu se skalirati i kompleksne modificirane Besselove funkcije, pa vrijedi da je:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) - \bar{D}_1^s \cdot \bar{K}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{C}_1^s \cdot \bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1^s \cdot \bar{K}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} \quad (17.367)$$

Prema izrazima (17.318) i (17.322), raspodjele jakosti magnetskog polja i jakosti električnog polja opisane su izrazima:

$$\bar{H}_1 = \bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r) + \bar{D}_1 \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r) \quad (17.368)$$

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\kappa_1} \cdot [\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r) - \bar{D}_1 \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r)] \quad (17.369)$$

Analitički izrazi za nepoznate koeficijente \bar{C}_1 i \bar{D}_1 mogu se dobiti iz graničnih uvjeta (17.353). Iz izraza (17.368) i (17.353), lako se dobije sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) + \bar{D}_1 \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) = 0 \quad (17.370)$$

$$\bar{C}_1 \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) + \bar{D}_1 \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \quad (17.371)$$

koji u matricnom zapisu glasi:

$$[\bar{B}] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{D}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \end{Bmatrix} ; \quad [\bar{B}] = \begin{bmatrix} \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) & \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \\ \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) & \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) \end{bmatrix} \quad (17.372)$$

Po Cramerovom pravilu rješenje ovog matricnog sustava linearnih jednadžbi glasi:

$$\bar{C}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \\ \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} & \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) \end{vmatrix}}{\det \bar{B}} ; \quad \bar{D}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) & 0 \\ \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) & \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \end{vmatrix}}{\det \bar{B}} \quad (17.373)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{C}_1 = -\frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{C}_1^s = \bar{M} \cdot \bar{C}_1^s \quad (17.374)$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) = \frac{\bar{I}}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \cdot \frac{1}{\det \bar{B}} \cdot \bar{D}_1^s = \bar{M} \cdot \bar{D}_1^s \quad (17.375)$$

Koeficijenti se skaliraju tako da se izdvoji zajednički dio \bar{M} opisan izrazom (17.360) pa su skalirani koeficijenti opisani izrazima:

$$\bar{C}_1^s = -\bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) ; \quad \bar{D}_1^s = \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \quad (17.376)$$

Iz izraza (17.366) i (17.376), uz promjenu predznaka brojnika i nazivnika, slijedi da je jedinična unutarnja impedancija šupljeg cilindričnog vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) + \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) - \bar{J}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{un}) \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} \quad (17.377)$$

Prema izrazima (17.338) - (17.341), kompleksne modificirane Besselove funkcije prve i druge vrste skaliraju se na sljedeći način:

$$\bar{J}_n(\bar{\gamma}_1 \cdot r) = e^{\alpha_1 \cdot r} \cdot \bar{J}_n^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r) ; \quad \bar{K}_n(\bar{\gamma}_1 \cdot r) = e^{-\alpha_1 \cdot r} \cdot \bar{K}_n^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r) \quad (17.378)$$

pa nakon njihovog skaliranja izraz (17.377) poprima konačni oblik:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{K}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{\text{un}}) \cdot \bar{J}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) + \bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{\text{un}}) \cdot \bar{K}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) \cdot e^{-2 \cdot \alpha_1 \cdot (r_1 - r_{\text{un}})}}{\bar{K}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{\text{un}}) \cdot \bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) - \bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_{\text{un}}) \cdot \bar{K}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1) \cdot e^{-2 \cdot \alpha_1 \cdot (r_1 - r_{\text{un}})}} \quad (17.379)$$

Izraz (17.379) daje visokotočne rezultate za sve vrijednosti argumenata.

Za velike vrijednosti argumenata vrijedi da je:

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} e^{-2 \cdot \alpha_1 \cdot (r_1 - r_{\text{un}})} = 0 \quad (17.380)$$

pa je za velike vrijednosti argumenata:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 \approx \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\bar{J}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} \quad (17.381)$$

što znači da se jedinična unutarnja impedancija šupljeg cilindričnog vodiča, za velike vrijednosti argumenata, može aproksimirati izrazom, koji prema izrazu (17.345), opisuje jediničnu unutarnju impedanciju punog cilindričnog vodiča. To znači da je došlo do vrlo velikog potiskivanja električne struje prema rubu vodiča.

Za vrlo velike vrijednosti argumenata, može se koristiti aproksimacija (17.346), koja glasi:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 \approx \frac{\bar{\gamma}_1}{2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \kappa_1} \quad (17.382)$$

jer je:

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \frac{\bar{J}_0^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)}{\bar{J}_1^s(\bar{\gamma}_1 \cdot r_1)} = 1 \quad (17.383)$$

17.26. Zadaci

Zadatak 17.1. Odredite maksimalnu vrijednost plošne gustoće pomažne električne struje u bakrenom vodiču poprečnog presjeka $S = 1 \text{ mm}^2$ kojim teče sinusoidalna električna struja jakosti $I = 1 \text{ A}$, frekvencije $f = 50 \text{ Hz}$. Zanimajte potiskivanje električne struje u vodiču (skin efekt). Neka su značajke materijala od kojeg je načinjen vodič: $\kappa = 58 \text{ MS/m}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Rješenje:

Ako se zanemari potiskivanje električne struje u vodiču, onda je sinusoidalna jakost električnog polja u bakrenom vodiču opisana izrazom:

$$E = E_{\text{max}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (17.384)$$

Slijedi da je plošna gustoća provodne električne struje opisana izrazom:

$$J = \kappa \cdot E = \kappa \cdot E_{\text{max}} \cdot \cos(\omega \cdot t) = J_{\text{max}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (17.385)$$

Plošna gustoće pomažne električne struje opisana je izrazom:

$$J_{\text{pom}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = -\omega \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{\text{max}} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (17.386)$$

pa je maksimalna vrijednost plošne gustoće pomažne električne struje:

$$J_{\text{pom max}} = \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot E_{\text{max}} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{\kappa} \cdot J_{\text{max}} \quad (17.387)$$

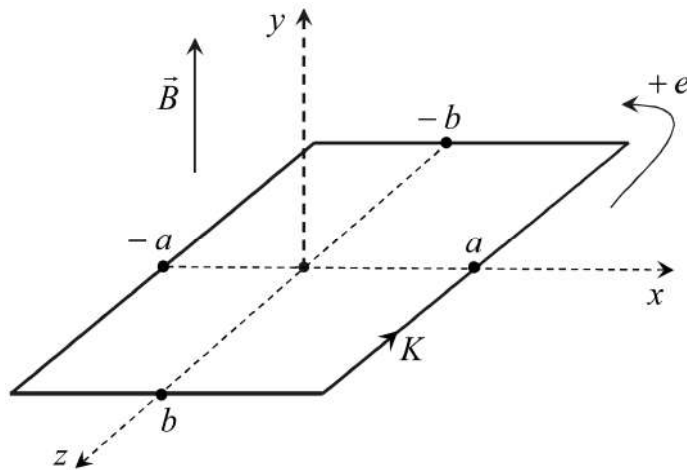
Slijedi da je omjer maksimalnih vrijednosti plošne gustoće pomaćne električne struje i plošne gustoće provodne električne struje:

$$\frac{J_{\text{pom max}}}{J_{\text{max}}} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{\kappa} = 4,7985905414 \cdot 10^{-17} \quad (17.388)$$

Uz uvedeno zanemarenje, maksimalna vrijednost plošne gustoće pomaćne električne struje je:

$$J_{\text{pom max}} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{\kappa} \cdot J_{\text{max}} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{\kappa} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot I}{S} = 6,78243448 \cdot 10^{-11} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad (17.389)$$

Zadatak 17.2. Odredite izraz za induciranu EMS u pravokutnoj petlji koja se nalazi u homogenom sinusoidalnom magnetskom polju. Neka je magnetska indukcija opisana izrazom: $\vec{B} = B_{\text{max}} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{j}$. Pretpostavite da je petlja na jednom mjestu presječena tako da kroz nju ne može poteći električna struja.



Slika 17.10. Pravokutna petlja u homogenom sinusoidalnom magnetskom polju

Rješenje:

Inducirana EMS u pravokutnoj petlji opisana je drugom Maxwelllovom integralnom jednačbom (6.73), koja glasi:

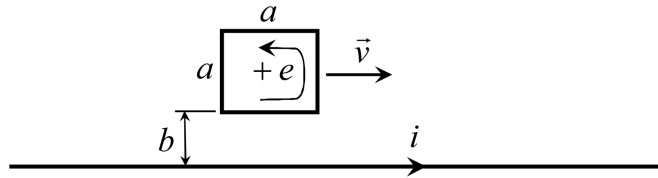
$$e = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (17.390)$$

gdje je S ploha obrubljena petljom kroz koju prolazi magnetski tok Φ .

Budući da je, u ovom slučaju, magnetsko polje homogeno, vrijedi da je:

$$e = -4 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = 4 \cdot a \cdot b \cdot \omega \cdot B_{\text{max}} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (17.391)$$

Zadatak 17.3. Neka beskonačno dugim pravocrtnim tankožičanim vodičem teče sinusoidalna električna struja $i = \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$ A. Odredite izraz za induciranu EMS u kvadratnoj petlji koja se giba brzinom $v = 1$ m/s paralelno s vodičem. Neka se petlja i vodič nalaze u zraku. Pretpostavite da je petlja na jednom mjestu presječena tako da kroz nju ne može poteći električna struja. Neka je zadano: $a = 0,2$ m, $b = 0,1$ m.



Slika 17.11. Beskonačno dugi vodič i kvadratna petlja

Rješenje:

Magnetski tok kroz kvadratnu petlju, na koji ne utječe zadano gibanje kvadratne petlje, opisan je izrazom:

$$\Psi = \Phi = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi} \cdot \int_b^{a+b} \frac{a \cdot dr}{r} = \frac{\mu_0 \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{b+a}{b} \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.392)$$

pa je inducirana EMS transformacije:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -50 \cdot \mu_0 \cdot a \cdot \ln \frac{b+a}{b} \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.393)$$

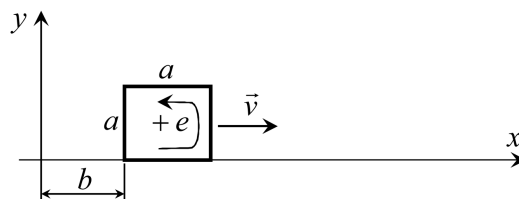
Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$e = -13,80556918 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t) \mu\text{V} \quad (17.394)$$

Inducirana EMS ne ovisi o gibanju petlje jer magnetski tok kroz kvadratnu petlju ne ovisi o brzini v .

Zadatak 17.4. Kvadratna petlja ima stranice duljine $a = 1$ m i nalazi se u (x, y) ravnini te se giba jednoliko po pravcu, u smjeru osi x , brzinom $v = 2$ m/s. Odredite izraz za induciranu EMS u kvadratnoj petlji. Pretpostavite da je petlja na jednom mjestu presječena tako da kroz nju ne može poteći električna struja. Neka je $b = 0$ u početnom trenutku $t = 0$ te neka je frekvencija sinusoidalne magnetske indukcije $f = 50$ Hz. Neka je sinusoidalna magnetska indukcija opisana izrazom:

$$\vec{B} = 0,01 \cdot \left[(x+1) \cdot \vec{i} + (y+1) \cdot \vec{j} + (x^2 - y^2) \cdot \vec{k} \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ T.}$$



Slika 17.12. Kvadratna petlja koja se giba duž osi x

Rješenje:

Magnetski tok kroz kvadratnu petlju stvara samo z -komponenta magnetske indukcije pa je magnetski tok opisan izrazom:

$$\Psi = \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_z \cdot dx \cdot dy \quad (17.395)$$

gdje je:

$$B_z = 0,01 \cdot (x^2 - y^2) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (17.396)$$

pa je:

$$\Phi = 0,01 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \int_b^{b+a} \int_0^a (x^2 - y^2) \cdot dy = 0,01 \cdot a^2 \cdot b \cdot (b+a) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (17.397)$$

Parametar b je opisan izrazom:

$$b = v \cdot t \quad (17.398)$$

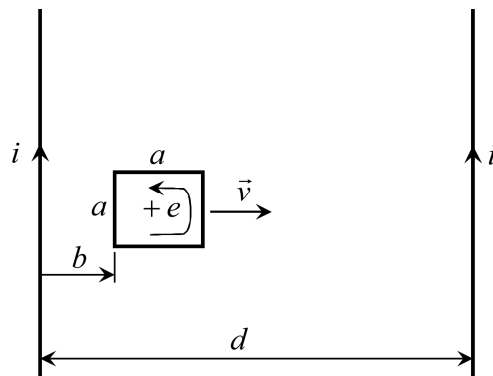
Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\Phi = 0,02 \cdot (2 \cdot t^2 + t) \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \text{ Vs} \quad (17.399)$$

Inducirana EMS opisana je izrazom:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -0,02 \cdot (4 \cdot t + 1) \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot t^2 + t) \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.400)$$

Zadatak 17.5. Kroz dva međusobno paralelna beskonačno duga pravocrtna vodiča koji se nalaze u zraku, razmaknuta za $d = 5 \cdot a$, teče sinusoidalna električna struja $i = I_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$. U ravнини u kojoj leže vodiči nalazi se kvadratna petlja koja ima stranice duljine a . Neka se kvadratna petlja giba jednoliko po pravcu brzinom v . Izračunajte induciranu EMS u kvadratnoj petlji za $b = a$, $t = 1$ s. Pretpostavite da je petlja na jednom mjestu presječena tako da kroz nju ne može poteći električna struja. Neka je zadano: $a = 0,2$ m, $f = 50$ Hz, $v = 0,2$ m/s, $I_{\max} = 10$ A.



Slika 17.13. Kvadratna petlja koja se giba između dva vodiča

Rješenje:

Neka je EMS inducirana u kvadratnoj petlji opisana izrazom:

$$e = +\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial b} = e_{\text{tr}} + e_{\text{kr}} \quad (17.401)$$

odakle slijedi da je magnetski tok opisan izrazom:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_b^{b+a} \frac{a \cdot dr}{r} - \int_{d-b-a}^{d-b} \frac{a \cdot dr}{r} \right) = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot a}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{(b+a) \cdot (d-b-a)}{b \cdot (d-b)} \quad (17.402)$$

pa je:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I_{\max} \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{(b+a) \cdot (d-b-a)}{b \cdot (d-b)} \quad (17.403)$$

Slijedi da je:

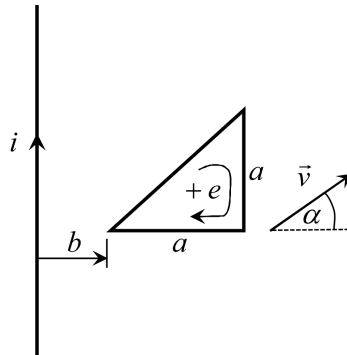
$$e_{\text{tr}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\mu_0 \cdot I_{\text{max}} \cdot a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{(b+a) \cdot (d-b-a)}{b \cdot (d-b)} \quad (17.404)$$

$$e_{\text{kr}} = v \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial b} = v \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_{\text{max}} \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{b+a} - \frac{1}{d-b-a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{d-b} \right) \quad (17.405)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je za $b = a = 0,2$ m, $t = 1$ s inducirana EMS:

$$e_{\text{tr}} = 0 \quad ; \quad e_{\text{kr}} = -0,2333333333 \mu\text{V} \quad ; \quad e = e_{\text{tr}} + e_{\text{kr}} = -0,2333333333 \mu\text{V} \quad (17.406)$$

Zadatak 17.6. Beskonačno dugim pravocrtnim vodičem teče električna struja $i = \sin(100 \cdot \pi t)$ A. Odredite izraz za inducirana EMS u trokutastoj petlji koja se giba brzinom $v = 1$ m/s. Neka je u početnom trenutku $b = b_0 = 0,2$ m te neka je $a = 0,15$ m, $\alpha = 30^\circ$. Pretpostavite da je petlja na jednom mjestu presječena tako da kroz nju ne može poteći električna struja.



Slika 17.14. Beskonačno dugi vodič i trokutasta petlja

Rješenje:

Magnetski tok kroz trokutastu petlju, na koji utječe samo gibanje petlje okomito na pravocrtni vodič, opisan je izrazom:

$$\Psi = \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi} \cdot \int_b^{b+a} \frac{1}{r} \cdot c \cdot dr \quad ; \quad c = r - b \quad (17.407)$$

odakle slijedi da je:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi} \cdot \int_b^{b+a} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi} \cdot \left(a - b \cdot \ln \frac{b+a}{b} \right) \quad (17.408)$$

Ako se u izraz (17.408) uvrsti izraz za električnu struju:

$$i = \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.409)$$

onda je magnetski tok opisan izrazom:

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \left(a - b \cdot \ln \frac{b+a}{b} \right) \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.410)$$

gdje je:

$$b = b_0 + v \cdot t \cdot \cos \alpha = 0,2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t \quad (17.411)$$

Inducirana EMS, kojoj je smjer naznačen na Slici 17.14, opisana je izrazom:

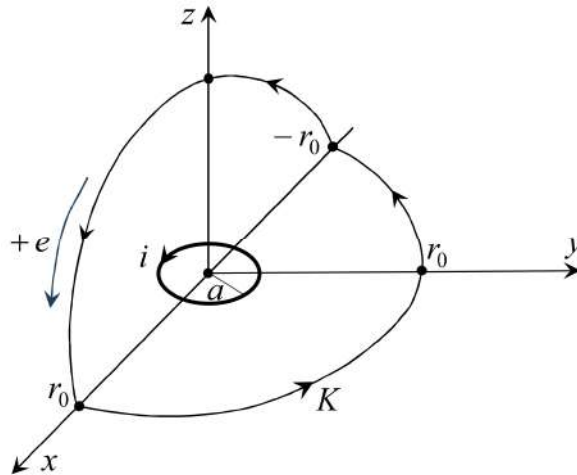
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial b} = e_{tr} + e_{kr} \quad (17.412)$$

gdje je:

$$e_{tr} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -50 \cdot \mu_0 \cdot \left(a - b \cdot \ln \frac{b+a}{b} \right) \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.413)$$

$$e_{kr} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial b} = -\frac{\sqrt{3} \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{a}{b+a} + \ln \frac{b}{b+a} \right) \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \quad (17.414)$$

Zadatak 17.7. U ravnini $z = 0$ nalazi se kružna tankožičana petlja polumjera $a = 1$ cm, kojoj je centar u ishodištu koordinatnog sustava i kojom teče sinusoidalna električna struja $i = 100 \cdot \sin(200 \cdot t)$ A. Druga se petlja nalazi na sjecištu kugline sfere polumjera $r_0 = 1$ m i koordinatnih ravnina $z = 0$ i $y = 0$. Za pozitivno odabrani smjer inducirane EMS, izvedite izraz za induciranu EMS u velikoj petlji. Pretpostavite da je mala petlja magnetski dipol. Pretpostavite da je velika petlja na jednom mjestu presječena tako da kroz nju ne može poteći električna struja.



Slika 17.15. Magnetski dipol i integracijska krivulja K

Rješenje:

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, φ) , vektorski magnetski potencijal koji stvara magnetski dipol opisan je, izrazom:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot m \cdot \sin \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_\varphi \quad ; \quad m = i \cdot a^2 \cdot \pi \quad (17.415)$$

Iz izraza:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cdot \vec{e}_\vartheta & r \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & r \cdot \sin \vartheta \cdot A \end{vmatrix} \quad (17.416)$$

slijedi da su komponente vektora magnetske indukcije opisane izrazima:

$$B_r = \frac{\mu \cdot m \cdot \cos \vartheta}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad B_\vartheta = \frac{\mu \cdot m \cdot \sin \vartheta}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \quad ; \quad B_\varphi = 0 \quad (17.417)$$

Integracijska krivulja K obrubljuje jednu četvrtinu kugline sfere, što olakšava izračun inducirane EMS. Magnetski tok kroz ovu četvrtinu kugline sfere, uslijed električne struje magnetskog dipola, opisan je izrazom:

$$\Psi = \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} B_r|_{r=r_0} \cdot r_0^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \quad (17.418)$$

odakle slijedi da je:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot m}{2 \cdot r_0} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{\mu_0 \cdot m}{4 \cdot r_0} = \frac{\mu_0 \cdot a^2 \cdot \pi}{4 \cdot r_0} \cdot i \quad (17.419)$$

Budući da je jakost električne struje magnetskog dipola opisana izrazom:

$$i = 100 \cdot \sin(200 \cdot t) \text{ A} \quad (17.420)$$

slijedi da je magnetski je tok opisan izrazom:

$$\Phi = \frac{25 \cdot \mu_0 \cdot a^2 \cdot \pi}{r_0} \cdot \sin(200 \cdot t) \quad (17.421)$$

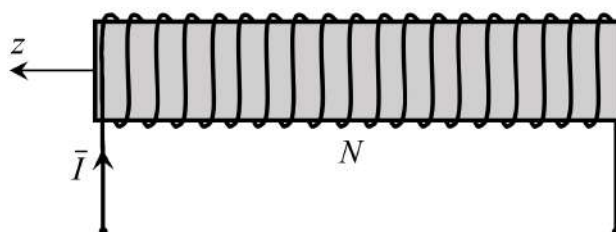
Inducirana EMS u velikoj konturi opisana je izrazom:

$$e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{5000 \cdot \mu_0 \cdot a^2 \cdot \pi}{r_0} \cdot \cos(200 \cdot t) \quad (17.422)$$

Ako se u izraz (17.422) uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$e = -1,97392088 \cdot \cos(200 \cdot t) \text{ } \mu\text{V} \quad (17.423)$$

Zadatak 17.8. Na punu cilindričnu feromagnetsku LIH jezgru polumjera r_0 , duljine ℓ , jednoliko je namotana zavojnica koja ima ukupno N zavoja. Neka zavojnicom teče sinusoidalna električna struja efektivne vrijednosti I , frekvencije f . Neka su značajke feromagnetske jezgre κ i μ . Odredite izraz za raspodjelu električnog i magnetskog polja unutar jezgre te izraz za nadomjesnu impedanciju jezgre. Zanemarite pomaćne električne struje i magnetski otpor okolnog prostora.



Slika 17.16. Ravna zavojnica namotana na punu feromagnetsku jezgru

Rješenje:

S obzirom na to da postoji osna simetrija u odnosu na os z , zadatak se rješava u cilindričnom koordinatnom sustavu (r, φ, z) . Uz zanemarenje pomaćnih električnih struja, za sinusoidalno elektromagnetsko polje u jezgri, u fazorskom području, vrijedi da je:

$$\Delta \vec{H} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad ; \quad \Delta \vec{E} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{E} \quad (17.424)$$

gdje je valna konstanta LIH feromagnetika (dobrog vodiča) opisana izrazom:

$$\bar{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta = \sqrt{\omega \cdot \mu \cdot \kappa} \cdot e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}{2}} \cdot (1 + j) \quad (17.425)$$

Budući da je zanemaren magnetski otpor okolnog sredstva, jakost električnog polja i jakost magnetskog polja imaju samo po jednu komponentu:

$$\underline{\vec{H}} = \bar{H}_z \cdot \bar{\vec{e}}_z = \bar{H} \cdot \bar{\vec{e}}_z \quad ; \quad \underline{\vec{E}} = \bar{E}_\varphi \cdot \bar{\vec{e}}_\varphi = \bar{E} \cdot \bar{\vec{e}}_\varphi \quad (17.426)$$

Jakost magnetskog polja ima samo z komponentu, a jedinični vektor z komponente ne mijenja smjer u prostoru, jer je z pravocrtna koordinatna os, pa vrijedi izraz:

$$\Delta \bar{H} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} \right) = \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{H} \quad (17.427)$$

iz kojeg se lako dobije modificirana Besselova diferencijalna jednačba:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} - \bar{\gamma}^2 \cdot r^2 \cdot \bar{H} = 0 \quad (17.428)$$

što je poseban slučaj ($n = 0$) modificirane Besselove diferencijalne jednačbe:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} - (\bar{\gamma}^2 \cdot r^2 + n^2) \cdot \bar{H} = 0 \quad (17.429)$$

Partikularno rješenje Besselove diferencijalne jednačbe (17.428) glasi:

$$\bar{H} = \bar{C} \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r) + \bar{D} \cdot \bar{K}_0(\bar{\gamma} \cdot r) \quad (17.430)$$

gdje su:

$\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r)$ - kompleksna modificirana Besselova funkcija prve vrste nultog reda,

$\bar{K}_0(\bar{\gamma} \cdot r)$ - kompleksna modificirana Besselova funkcija druge vrste nultog reda,

\bar{C} , \bar{D} - nepoznati kompleksni koeficijenti.

Budući da funkcija $\bar{K}_0(\bar{\gamma} \cdot r)$ poprima beskonačnu vrijednost za $r = 0$, u slučaju pune feromagnetske jezgre vrijedi da je kompleksni koeficijent $\bar{D} = 0$ pa je, u ovom slučaju, partikularno rješenje modificirane Besselove jednačbe (17.428) opisano izrazom:

$$\bar{H} = \bar{C} \cdot \bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r) \quad (17.431)$$

koji treba zadovoljiti granični uvjet:

$$\bar{H} \Big|_{r=r_0} = \frac{N \cdot \bar{I}}{\ell} \quad (17.432)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{C} = \frac{N \cdot \bar{I}}{\ell} \cdot \frac{1}{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r_0)} \quad ; \quad \bar{H} = \frac{N \cdot \bar{I}}{\ell} \cdot \frac{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r)}{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r_0)} \quad (17.433)$$

Sada se fazor jakosti električnog polja može odrediti iz sljedećeg izraza:

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \cdot \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{H} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} \cdot \vec{e}_\varphi \quad (17.434)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_\varphi = -\frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{N \cdot \vec{I}}{\ell} \cdot \frac{\bar{J}_1(\bar{\gamma} \cdot r)}{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r_0)} \quad (17.435)$$

jer je:

$$\frac{d}{dr} [\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r)] = \bar{\gamma} \cdot \bar{J}_1(\bar{\gamma} \cdot r) \quad (17.436)$$

Prema izrazu (17.295), kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u volumen V kroz zatvorenu plohu S opisana je izrazom:

$$\bar{S}_{p,ul} = -\bar{S}_{p,izl} = -\oint_S \vec{I} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot d\vec{S} = \bar{Z} \cdot I^2 \quad (17.437)$$

gdje je S vanjska ploha feromagnetske jezgre, dok je \bar{Z} nadomjesna impedancija feromagnetske jezgre. Ako se izrazi (17.426) uvrste u izraz (17.437), dobije se sljedeći izraz:

$$\bar{S}_{p,ul} = -\oint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n} \cdot dS = -\oint_S \vec{E} \cdot \vec{H}^* \cdot \underbrace{(\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z)}_{\vec{e}_r} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (17.438)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{S}_{p,ul} = -(\vec{E} \cdot \vec{H}^*)_{r=r_0} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \ell \quad (17.439)$$

gdje je:

$$\vec{E} \Big|_{r=r_0} = -\frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{N \cdot \vec{I}}{\ell} \cdot \frac{\bar{J}_1(\bar{\gamma} \cdot r_0)}{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r_0)} \quad ; \quad \vec{H}^* \Big|_{r=r_0} = \frac{N \cdot \vec{I}^*}{\ell} \quad (17.440)$$

Slijedi da je:

$$\bar{S}_{p,ul} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot \frac{\bar{J}_1(\bar{\gamma} \cdot r_0)}{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r_0)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \vec{I} \cdot \vec{I}^* = \bar{Z} \cdot I^2 \quad (17.441)$$

odakle slijedi da je nadomjesna impedancija feromagnetske jezgre opisana izrazom:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{N^2}{\ell} \cdot \frac{\bar{J}_1(\bar{\gamma} \cdot r_0)}{\bar{J}_0(\bar{\gamma} \cdot r_0)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0 \quad (17.442)$$

Napomena: Ako bi feromagnetska jezgra bila šuplji cilindar kojemu je vanjski polumjer r_0 i unutarnji polumjer r_{un} , onda bi raspodjela fazora jakosti magnetskog polja u feromagnetiku bila opisana izrazom (17.430). Da bi se odredio izraz za fazor jakosti električnog polja, treba koristiti i dosad nekorišteni izraz:

$$\frac{d}{dr} [\bar{K}_0(\bar{\gamma} \cdot r)] = -\bar{\gamma} \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma} \cdot r) \quad (17.443)$$

pa se dobije da je:

$$\bar{E} = \bar{E}_\varphi = - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} = - \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot [\bar{C} \cdot \bar{j}_1(\bar{\gamma} \cdot r) - \bar{D} \cdot \bar{K}_1(\bar{\gamma} \cdot r)] \quad (17.444)$$

Ako se pomačne električne struje zanemare i u feromagnetskoj jezgri i u cilindričnoj šupljini, onda je magnetsko polje u šupljini homogeno pa prema drugoj Maxwelllovoj integralnoj jednačbi, opisanoj izrazom (7.61), vrijedi granični uvjet:

$$\bar{E} \Big|_{r=r_{\text{un}}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{un}} = - j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \bar{H} \Big|_{r=r_{\text{un}}} \cdot r_{\text{un}}^2 \cdot \pi \quad (17.445)$$

dok je drugi granični uvjet opisan izrazom (17.432).

U ovom je slučaju kompleksna prividna elektromagnetska snaga opisana izrazom:

$$\bar{S}_{\text{p,ul}} = - \left(\bar{E} \cdot \bar{H}^* \right)_{r=r_0} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot \ell + \left(\bar{E} \cdot \bar{H}^* \right)_{r=r_{\text{un}}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{un}} \cdot \ell = \bar{Z} \cdot I^2 \quad (17.446)$$

18. TEORIJA ELEKTRIČNIH MREŽA I NJENA OGRANIČENJA

Teorija električnih mreža (električnih krugova) jest poseban slučaj opće teorije elektromagnetskog polja. Teorija vremenski promjenjivih električnih mreža jest pojednostavljeni prikaz zbivanja u elektromagnetskom polju. To je, ustvari, elektrokvizistatička aproksimacija dinamičkog elektromagnetskog polja.

Električna mreža se sastoji od strujnih i/ili naponskih izvora te grana i čvorova. Svaka grana električne mreže se nalazi između dva čvora.

Teorija vremenski promjenjivih električnih mreža zasnovana je na sljedećim pretpostavkama:

- jakost struje duž bilo koje grane električne mreže je ista, a za svaki čvor mreže vrijedi prvi Kirchhoffov zakon,
- za svaku zatvorenu konturu duž grana mreže vrijedi drugi Kirchhoffov zakon, što znači da je napon jednoznačan jer ne ovisi o integracijskom putu.

Važno je utvrditi kada ove pretpostavke vrijede, odnosno kada primjena teorije strujnih krugova daje zadovoljavajuće rješenje. Ograničenja su sljedeća:

- Duljina pojedine grane ograničena je uvjetom kvazistatičnosti polja. U protivnom ne vrijedi pretpostavka da je u svakom trenutku jakost električne struje duž pojedine grane ista.
- Dimenzije čvorova moraju biti takve da se u njima može nakupiti samo zanemariva količina električnog naboja. U protivnom ne vrijedi prvi Kirchhoffov zakon.
- Neophodno je da magnetsko polje koje stvaraju električne struje grana mreže izvan elemenata mreže bude zanemarivo tako da te vremenski promjenjive električne struje u konturama i granama električne mreže induciraju zanemarive elektromotorne sile u odnosu na električne napone grana. U protivnom električni naponi između čvorova mreže nisu jednoznačni.

Prema izrazima navedenim u potpoglavlju 17.5, za mirujuću zatvorenu konturu, prikazanu na Slici 18.1, koja se nalazi u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju, električni naponi duž krivulja K_1 i K_2 opisani su izrazima:

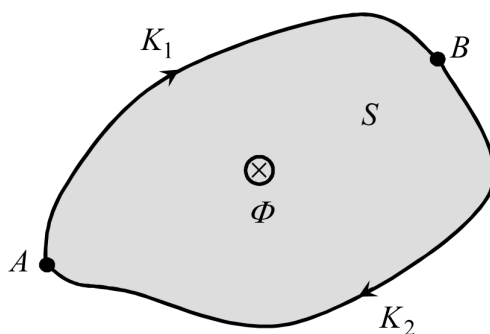
$$u_{AB}^{K_1} = \int_{K_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{K_1} \nabla \varphi \cdot d\vec{\ell} + \int_{K_1} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = \varphi_A - \varphi_B - \int_{K_1} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \quad (18.1)$$

$$u_{AB}^{K_2} = \int_{K_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{K_2} \nabla \varphi \cdot d\vec{\ell} + \int_{K_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = \varphi_B - \varphi_A - \int_{K_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \quad (18.2)$$

dok je EMS inducirana u zatvorenoj konturi opisan sljedećim izrazom:

$$e = u = u_{AB}^{K_1} + u_{AB}^{K_2} = \int_{K_1+K_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{K_1+K_2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (18.3)$$

gdje je EMS inducirana u zatvorenoj konturi e jednaka naponu induciranom u zatvorenoj konturi u .



Slika 18.1. Mirujuća zatvorena kontura između točaka A i B

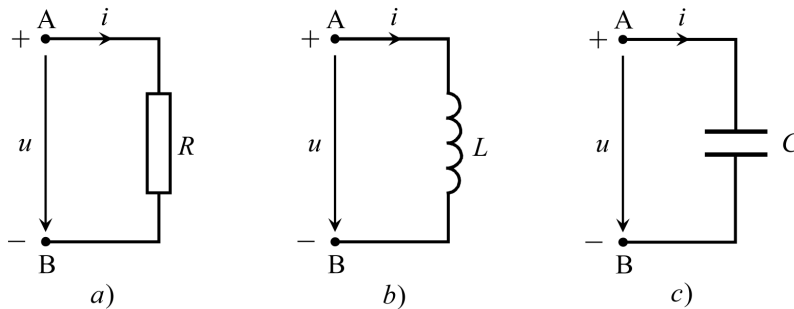
Za elektrokvizistatičku aproksimaciju dinamičkog elektromagnetskog polja vrijedi da je:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad u_{AB} = \int_K \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_K \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad \forall K \quad (18.4)$$

Osnovni parametri električnih mreža su:

- radni otpor R ,
- induktivitet L ,
- kapacitet C .

To su tzv. koncentrirani parametri i treba ih razlikovati od raspodijeljenih parametara koji se pojavljuju kod električnih vodova.



Slika 18.2. Naponi i struje osnovnih parametara električne mreže

Jakost električne struje koja teče kroz radni otpor R (Slika 18.2-a) opisana je izrazom:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{u_{AB}}{R} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} \quad (18.5)$$

gdje je:

$u = u_{AB}$ - električni napon između čvorova A i B,

φ_A, φ_B - skalarni električni potencijali čvorova A i B.

Električni napon između čvorova A i B jest tzv. uzdužni napon grane. Poprečni električni napon čvora jest napon između razmatranog čvora i referentnog čvora kojemu je skalarni električni potencijal, po pretpostavci, jednak nuli. To je ujedno i skalarni električni potencijal čvora.*

Uzdužni električni napon na savršenoj zavojnici induktiviteta L (Slika 18.2-b) opisan je izrazom:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (18.6)$$

dok je jakost pomaćne električne struje koja teče kroz savršeni kondenzator kapaciteta C (Slika 18.2-c) opisana izrazom:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad (18.7)$$

Sinusoidalne električne mreže rješavaju se na isti način kao i istosmjerne električne mreže, gdje se pod istosmjernom električnom strujom podrazumijeva vremenski konstantna električna struja. Jedina je bitna razlika da se kod sinusoidalnih električnih mreža koristi fazorska transformacija, odnosno sinusoidalne električne mreže se rješavaju u fazorskom području. Fazorskom transformacijom se

* Često se skalarni električni potencijali čvorova (poprečni naponi čvorova) nazivaju električnim naponima čvorova, a tada se uzdužni električni naponi grana električne mreže nazivaju padovima električnog napona. Dakle, uzdužni električni napon grane električne mreže jednak je padu poprečnog električnog napona između čvorova te grane.

integro-diferencijalne jednačbe iz vremenskog područja transformiraju u linearne algebarske jednačbe u fazorskom području.

U fazorskom području, jednačbe (18.5) - (18.7) mogu se iskazati kompleksnim Ohmovim zakonom, koji glasi:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{\varphi}_A - \bar{\varphi}_B}{\bar{Z}} \quad (18.8)$$

gdje je:

\bar{I} - fazor jakosti električne struje razmatrane grane između čvorova A i B,

\bar{U} - fazor (uzdužnog) električnog napona razmatrane grane,

\bar{Z} - impedancija razmatrane grane,

$\bar{\varphi}_A$ - fazor skalarnog električnog potencijala čvora A,

$\bar{\varphi}_B$ - fazor skalarnog električnog potencijala čvora B.

Iz izraza (18.5) i (18.8), lako se dobije da je impedancija radnog otpora R :

$$\bar{Z} = R \quad (18.9)$$

što znači da impedancija radnog otpora ima samo realni dio.

Iz izraza (18.6) i (18.8), lako se dobije da je impedancija induktiviteta L :

$$\bar{Z} = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L \quad ; \quad X_L = \omega \cdot L \quad (18.10)$$

gdje je:

ω - kružna frekvencija sinusoidalne električne struje,

X_L - induktivni otpor; induktivna reaktancija.

Iz izraza (18.7) i (18.8), lako se dobije da je impedancija kapaciteta C :

$$\bar{Z} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot X_C \quad ; \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (18.11)$$

gdje je X_C kapacitivni otpor ili kapacitivna reaktancija.

U sinusoidalnoj električnoj mreži vrijede Kirchhoffovi zakoni:

$$\sum_{k=1}^n \bar{I}_k = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \bar{E}_j = \sum_{k=1}^M \bar{I}_k \cdot \bar{Z}_k \quad (18.12)$$

gdje je:

\bar{I}_k - fazor jakosti električne struje k -te grane,

\bar{E}_j - fazor j -te EMS izvora u razmatranoj zatvorenoj konturi,

\bar{Z}_k - impedancija k -te grane.

Ako je serijski povezano n impedancija, onda je ukupna impedancija:

$$\bar{Z} = \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k \quad (18.13)$$

Ako je paralelno povezano n impedancija, onda je ukupna impedancija:

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_k} \quad (18.14)$$

dok za n paralelno povezanih admitancija vrijedi izraz:

$$\bar{Y} = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \quad (18.15)$$

19. RAVNI ELEKTROMAGNETSKI VAL

Ravni elektromagnetski val jest elektromagnetska pojava za koju veličine polja ovise samo o jednoj prostornoj koordinati i o vremenu.

Neka veličine polja ravnog elektromagnetskog vala ovise samo o z koordinati pravokutnog koordinatnog sustava. U tom slučaju, vektori jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravninama okomitim na koordinatnu os z ($z = \text{konst.}$), a ravni val se širi u smjeru osi z . Dakle, vrijedi da je:

$$\vec{E} = E_x(z, t) \cdot \vec{i} + E_y(z, t) \cdot \vec{j} \quad (19.1)$$

$$\vec{H} = H_x(z, t) \cdot \vec{i} + H_y(z, t) \cdot \vec{j} \quad (19.2)$$

Ravni elektromagnetski val jest transverzalni val, jer su vektori elektromagnetskog polja okomiti na smjer širenja vala.

U posebnom slučaju kada jakost električnog polja ima samo x -komponentu, a jakost magnetskog polja ima samo y -komponentu, vrijedi da je:

$$\vec{E} = E_x(z, t) \cdot \vec{i} = E(z, t) \cdot \vec{i} \quad (19.3)$$

$$\vec{H} = H_y(z, t) \cdot \vec{j} = H(z, t) \cdot \vec{j} \quad (19.4)$$

Ovakav se elektromagnetski val naziva linearno polariziranim valom i širi se u smjeru Poyntingovog vektora:

$$\vec{F} = \vec{E} \times \vec{H} = E \cdot H \cdot \vec{k} \quad (19.5)$$

Vektori \vec{E} i \vec{H} međusobno su okomiti i okomiti su na koordinatnu os z . Ako su ovi vektori i konstantni vektori u svakoj točki ravnine $z = \text{konst.}$, onda se za takvo elektromagnetsko polje kažemo da je *uniformno*. Ako je polje uniformno, onda je gustoća energije u svakoj točki ravnine $z = \text{konst.}$ konstantna.

Ravni elektromagnetski val može biti i drukčije polariziran, npr. kružno polariziran ili eliptički polariziran.

19.1. Linearno polarizirani ravni val u vodljivom LIH sredstvu

Za linearno polarizirani ravni elektromagnetski val, opisan izrazima (19.3) i (19.4), vrijedi da je:

$$\nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H}{\partial z} \cdot \vec{i} \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \vec{j} \quad (19.6)$$

Iz izraza (10.1), (10.2) i (19.6), slijedi da prve dvije Maxwellove diferencijalne jednačbe linearno polariziranog ravnog vala u mirujućem vodljivom LIH sredstvu bez nezavisnih izvora glase:

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \kappa \cdot E + \varepsilon \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = -\mu \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \quad (19.7)$$

Derivacije Maxwellovih diferencijalnih jednačbi (19.7) po z i po t glase:

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \kappa \cdot \frac{\partial E}{\partial z} + \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial t} = \kappa \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (19.8)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (19.9)$$

Iz prethodnih šest diferencijalnih jednadžbi, opisanih izrazima (19.7) - (19.9), lako se dobiju dvije diferencijalne jednadžbe, a to su prigušene valne jednadžbe ravnog elektromagnetskog vala u vodljivom LIH sredstvu bez izvora:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (19.10)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \mu \cdot \kappa \cdot \frac{\partial H}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \quad (19.11)$$

koje su, ujedno, poseban slučaj prigušenih valnih jednadžbi polja u vodljivom LIH sredstvu bez izvora, opisanih izrazima (17.267) i (17.268), uz supstitucije:

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad ; \quad \Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \quad (19.12)$$

Prigušene valne jednadžbe (19.10) i (19.11) u vremenskom se području mogu riješiti metodom separacije varijabli. Međutim, od posebnog su interesa rješenje ovih diferencijalnih jednadžbi za sinusoidalno elektromagnetsko polje. Tada se koristi fazorski zapis sinusoidalnih (vremenski harmonijskih) veličina.

Fazorskom se transformacijom valne jednadžbe prigušenog ravnog vala iz vremenskog područja transformiraju u 1D Helmholtzove homogene diferencijalne jednadžbe u fazorskom području, koje glase:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{E} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z^2} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{H} = 0 \quad (19.13)$$

što je poseban slučaj Helmholtzovih homogenih diferencijalnih jednadžbi (17.273), uz supstitucije opisane izrazima (19.12).

Valna konstanta $\bar{\gamma}$ vodljivog LIH sredstva opisana je izrazima (17.119) - (17.121).

Rješenja 1D Helmholtzovih homogenih diferencijalnih jednadžbi (19.13) glase:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{E}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad ; \quad \bar{H} = \bar{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (19.14)$$

gdje su $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{H}_1, \bar{H}_2$ nepoznate kompleksne konstante.

Iz izraza (19.7) slijedi da druga Maxwellova diferencijalna jednadžba linearno polariziranog sinusoidalnog elektromagnetskog vala u fazorskom području glasi:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \bar{H} \quad (19.15)$$

Ako se rješenja homogenih Helmholtzovih diferencijalnih jednadžbi, opisana izrazima izrazi (19.14), uvrste u izraz (19.15), dobije se da je:

$$\frac{\partial (\bar{E}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{E}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z})}{\partial z} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\bar{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z}) \quad (19.16)$$

odakle slijedi da je:

$$-\bar{\gamma} \cdot \bar{E}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{\gamma} \cdot \bar{E}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot (\bar{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z}) \quad (19.17)$$

pa je:

$$(-\bar{\gamma} \cdot \bar{E}_1 + j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \bar{H}_1) \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + (\bar{\gamma} \cdot \bar{E}_2 + j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \bar{H}_2) \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} = 0 \quad (19.18)$$

Iz izraza (19.18), slijedi da je:

$$-\bar{\gamma} \cdot \bar{E}_1 + j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \bar{H}_1 = 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \cdot \bar{E}_2 + j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \bar{H}_2 = 0 \quad (19.19)$$

odakle slijedi da je:

$$\frac{\bar{E}_1}{\bar{H}_1} = -\frac{\bar{E}_2}{\bar{H}_2} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\bar{\gamma}} = \bar{Z}_v \quad (19.20)$$

gdje je:

$$\bar{Z}_v = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\bar{\gamma}} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa + j \cdot \omega \cdot \varepsilon} \quad (19.21)$$

valna impedancija vodljivog LIH sredstva.

Valna konstanta vodljivog LIH sredstva opisana je izrazom (17.119), koji glasi:

$$\bar{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta \quad (19.22)$$

gdje je α prigušna konstanta, dok je β fazna konstanta, koje su opisane izrazima (17.120) i (17.121).

Iz izraza (19.21) i (19.22), slijedi da je:

$$\bar{Z}_v = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\alpha + j \cdot \beta} = \frac{\omega \cdot \mu}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot (\beta + j \cdot \alpha) = Z_v \cdot e^{j \cdot \varphi_v} \quad (19.23)$$

gdje je:

$$Z_v = |\bar{Z}_v| = \frac{\omega \cdot \mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad ; \quad \varphi_v = \arctg \frac{\alpha}{\beta} \quad (19.24)$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala opisana je izrazom (17.234).

Neka je:

$$\bar{E}_1 = E_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_{1E}} \quad ; \quad \bar{E}_2 = E_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_{2E}} \quad (19.25)$$

$$\bar{H}_1 = H_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_{1H}} \quad ; \quad \bar{H}_2 = H_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_{2H}} \quad (19.26)$$

Iz izraza (19.14), (19.22), (19.25) i (19.26), slijedi da je:

$$\bar{E} = E_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_{1E}} \cdot e^{-(\alpha + j \cdot \beta)z} + E_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_{2E}} \cdot e^{(\alpha + j \cdot \beta)z} \quad (19.27)$$

$$\bar{H} = H_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_{1H}} \cdot e^{-(\alpha + j \cdot \beta)z} + H_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_{2H}} \cdot e^{(\alpha + j \cdot \beta)z} \quad (19.28)$$

pa je:

$$\bar{E} = E_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot e^{-j(\beta \cdot z - \varphi_{1E})} + E_2 \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot e^{j(\beta \cdot z + \varphi_{2E})} \quad (19.29)$$

$$\bar{H} = H_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot e^{-j(\beta \cdot z - \varphi_{1H})} + H_2 \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot e^{j(\beta \cdot z + \varphi_{2H})} \quad (19.30)$$

Iz izraza (19.29) i (19.30), slijedi da su jakost električnog polja i jakost magnetskog polja u vremenskom području opisane izrazima:

$$E(z, t) = E_{\text{dir}}(z, t) + E_{\text{inv}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1E}) + \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2E}) \quad (19.31)$$

$$H(z, t) = H_{\text{dir}}(z, t) + H_{\text{inv}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot H_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1H}) + \sqrt{2} \cdot H_2 \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2H}) \quad (19.32)$$

Direktni elektromagnetski val se kreće u smjeru osi z , a inverzni elektromagnetski val u suprotnom smjeru. Svaki se od tih valova prigušuje u smjeru svog širenja.

Fazni kutovi jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja povezani su preko kuta valne impedancije sredstva. Vrijedi da je:

$$\frac{\bar{E}_1}{\bar{H}_1} = \frac{E_1}{H_1} \cdot e^{j(\varphi_{1E} - \varphi_{1H})} = Z_v \cdot e^{j\varphi_v} \quad (19.33)$$

$$\frac{\bar{E}_2}{\bar{H}_2} = \frac{E_2}{H_2} \cdot e^{j(\varphi_{2E} - \varphi_{2H})} = -Z_v \cdot e^{j\varphi_v} = Z_v \cdot e^{j(\varphi_v + \pi)} \quad (19.34)$$

odakle slijedi da je:

$$H_1 = \frac{E_1}{Z_v} \quad ; \quad \varphi_{1H} = \varphi_{1E} - \varphi_v \quad (19.35)$$

$$H_2 = \frac{E_2}{Z_v} \quad ; \quad \varphi_{2H} = \varphi_{2E} - \varphi_v - \pi \quad (19.36)$$

Iz izraza (19.31), (19.32), (19.35) i (19.36), slijedi da se jakost električnog polja i jakost magnetskog polja, u vremenskom području, mogu opisati i sljedećim izrazima:

$$E(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1E}) + \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2E}) \quad (19.37)$$

$$H(z, t) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_1}{Z_v} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1E} - \varphi_v) - \sqrt{2} \cdot \frac{E_2}{Z_v} \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2E} - \varphi_v) \quad (19.38)$$

Elektromagnetski val se prigušuje u smjeru svog širenja. Udaljenost d duž osi z za koju je $\alpha \cdot \Delta z = \alpha \cdot d = 1$ naziva se dubinom prodiranja elektromagnetskog vala, koja je opisana izrazima (17.285) - (17.287).

19.2. Linearno polarizirani ravni val u dobrom LIH vodiču

U dobrim vodičima, uz zanemarenje pomaćnih struja, vrijedi izraz (17.146) prema kojemu je:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}{2}} \quad (19.39)$$

pa je valna impedancija dobrog LIH vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_v = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\bar{\gamma}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \kappa}{\bar{\gamma} \cdot \kappa} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{\kappa}} \cdot e^{j\pi/4} \quad (19.40)$$

Iz izraza (19.37), (19.38) i (19.40), slijedi da se jakost električnog polja i jakost magnetskog polja, u vremenskom području, mogu opisati sljedećim izrazima:

$$E(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1E}) + \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2E}) \quad (19.41)$$

$$\begin{aligned}
H(z, t) = & \sqrt{2} \cdot \frac{E_1}{Z_v} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1E} - \pi/4) \\
& - \sqrt{2} \cdot \frac{E_2}{Z_v} \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2E} - \pi/4)
\end{aligned} \tag{19.42}$$

Ovdje se može govoriti i o magnetodinamičkoj aproksimaciji linearno polariziranog uniformnog ravnog vala, odnosno o difuzijskoj aproksimaciji linearno polariziranog uniformnog ravnog vala.

19.3. Linearno polarizirani ravni val u savršenom LIH dielektriku

U mirujućem savršenom LIH dielektriku vrijedi izraz (17.122) prema kojemu je:

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \tag{19.43}$$

pa je valna impedancija savršenog LIH dielektrika opisana izrazom:

$$\bar{Z}_v = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\bar{\gamma}} = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{j \cdot \beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_v \quad ; \quad \varphi_v = 0 \tag{19.44}$$

odakle slijedi da valna impedancija savršenog LIH dielektrika ima samo realni dio, pa se u tom slučaju govori i o valnom otporu savršenog LIH dielektrika.

Iz izraza (17.44), slijedi da je valna impedancija (valni otpor) vakuuma:

$$\bar{Z}_v = Z_v = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,730313668 \quad \Omega \tag{19.45}$$

Neka je $\varphi_{1E} = \varphi_{2E} = 0$. U tom je slučaju, prema izrazima (17.37) i (17.38):

$$E(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) + \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z) \tag{19.46}$$

$$H(z, t) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_1}{Z_v} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) - \sqrt{2} \cdot \frac{E_2}{Z_v} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z) \tag{19.47}$$

Slijedi da su direktna komponente jakosti magnetskog polja i direktna komponente jakosti električnog polja istofazne:

$$E_{\text{dir}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \tag{19.48}$$

$$H_{\text{dir}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_1}{Z_v} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \tag{19.49}$$

dok su inverzne komponente protufazne:

$$E_{\text{inv}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z) \tag{19.50}$$

$$H_{\text{inv}}(z, t) = -\sqrt{2} \cdot \frac{E_2}{Z_v} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z) \tag{19.51}$$

U posebnom slučaju kada je $\varphi_{1E} = \varphi_{2E} = 0$ i $E_1 = E_2$, tada se radi o tzv. stojnom valu kod kojeg su nul-točke vala nepomične. Iz izraza (19.45) i (19.46), uz supstituciju $E_1 = E_2$, slijedi da je:

$$E(z, t) = \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot [\cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) + \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z)] \tag{19.52}$$

$$H(z, t) = \sqrt{2} \cdot \frac{E_1}{Z_v} \cdot [\cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) - \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z)] \tag{19.53}$$

odakle slijedi da je:

$$E(z, t) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_1 \cdot \cos(\beta \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (19.54)$$

$$H(z, t) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{E_1}{Z_v} \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (19.55)$$

Na razmaku od jedne valne duljine (λ) prostorna faza se promijeni za $2 \cdot \pi$ pa vrijedi da je:

$$\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi \quad ; \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad (19.56)$$

gdje je v brzina vala, dok je f frekvencija vala.

Slijedi da je za $f = 50$ Hz u zraku valna duljina $\lambda = 6000$ km = 6 Mm.

Direktni i inverzni val nose sa sobom energiju koja se opisuje Poyntingovim vektorom:

$$\vec{\Gamma}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* = \vec{E}_1 \cdot \vec{H}_1^* \cdot \vec{k} \quad (19.57)$$

$$\vec{\Gamma}_2 = \vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* = \vec{E}_2 \cdot \vec{H}_2^* \cdot (-\vec{k}) \quad (19.58)$$

Iz izraza (12.30), slijedi da je srednja vrijednost plošne gustoće snage direktnog vala, odnosno plošna gustoća radne snage direktnog vala opisana izrazom:

$$P_1 = \Gamma_{1sr} = \text{Re}(\vec{E}_1 \cdot \vec{H}_1^*) \quad (19.59)$$

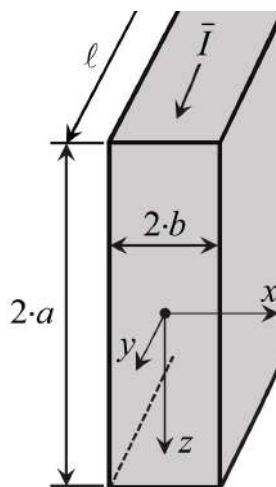
dok je plošna gustoća radne snage inverznog vala:

$$P_2 = \Gamma_{2sr} = \text{Re}(\vec{E}_2 \cdot \vec{H}_2^*) \quad (19.60)$$

U zraku se energija sadržana u direktnom i inverznom valu prenosi brzinom svjetlosti.

19.4. Zadaci

Zadatak 19.1. Pomoću kompleksnog Poyntingovog teorema, izračunajte unutarnju impedanciju, radni otpor i unutarnji induktivitet po jedinici duljine pravokutnog bakrenog vodiča kojim teče sinusoidalna električna struja, uz pretpostavku da je: $\ell \gg a \gg b$. Neka je zadano: $a = 1$ cm, $b = 0,05$ cm, $\kappa = 56$ MS/m, $\mu = \mu_0$, $\omega = 10^5$ rad/s. Zanemarite pomaćne električne struje.



Slika 19.1. Pravokutni bakreni vodič

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. Fazori vektora jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravnini (y, z) i ovise samo o varijabli x . Vrijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_y \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_z \cdot \vec{k} = \vec{H} \cdot \vec{k} \quad (19.61)$$

Fazor jakosti magnetskog polja i fazor jakosti električnog polja opisani su 1D Helmholtzovim homogenim diferencijalnim jednažbama:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad (19.62)$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \vec{E} \quad (19.63)$$

gdje je $\bar{\gamma}$ valna konstanta dobrog vodiča, koja je opisana izrazom:

$$\bar{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta = (1 + j) \cdot \alpha \quad ; \quad \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}{2}} \quad (19.64)$$

Partikularno rješenje Helmholtzove diferencijalne jednažbe (19.62) glasi:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} + \vec{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} \quad (19.65)$$

gdje su \vec{H}_1 i \vec{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete.

Budući da je:

$$\vec{H} \Big|_{x=0} = 0 \quad (19.66)$$

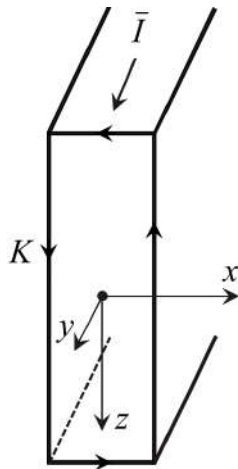
slijedi da je:

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_2 = 0 \quad ; \quad \vec{H}_2 = -\vec{H}_1 \quad (19.67)$$

pa je:

$$\vec{H} = \vec{H}_2 \cdot (e^{\bar{\gamma} \cdot x} - e^{-\bar{\gamma} \cdot x}) = 2 \cdot \vec{H}_2 \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot x) \quad (19.68)$$

Preostala kompleksna konstanta \vec{H}_2 može se, prema Slici 19.2, odrediti pomoću Ampèreovog zakona.



Slika 19.2. Integracijska krivulja K

Prema Slici 19.2, vrijedi da je:

$$\oint_K \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{\ell} = \oint_K \overline{H}_z \cdot dz = \oint_K \overline{H} \cdot dz = \bar{I} \quad (19.69)$$

odakle slijedi da je:

$$\int_a^{-a} \overline{H} \Big|_{x=b} \cdot dz + 0 + \int_{-a}^a \overline{H} \Big|_{x=-b} \cdot dz + 0 = \bar{I} \quad (19.70)$$

Ako se izraz (19.68) uvrsti u izraz (19.70), dobije se da je:

$$-2 \cdot a \cdot 2 \cdot \overline{H}_2 \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot b) + 2 \cdot a \cdot 2 \cdot \overline{H}_2 \cdot \text{sh}(-\bar{\gamma} \cdot b) = \bar{I} \quad (19.71)$$

odakle slijedi da je:

$$\overline{H}_2 = -\frac{\bar{I}}{8 \cdot a \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot b)} \quad ; \quad \overline{H} = -\frac{\bar{I}}{4 \cdot a} \cdot \frac{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot b)} \quad (19.72)$$

Fazor vektora jakosti električnog polja može se odrediti iz prve Maxwellove diferencijalne jednadžbe, koja u ovom slučaju glasi:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{H} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \overline{H}}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (19.73)$$

odakle slijedi da je:

$$\underline{\vec{E}} = \overline{E}_y \cdot \vec{j} = \overline{E} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \overline{H}}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (19.74)$$

pa je:

$$\overline{E} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{\bar{I}}{4 \cdot a} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot b)} = \overline{Z}_v \cdot \frac{\bar{I}}{4 \cdot a} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot b)} \quad (19.75)$$

gdje je:

$$\overline{Z}_v = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \quad (19.76)$$

valna impedancija bakrenog vodiča, uz zanemarenje pomačnih električnih struja.

U ovom slučaju, fazor Poyntingovog vektora opisan je izrazom:

$$\underline{\vec{T}} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* = \overline{E} \cdot \overline{H}^* \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \overline{E} \cdot \overline{H}^* \cdot \vec{i} \quad (19.77)$$

dok je kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u jedinicu duljine vodiča opisana izrazom:

$$\overline{S}_{p,ul} = P + j \cdot Q = I^2 \cdot \overline{Z}_{un}^1 = -\oint_S \underline{\vec{T}} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \overline{E} \cdot \vec{i} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (19.78)$$

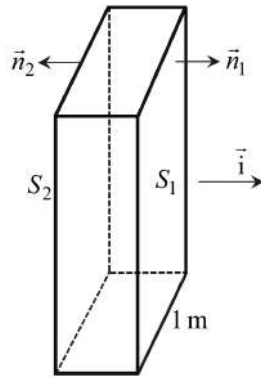
koji se svodi na integraciju po dvije plohe koje su okomite na x os (Slika 19.3):

$$\overline{S}_{p,ul} = - \left(\int_{S_1} \overline{E} \cdot \overline{H}^* \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} \cdot dS + \int_{S_2} \overline{E} \cdot \overline{H}^* \cdot \vec{i} \cdot (-\vec{i}) \cdot dS \right) \quad (19.79)$$

odakle slijedi da je:

$$\overline{S}_{p,ul} = - \int_{S_1} \overline{E} \cdot \overline{H}^* \cdot dS + \int_{S_2} \overline{E} \cdot \overline{H}^* \cdot dS \quad (19.80)$$

$$\overline{S}_{p,ul} = - \left(\overline{E} \cdot \overline{H}^* \right)_{x=b} \cdot 2 \cdot a + \left(\overline{E} \cdot \overline{H}^* \right)_{x=-b} \cdot 2 \cdot a \quad (19.81)$$



Slika 19.3. Integracijske plohe

Ako se izrazi (19.72) i (19.75) uvrste u izraz (19.81), dobije se sljedeći izraz:

$$\bar{S}_{p,ul} = \bar{Z}_v \cdot \frac{\bar{I} \cdot \bar{I}^*}{4 \cdot a} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot b)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot b)} = \bar{Z}_v \cdot \frac{I^2}{4 \cdot a} \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot b) = I^2 \cdot \bar{Z}_{un}^1 \quad (19.82)$$

odakle slijedi da je jedinična unutarnja impedancija vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{1}{4 \cdot a} \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot b) = \frac{\bar{Z}_v}{4 \cdot a} \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot b) \quad (19.83)$$

Za vodič vrijedi da je:

$$\bar{Z}_{un}^1 = R + j \cdot \omega \cdot L_{un} = R + j \cdot X_{Lun} \quad (19.84)$$

gdje je:

R - jedinični radni otpor vodiča; radni otpor po jedinici duljine vodiča,

L_{un} - jedinični unutarnji induktivitet vodiča,

X_{Lun} - jedinična unutarnja induktivna reaktancija.

Za $\bar{\gamma} = (1 + j) \cdot \alpha$, vrijedi sljedeći izraz:

$$\text{cth}(\bar{\gamma} \cdot x) = \frac{\text{sh}(2 \cdot \alpha \cdot x) - j \cdot \sin(2 \cdot \alpha \cdot x)}{\text{ch}(2 \cdot \alpha \cdot x) - \cos(2 \cdot \alpha \cdot x)} \quad (19.85)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \kappa}{2}} = 1875,78884 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad 2 \cdot \alpha \cdot b = 1,87578884 \quad (19.86)$$

$$\text{cth}(\bar{\gamma} \cdot b) = 0,9137847048 \angle -16,66524733^\circ \quad (19.87)$$

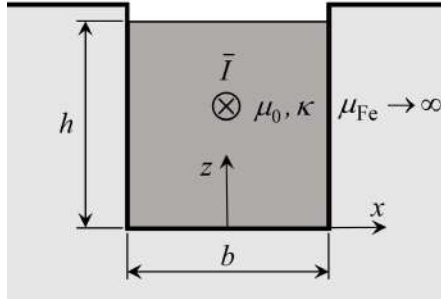
$$\bar{Z}_v = 4,737082174 \cdot 10^{-5} \angle 45^\circ \Omega \quad (19.88)$$

$$\bar{Z}_{un}^1 = 1,082168309 \cdot 10^{-3} \angle 28,33475267^\circ \Omega/\text{m} \quad (19.89)$$

$$R = 9,525133293 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m} \quad ; \quad X_{Lun} = 5,136210755 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m} \quad (19.90)$$

$$L_{un} = \frac{1}{\omega} \cdot X_{Lun} = 5,136210755 \cdot 10^{-9} \text{ H}/\text{m} \quad (19.91)$$

Zadatak 19.2. Pomoću kompleksnog Poyntingovog teorema, izračunajte unutarnju impedanciju, radni otpor i unutarnji induktivitet po jedinici duljine pravokutnog bakrenog vodiča. Neka se vodič nalazi u utoru i neka njime teče sinusoidalna električna struja frekvencije $f = 50$ Hz. Pretpostavite da je permeabilnost željeza beskonačna, da su sve silnice u bakrenom vodiču paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u bakrenom vodiču duž silnice konstantna. Neka je zadano: $h = 2$ cm, $b = 8$ mm, $\kappa = 57$ MS/m. Zanemarite pomaćne električne struje.



Slika 19.4. Pravokutni bakreni vodič u utoru

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. Fazori vektora jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravnini (x, y) i ovise samo o varijabli z . Vrijedi da je:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_y \cdot \vec{j} = \underline{E} \cdot \vec{j} \quad ; \quad \underline{\vec{H}} = \underline{H}_x \cdot \vec{i} = \underline{H} \cdot \vec{i} \quad (19.92)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom diferencijalnom jednadžbom:

$$\Delta \underline{H} = \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \underline{H} \quad (19.93)$$

čije partikularno rješenje glasi:

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \underline{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (19.94)$$

gdje su \underline{H}_1 i \underline{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete:

$$\underline{H} \Big|_{z=0} = 0 \quad ; \quad \underline{H} \Big|_{z=h} = \frac{\underline{I}}{b} \quad (19.95)$$

odakle slijedi da je:

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{b} \cdot \frac{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot z)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad (19.96)$$

Fazor vektora jakosti električnog polja može se odrediti iz prve Maxwelllove diferencijalne jednadžbe, koja u ovom slučaju glasi:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{1}{\kappa} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{H} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial z} \cdot \vec{j} \quad (19.97)$$

odakle slijedi da je:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_y \cdot \vec{j} = \underline{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial z} \cdot \vec{j} \quad (19.98)$$

pa je:

$$\bar{E} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot z)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} = \bar{Z}_v \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot z)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad (19.99)$$

gdje je \bar{Z}_v valna impedancija bakrenog vodiča, koja je opisana izrazom (19.76).

U ovom slučaju, fazor Poyntingovog vektora opisan je izrazom:

$$\vec{r} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \bar{E} \cdot \bar{H}^* \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) = \bar{E} \cdot \bar{H}^* \cdot (-\vec{k}) \quad (19.100)$$

dok je kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u jedinicu duljine vodiča opisana izrazom:

$$\bar{S}_{p,ul} = P + j \cdot Q = I^2 \cdot \bar{Z}_{un}^1 = - \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \oint_S \bar{E} \cdot \vec{k} \cdot \bar{n} \cdot dS \quad (19.101)$$

koji se svodi na integraciju po dijelu plohe $z = h$ koji pripada jedinici duljine vodiča:

$$\bar{S}_{p,ul} = \int_{S_z} (\bar{E} \cdot \bar{H}^*)_{z=h} (\vec{k} \cdot \vec{k}) \cdot dS = (\bar{E} \cdot \bar{H}^*)_{z=h} \cdot b \quad (19.102)$$

Ako se izrazi (19.96) i (19.99) uvrste u izraz (19.102), dobije se sljedeći izraz:

$$\bar{S}_{p,ul} = \bar{Z}_v \cdot \frac{\bar{I} \cdot \bar{I}^*}{b} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot h)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} = \bar{Z}_v \cdot \frac{I^2}{b} \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) = I^2 \cdot \bar{Z}_{un}^1 \quad (19.103)$$

odakle slijedi da je jedinična unutarnja impedancija vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = R + j \cdot \omega \cdot L_{un} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{1}{b} \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) = \frac{\bar{Z}_v}{b} \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) \quad (19.104)$$

Za $\bar{\gamma} = (1 + j) \cdot \alpha$ vrijedi sljedeći izraz:

$$\text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) = \frac{\text{sh}(2 \cdot \alpha \cdot h) - j \cdot \sin(2 \cdot \alpha \cdot h)}{\text{ch}(2 \cdot \alpha \cdot h) - \cos(2 \cdot \alpha \cdot h)} \quad (19.105)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} ; 2 \cdot \alpha \cdot h = 4,242895053 \quad (19.106)$$

$$\text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) = 0,9870867411 \angle 1,468072449^\circ \quad (19.107)$$

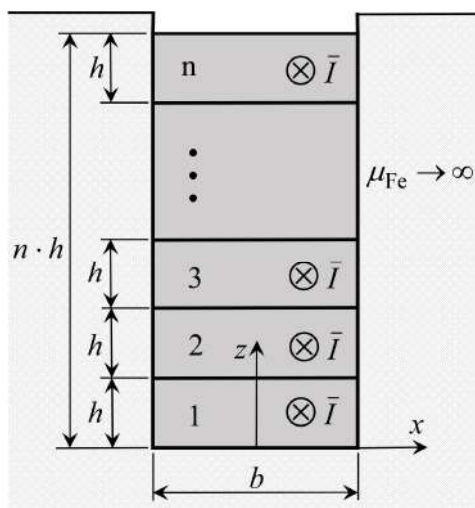
$$\bar{Z}_v = 2,631736722 \cdot 10^{-6} \angle 45^\circ \Omega \quad (19.108)$$

$$\bar{Z}_{un}^1 = 3,247190531 \cdot 10^{-4} \angle 46,46807245^\circ \Omega/\text{m} \quad (19.109)$$

$$R = 2,236530654 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m} ; X_{Lun} = 2,354182868 \cdot 10^{-8} \Omega/\text{m} \quad (19.110)$$

$$L_{un} = \frac{1}{\omega} \cdot X_{Lun} = 7,493596808 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad (19.111)$$

Zadatak 19.3. Neka se u utoru električnog stroja, okruženom beskonačno permeabilnim sredstvom, nalazi ukupno n jednakih dionih pravokutnih dobrih LIH vodiča istih značajki (μ , κ). Neka su dioni vodiči povezani tako da kroz njih teče sinusoidalna električna struja iste efektivne vrijednosti. Pomoću kompleksnog Poyntingovog teorema, odredite faktor porasta radnog otpora i faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta uslijed potiskivanja električne struje (skin efekta) za pojedini dioni vodič. Pretpostavite da su sve silnice u dionim vodičima paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u dionim vodičima duž silnice konstantna. Zanimarite pomaćne električne struje.



Slika 19.5. Pravokutni dioni vodiči u utoru

Rješenje:

Jedinični radni otpor i -tog dionog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan je izrazom:

$$R_i^{\text{DC}} = \frac{1}{\kappa \cdot b \cdot h} \quad (19.112)$$

gdje je b širina utora, dok je h visina dionog vodiča. Budući da su svi dioni vodiči istih dimenzija i načinjeni su od istog materijala, jedinični radni otpor svakog pojedinog dionog vodiča je isti.

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se raspodjela jakosti magnetskog polja u svim dionim vodičima protjecanim vremenski konstantnom električnom strujom može opisati istim izrazom, koji glasi:

$$H_{\text{DC}} = \frac{I \cdot z}{b \cdot h} \quad (19.113)$$

gdje je I jakost vremenski konstantne električne struje.

Slijedi da je magnetska energija pohranjena u magnetostatičkom polju, po jedinici duljine i -tog dionog vodiča, opisana sljedećim izrazom:

$$W_{\text{m},i}^{\text{DC}} = \frac{\mu}{2} \cdot \int_{(i-1)h}^{i \cdot h} H_{\text{DC}}^2 \cdot b \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot L_{\text{un},i}^{\text{DC}} \cdot I^2 \quad (19.114)$$

odakle slijedi da je jedinični unutarnji induktivitet i -tog dionog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan izrazom:

$$L_{\text{un},i}^{\text{DC}} = \frac{\mu \cdot h}{3 \cdot b} \cdot [3 \cdot i \cdot (i-1) + 1] \quad (19.115)$$

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se kod sinusoidalne električne struje, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. Fazori vektora jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravnini (x, y) i ovise samo o varijabli z . Vrijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_y \cdot \vec{j} = E \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_x \cdot \vec{i} = H \cdot \vec{i} \quad (19.116)$$

Fazor jakosti magnetskog polja u dionim vodičima opisan je 1D Helmholtzovom diferencijalnom jednačinom:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \gamma^2 \cdot \vec{H} \quad (19.117)$$

čije partikularno rješenje u i -tom dionom vodiču glasi:

$$\bar{H} = \bar{A}_i \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{B}_i \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} ; \quad (i-1) \cdot h \leq z \leq i \cdot h \quad (19.118)$$

gdje su \bar{A}_i i \bar{B}_i nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti sljedeće granične uvjete:

$$\bar{H} \Big|_{z=(i-1)h} = \frac{(i-1) \cdot \bar{I}}{b} ; \quad \bar{H} \Big|_{z=i \cdot h} = \frac{i \cdot \bar{I}}{b} \quad (19.119)$$

odakle se dobije da je:

$$\bar{H} = \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{i \cdot \text{sh}[\bar{\gamma} \cdot z - \bar{\gamma}(i-1) \cdot h] - (i-1) \cdot \text{sh}[\bar{\gamma} \cdot z - \bar{\gamma} \cdot i \cdot h]}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad (19.120)$$

Iz izraza (19.97), slijedi da je fazor jakosti električnog polja u i-tom dionom vodiču opisan izrazom:

$$\bar{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{i \cdot \text{ch}[\bar{\gamma} \cdot z - \bar{\gamma}(i-1) \cdot h] - (i-1) \cdot \text{ch}[\bar{\gamma} \cdot z - \bar{\gamma} \cdot i \cdot h]}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad (19.121)$$

Ako se za jedinicu duljine i-tog dionog vodič primijeni kompleksni Poyntingov teorem:

$$I^2 \cdot \bar{Z}_{\text{un},i}^1 = - \oint_S \bar{\underline{I}} \cdot d\bar{\underline{S}} = - \oint_S \bar{\underline{I}} \cdot \bar{\underline{n}} \cdot dS = \oint_S \bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{H}}^* \cdot \bar{\underline{k}} \cdot \bar{\underline{n}} \cdot dS \quad (19.122)$$

dobije se da je:

$$I^2 \cdot \bar{Z}_{\text{un},i}^1 = b \cdot (\bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{H}}^*)_{z=i \cdot h} - b \cdot (\bar{\underline{E}} \cdot \bar{\underline{H}}^*)_{z=(i-1)h} \quad (19.123)$$

odakle slijedi da je jedinična unutarnja impedancija i-tog dionog vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{\text{un},i}^1 = R_i + j \cdot \omega \cdot L_{\text{un},i} = \frac{\bar{\gamma}}{b \cdot \kappa} \cdot \left[(i^2 + (i-1)^2) \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) - \frac{2 \cdot i \cdot (i-1)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \right] \quad (19.124)$$

Budući da je:

$$i^2 + (i-1)^2 = 2 \cdot i \cdot (i-1) + 1 \quad (19.125)$$

izraz (19.124) može se napisati u sljedećem obliku:

$$\bar{Z}_{\text{un},i}^1 = \frac{\bar{\gamma}}{b \cdot \kappa} \cdot \left[\text{cth}(\bar{\gamma} \cdot h) + 2 \cdot i \cdot (i-1) \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot h) - 1}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \right] \quad (19.126)$$

Ako se u izraz (19.126) uvrsti supstitucija:

$$\bar{\gamma} \cdot h = (1+j) \cdot \alpha \cdot h = (1+j) \cdot \xi ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.127)$$

onda se dobije sljedeći izraz:

$$\bar{Z}_{\text{un},i}^1 = \frac{(1+j) \cdot \xi}{b \cdot \kappa \cdot h} \cdot \left[\frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - j \cdot \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} + 2 \cdot i \cdot (i-1) \cdot \frac{\text{sh}(\xi) + j \cdot \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \right] \quad (19.128)$$

Iz izraza (19.128) slijedi da je jedinični radni otpor i-tog dionog vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom opisan sljedećim izrazom:

$$R_i = \frac{\xi}{b \cdot \kappa \cdot h} \cdot \left[\frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} + 2 \cdot i \cdot (i-1) \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \right] \quad (19.129)$$

te da je jedinični unutarnji induktivitet i-tog dionog vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom opisan izrazom:

$$L_{un,i} = \frac{\xi}{b \cdot \kappa \cdot h \cdot \omega} \cdot \left[\frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} + 2 \cdot i \cdot (i-1) \cdot \frac{\text{sh}(\xi) + \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \right] \quad (19.130)$$

Budući da je:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \kappa}{2}} \quad ; \quad \frac{\xi}{\kappa \cdot h \cdot \omega} = \frac{\alpha}{\kappa \cdot \omega} = \frac{\alpha^2}{\kappa \cdot \omega \cdot \alpha} = \frac{\mu}{2 \cdot \alpha} = \frac{\mu \cdot h}{2 \cdot \xi} \quad (19.131)$$

slijedi da je:

$$L_{un,i} = \frac{\mu \cdot h}{b \cdot 2 \cdot \xi} \cdot \left[\frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} + 2 \cdot i \cdot (i-1) \cdot \frac{\text{sh}(\xi) + \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \right] \quad (19.132)$$

Ako se u pravokutnom utoru nalazi n jednakih dionih vodiča visine h (Slika 19.5), kojima teče ista sinusoidalna električna struja, onda potiskivanje električne struje raste od najdonjeg dionog vodiča (vodiča 1) prema najgornjem dionom vodiču (vodiču n).

Faktor porasta radnog otpora i -tog dionog vodiča uslijed skin efekta definiran je sljedećim izrazom

$$k_{Ri} = \frac{R_i}{R_i^{DC}} \quad (19.133)$$

dok je faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta i -tog dionog vodiča definiran izrazom:

$$k_{Li} = \frac{L_{un,i}}{L_{un,i}^{DC}} \quad (19.134)$$

Ako se izrazi (19.112) i (19.129) uvrste u izraz (19.133), dobije se da je faktor porasta radnog otpora (ujedno i faktor porasta snage gubitaka) uslijed skin efekta u i -tom dionom vodiču opisan izrazom:

$$k_{Ri} = \varphi_R(\xi) + i \cdot (i-1) \cdot \Psi_R(\xi) \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.135)$$

gdje je:

$$\varphi_R(\xi) = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad (19.136)$$

$$\Psi_R(\xi) = 2 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.137)$$

Ako se izrazi (19.115) i (19.130) uvrste u izraz (19.134), dobije se da je faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta uslijed skin efekta u i -tom dionom vodiču opisan izrazom:

$$k_{Li} = \frac{3}{3 \cdot i \cdot (i-1) + 1} \cdot [\varphi_L(\xi) + i \cdot (i-1) \cdot \Psi_L(\xi)] \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.138)$$

gdje je:

$$\varphi_L(\xi) = \frac{1}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad (19.139)$$

$$\Psi_L(\xi) = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\text{sh}(\xi) + \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.140)$$

Na vrlo visokim frekvencijama mogu se koristiti sljedeće aproksimacije:

$$k_{Ri} \approx [2 \cdot i \cdot (i-1) + 1] \cdot \xi \quad ; \quad k_{Li} \approx \frac{3 \cdot [2 \cdot i \cdot (i-1) + 1]}{2 \cdot \xi \cdot [3 \cdot i \cdot (i-1) + 1]} \quad (19.141)$$

Zadatak 19.4. Izračunajte unutarnju impedanciju, radni otpor i unutarnji induktivitet po jedinici duljine pravokutnog bakrenog vodiča. Neka se vodič nalazi u utoru i neka njime teče sinusoidalna električna struja frekvencije $f = 50$ Hz. Pretpostavite da je permeabilnost željeza beskonačna, da su sve silnice u bakrenom vodiču paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u bakrenom vodiču duž silnice konstantna. Neka je zadano: $h = 2$ cm, $b = 8$ mm, $\kappa = 57$ MS/m. Zanimajte pomaćne električne struje. Zadatak riješite koristeći analitičke izraze za porast radnog otpora i smanjenje unutarnjeg induktiviteta vodiča u utoru. Vodič je prikazan na Slici 19.4.

Rješenje:

Ovaj je zadatak jednak zadatku 19.2, ali ga treba riješiti na drugi način. U slučaju samo jednog dionog vodiča u utoru ($i = 1$), prema izrazima (19.135) i (19.136), faktor porasta radnog otpora u vodiču uslijed skin efekta opisan je izrazom:

$$k_R = k_{R1} = \varphi_R(\xi) = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.142)$$

dok je, prema izrazima (19.138) i (19.139), faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta uslijed skin efekta u vodiču opisan izrazom:

$$k_L = k_{L1} = 3 \cdot \varphi_L(\xi) = \frac{3}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.143)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h = 2,121447527 \quad (19.144)$$

$$k_R = 2,039715957 \quad ; \quad k_L = 0,7155857841 \quad (19.145)$$

Prema izrazu (19.112), jedinični radni otpor vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan je izrazom:

$$R_{DC} = R_1^{DC} = \frac{1}{\kappa \cdot b \cdot h} = 1,096491228 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.146)$$

dok je, prema izrazu (19.112), jedinični unutarnji induktivitet zadanog bakrenog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan izrazom:

$$L_{un}^{DC} = L_{un,1}^{DC} = \frac{\mu_0 \cdot h}{3 \cdot b} = 1,047197551 \cdot 10^{-6} \text{ H/m} \quad (19.147)$$

Slijedi da je jedinični radni otpor vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$R = k_R \cdot R_{DC} = 2,236530654 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.148)$$

dok je jedinični unutarnji induktivitet vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$L_{un} = k_L \cdot L_{un}^{DC} = 7,493596808 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad (19.149)$$

pa je jedinični induktivni otpor vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$X_{Lun} = \omega \cdot L_{un} = 2,354182868 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.150)$$

Konačno je jedinična unutarnja impedancija vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = R + j \cdot X_{Lun} = 3,247190531 \cdot 10^{-4} \angle 46,46807245^\circ \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.151)$$

Zadatak 19.5. Izračunajte unutarnju impedanciju, radni otpor i unutarnji induktivitet po jedinici duljine pravokutnog bakrenog vodiča kojim teče sinusoidalna električna struja, uz pretpostavku da je: $\ell \gg a \gg b$. Neka je zadano: $a = 1$ cm, $b = 0,05$ cm, $\kappa = 56$ MS/m, $\mu = \mu_0$, $\omega = 10^5$ rad/s. Zanimajte pomaćne električne struje. Zadatak riješite koristeći analitičke izraze za porast radnog otpora i smanjenje unutarnjeg induktiviteta dionih vodiča u utoru. Vodič je prikazan na Slici 19.1.

Rješenje:

Ovaj je zadatak jednak zadatku 19.1, ali ga treba riješiti na drugi način. Zadani vodič se može promatrati kao poseban slučaj pravokutnog vodiča u utoru električnog stroja jer se svaka od polovica vodiča ponaša kao vodič u utoru (Slika 19.4). Pritom je širina utora $2 \cdot a$, dok je visina razmatrane polovice stvarnog vodiča u utoru b . Naime, na sredini ovog vodiča kao i na dnu utora jakost magnetskog polja jednaka je nuli. Dakle, polovica ovog vodiča razmatra se kao vodič u utoru, dok je faktor porasta radnog otpora kao i faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta uslijed skin efekta isti za polovicu vodiča i za cjelokupni vodič.

U slučaju samo jednog dionog vodiča u utoru ($i = 1$), prema izrazima (19.135) i (19.136), faktor porasta radnog otpora u vodiču uslijed skin efekta opisan je izrazom:

$$k_R = k_{R1} = \varphi_R(\xi) = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot b \quad (19.152)$$

dok je, prema izrazima (19.138) i (19.139), faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta uslijed skin efekta u vodiču opisan izrazom:

$$k_L = k_{L1} = 3 \cdot \varphi_L(\xi) = \frac{3}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot b \quad (19.153)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \kappa}{2}} = 1875,78884 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot b = 0,93789442 \quad (19.154)$$

$$k_R = 1,066814927 \quad ; \quad k_L = 0,9809439966 \quad (19.155)$$

Prema Slici 19.1, jedinični radni otpor cjelokupnog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan je izrazom:

$$R_{DC} = R_1^{DC} = \frac{1}{\kappa \cdot 4 \cdot a \cdot b} = 8,928571429 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.156)$$

dok je, prema Slici 19.1, uz uvedene pretpostavke, koje problem svode na magnetodinamičku aproksimaciju ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala, jakost magnetskog polja u vodiču protjecanom vremenski konstantnom električnom strujom opisana izrazom:

$$H_{DC} = -\frac{I_{ob}}{2 \cdot a} = -\frac{I \cdot x}{4 \cdot a \cdot b} \quad ; \quad -b \leq x \leq b \quad (19.157)$$

gdje je I jakost vremenski konstantne električne struje. Treba istaknuti da, kod izračuna jakosti magnetskog polja, integracijska krivulja prolazi kroz središte vodiča, gdje je jakost magnetskog polja jednaka nuli.

Slijedi da je magnetska energija pohranjena u magnetostatičkom polju, po jedinici duljine cjelokupnog bakrenog vodiča, opisana sljedećim izrazom:

$$W_m^{DC} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \int_{-b}^b H_{DC}^2 \cdot 2 \cdot a \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L_{un}^{DC} \cdot I^2 \quad (19.158)$$

odakle slijedi da je jedinični unutarnji induktivitet cjelokupnog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan izrazom:

$$L_{un}^{DC} = \frac{\mu_0 \cdot b}{12 \cdot a} = 5,235987756 \cdot 10^{-9} \text{ H/m} \quad (19.159)$$

Slijedi da je jedinični radni otpor cjelokupnog vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$R = k_R \cdot R_{DC} = 9,525133279 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.160)$$

dok je jedinični unutarnji induktivitet cjelokupnog vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$L_{\text{un}} = k_L \cdot L_{\text{un}}^{\text{DC}} = 5,136210755 \cdot 10^{-9} \text{ H/m} \quad (19.161)$$

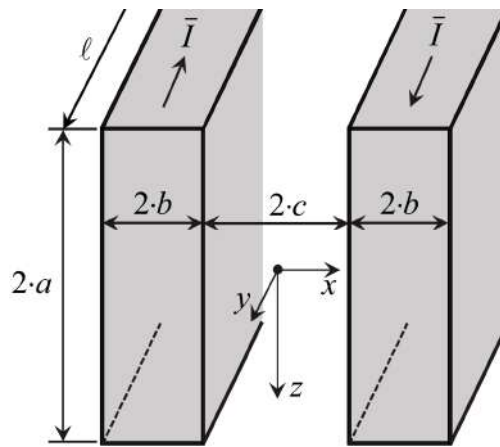
pa je jedinični induktivni otpor vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$X_{L_{\text{un}}} = \omega \cdot L_{\text{un}} = 5,136210755 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.162)$$

Konačno je jedinična unutarnja impedancija vodiča protjecanog sinusoidalnom električnom strujom:

$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = R + j \cdot X_{L_{\text{un}}} = 1,082168309 \cdot 10^{-3} \angle 28,33475267^\circ \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.163)$$

Zadatak 19.6. Pomoću kompleksnog Poyntingovog teorema, izračunajte jediničnu impedanciju dvožičnog voda kojim teče sinusoidalna električna struja, uz pretpostavku da je: $\ell \gg a \gg b$. Neka je zadano: $a = 1 \text{ cm}$, $b = c = 0,05 \text{ cm}$, $\kappa = 56 \text{ MS/m}$, $\mu = \mu_0$, $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$. Zanemarite pomačne električne struje.



Slika 19.6. Dvožični električni vod

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrim vodičima, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. Fazori vektora jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravni (y, z) i ovise samo o varijabli x . Vrijedi da je:

$$\underline{\vec{E}} = \bar{E}_y \cdot \vec{j} = \bar{E} \cdot \vec{j} \quad ; \quad \underline{\vec{H}} = \bar{H}_z \cdot \vec{k} = \bar{H} \cdot \vec{k} \quad (19.164)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom homogenom diferencijalnom jednačinom:

$$\Delta \bar{H} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{H} \quad (19.165)$$

čije je partikularno rješenje glasi:

$$\bar{H} = \bar{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} + \bar{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} \quad (19.166)$$

gdje su \bar{H}_1 i \bar{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete. Uz uvedene pretpostavke, vrijedi da je:

$$\bar{H} = 0 \quad \text{za} \quad |x| \geq c + 2 \cdot b \quad (19.167)$$

$$\bar{H} = \text{konst.} \quad \text{za} \quad |x| \leq c \quad (19.168)$$

Funkcija koja opisuje raspodjelu jakosti magnetskog polja jest parna funkcija ovisna o x , dok je funkcija koja opisuje raspodjelu jakosti električnog polja neparna funkcija, također, ovisna o x .

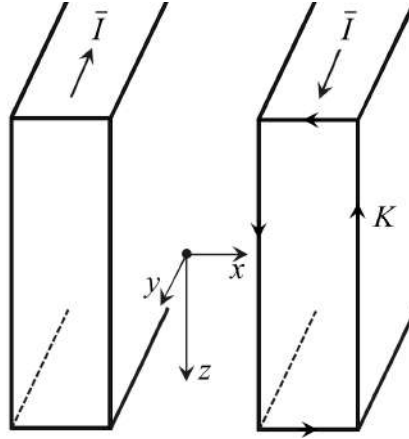
Unutarnje impedancije vodiča su međusobno jednake. Stoga je dovoljno odrediti jediničnu unutarnju impedanciju samo jednog vodiča. Neka je to desni vodič ($x > 0$) prikazan na Slici 19.6.

Ako se, prema Slici 19.7, primijeni Ampèrov zakon:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_K \vec{H}_z \cdot dz = \oint_K \vec{H} \cdot dz = \int_{-a}^a \vec{H}|_{x=c} \cdot dz = \bar{I} \quad (19.169)$$

dobije se da je:

$$\vec{H}|_{x=c} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot a} \quad (19.170)$$



Slika 19.7. Integracijska krivulja K

Dakle, raspodjela jakosti magnetskog polja u desnom vodiču opisana je izrazom (19.166), dok su granični uvjeti:

$$\vec{H}|_{x=c} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot a} \quad ; \quad \vec{H}|_{x=c+2b} = 0 \quad (19.171)$$

odakle slijedi sustav linearnih jednadžbi:

$$\vec{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot c} + \vec{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot c} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot a} \quad (19.172)$$

$$\vec{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot (c+2b)} + \vec{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot (c+2b)} = 0 \quad (19.173)$$

čija su rješenja:

$$\vec{H}_1 = \frac{\bar{I}}{2 \cdot a} \cdot \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot (c+2b)}}{e^{2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b} - e^{-2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b}} \quad ; \quad \vec{H}_2 = -\frac{\bar{I}}{2 \cdot a} \cdot \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot (c+2b)}}{e^{2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b} - e^{-2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b}} \quad (19.174)$$

Slijedi da je jakost magnetskog polja u desnom vodiču opisana izrazom:

$$\vec{H} = \frac{\bar{I}}{2 \cdot a} \cdot \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot (x-c-2b)} - e^{\bar{\gamma} \cdot (x-c-2b)}}{e^{2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b} - e^{-2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b}} \quad (19.175)$$

Fazor vektora jakosti električnog polja može se odrediti iz prve Maxwellove diferencijalne jednadžbe, koja u ovom slučaju glasi:

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{H} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (19.176)$$

odakle slijedi da je:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_y \cdot \vec{j} = \underline{\underline{E}} \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (19.177)$$

pa je:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{Z}}_v \cdot \frac{\underline{\underline{I}}}{2 \cdot a} \cdot \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot (x-c-2 \cdot b)} + e^{\bar{\gamma} \cdot (x-c-2 \cdot b)}}{e^{2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b} - e^{-2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b}} \quad (19.178)$$

gdje je:

$$\underline{\underline{Z}}_v = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \quad (19.179)$$

valna impedancija bakrenog vodiča, uz zanemarenje pomačnih električnih struja.

U ovom slučaju, fazor Poyntingovog vektora opisan je izrazom:

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^* = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{H}}^* \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{H}}^* \cdot \vec{i} \quad (19.180)$$

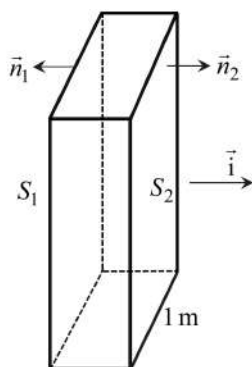
dok je kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u jedinicu duljine desnog vodiča opisana izrazom:

$$\bar{S}_{p,ul} = P + j \cdot Q = I^2 \cdot \bar{Z}_{un}^1 = -\oint_S \underline{\underline{S}} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \underline{\underline{E}} \cdot \vec{i} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (19.181)$$

koji se svodi na integraciju po plohi S_1 koja leži u ravnini $x = c$ (Slika 19.8):

$$\bar{S}_{p,ul} = -\int_{S_1} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{H}}^* \cdot \vec{i} \cdot (-\vec{i}) \cdot dS = (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{H}}^*)_{x=c} \cdot 2 \cdot a = I^2 \cdot \bar{Z}_{un}^1 \quad (19.182)$$

jer je fazor Poyntingovog vektora na plohi S_2 jednak nuli te leži u četiri preostale integracijske plohe.



Slika 19.8. Integracijske plohe

Iz izraza (19.178), slijedi da je:

$$\underline{\underline{E}} \Big|_{x=c} = \frac{\underline{\underline{Z}}_v \cdot \underline{\underline{I}}}{2 \cdot a} \cdot \frac{e^{2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b} + e^{-2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b}}{e^{2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b} - e^{-2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b}} = \frac{\underline{\underline{Z}}_v \cdot \underline{\underline{I}}}{2 \cdot a} \cdot \text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) \quad (19.183)$$

dok iz izraza (19.174) slijedi da je:

$$\underline{\underline{H}}^* \Big|_{x=c} = \frac{\underline{\underline{I}}^*}{2 \cdot a} \quad (19.184)$$

Ako se izrazi (19.186) i (19.184) uvrste u izraz (19.182), dobije se sljedeći izraz:

$$\bar{S}_{p,ul} = \underline{\underline{Z}}_v \cdot \frac{\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{I}}^*}{2 \cdot a} \cdot \text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) = \underline{\underline{Z}}_v \cdot \frac{I^2}{2 \cdot a} \cdot \text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) = I^2 \cdot \bar{Z}_{un}^1 \quad (19.185)$$

odakle slijedi da je jedinična unutarnja impedancija vodiča opisana izrazom:

$$\bar{Z}_{un}^1 = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) = \frac{\underline{\underline{Z}}_v}{2 \cdot a} \cdot \text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) \quad (19.186)$$

Jedinična unutarnja impedancija voda opisana je izrazom:

$$\bar{Z}_{\text{un-voda}}^1 = 2 \cdot \bar{Z}_{\text{un}}^1 = \frac{\bar{Z}_v}{a} \cdot \text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) = R + j \cdot \omega \cdot L_{\text{un}} \quad (19.187)$$

gdje je:

R - jedinični radni otpor voda; radni otpor po jedinici duljine voda,

L_{un} - jedinični unutarnji induktivitet voda.

Za $\bar{\gamma} = (1 + j) \cdot \alpha$ vrijedi sljedeći izrazi:

$$\text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) = \frac{\text{sh}(4 \cdot \alpha \cdot b) - j \cdot \sin(4 \cdot \alpha \cdot b)}{\text{ch}(4 \cdot \alpha \cdot b) - \cos(4 \cdot \alpha \cdot b)} \quad (19.188)$$

Jedinični vanjski induktivitet voda može se lako izračunati iz magnetskog toka koji prolazi između vodiča u smjeru osi z , a stvara ga homogeno magnetsko polje. Vrijedi da je:

$$L_{\text{vanj}} = \frac{\bar{\Psi}}{\bar{I}} = \frac{\mu_0 \cdot \bar{H}|_{x=c} \cdot 2 \cdot c}{\bar{I}} = \mu_0 \cdot \frac{c}{a} \quad (19.189)$$

Ukupna jedinična impedancija voda opisana je izrazom:

$$\bar{Z}_{\text{voda}}^1 = \bar{Z}_{\text{un-voda}}^1 + j \cdot \omega \cdot L_{\text{vanj}} = R + j \cdot \omega \cdot (L_{\text{un}} + L_{\text{vanj}}) = R + j \cdot \omega \cdot L \quad (19.190)$$

gdje je L ukupni jedinični induktivitet voda.

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0 \cdot \kappa}{2}} = 1875,78884 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad 4 \cdot \alpha \cdot b = 3,75157768 \quad (19.191)$$

$$\text{cth}(2 \cdot \bar{\gamma} \cdot b) = 0,9622413654 \angle 1,54185187^\circ \quad (19.192)$$

$$\bar{Z}_v = 4,737082174 \cdot 10^{-5} \angle 45^\circ \text{ } \Omega \quad (19.193)$$

$$\bar{Z}_{\text{un-voda}}^1 = 4,558216419 \cdot 10^{-3} \angle 46,54185187^\circ \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.194)$$

$$X_{\text{vanj}} = \omega \cdot L_{\text{vanj}} = 6,283185307 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.195)$$

$$\bar{Z}_{\text{voda}}^1 = \bar{Z}_{\text{un-voda}}^1 + j \cdot X_{\text{vanj}} = 1,009129131 \cdot 10^{-2} \angle 71,89924283^\circ \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.196)$$

$$R = 3,135253113 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m} \quad ; \quad X_L = 9,591889712 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.197)$$

Jedinični radni otpor jednog vodiča je:

$$R_{\text{vodica}} = \frac{R}{2} = 1,567626557 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.198)$$

Prema izrazu (19.90), osamljeni vodič istih dimenzija iz zadatka 19.1, uz iste pretpostavke, ima jedinični radni otpor:

$$R_{\text{os-vodica}} = 9,525133293 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m} \quad (19.199)$$

Postotni porast jediničnog radnog otpora vodiča uslijed efekta blizine dvaju vodiča je:

$$\Delta R = \frac{R_{\text{vodica}} - R_{\text{os-vodica}}}{R_{\text{os-vodica}}} \cdot 100 = 64,5779 \% \quad (19.200)$$

Napomena: Jedinična unutarnja impedancija jednog vodiča može se izračunati i pomoću faktora porasta radnog otpora i faktora smanjenja unutarnjeg induktiviteta istovrsnog vodiča u utoru električnog stroja. Pritom je širina zamišljenog utora $2 \cdot a$, dok je visina vodiča u utoru $2 \cdot b$. Prema izrazu (19.152), faktor porasta radnog otpora u vodiču uslijed skin efekta opisan je izrazom:

$$k_R = k_{R1} = \varphi_R(\xi) = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = 2 \cdot \alpha \cdot b \quad (19.201)$$

dok je, prema izrazu (19.153), faktor smanjenja unutarnjeg induktiviteta uslijed skin efekta u vodiču opisan izrazom:

$$k_L = k_{L1} = 3 \cdot \varphi_L(\xi) = \frac{3}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) - \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = 2 \cdot \alpha \cdot b \quad (19.202)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$2 \cdot \xi = 4 \cdot \alpha \cdot b = 3,75157768 \quad (19.203)$$

$$k_R = 1,755741743 \quad ; \quad k_L = 0,789894992 \quad (19.204)$$

Prema Slici 19.6, jedinični radni otpor jednog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan je izrazom:

$$R_{DC} = R_1^{DC} = \frac{1}{\kappa \cdot 4 \cdot a \cdot b} = 8,928571429 \cdot 10^{-4} \quad \Omega/\text{m} \quad (19.205)$$

pa je:

$$R_{\text{vodica}} = \frac{R}{2} = k_R \cdot R_{DC} = 1,567626557 \cdot 10^{-3} \quad \Omega/\text{m}$$

gdje je R jedinični otpor dvožičnog voda.

Prema izrazu (19.115), uz supstitucije $i=1$, $h \rightarrow 2 \cdot b$, $b \rightarrow 2 \cdot a$, jedinični unutarnji induktivitet jednog bakrenog vodiča protjecanog vremenski konstantnom električnom strujom opisan je izrazom:

$$L_{\text{un-vodica}}^{DC} = \frac{\mu_0 \cdot b}{3 \cdot a} = 2,094395102 \cdot 10^{-8} \quad \text{H/m} \quad (19.206)$$

pa je:

$$X_{\text{un-vodica}} = \omega \cdot k_L \cdot L_{\text{un-vodica}}^{DC} = 1,654352202 \cdot 10^{-3} \quad \Omega/\text{m} \quad (19.207)$$

Slijedi da je jedinična unutarnja impedancija vodiča:

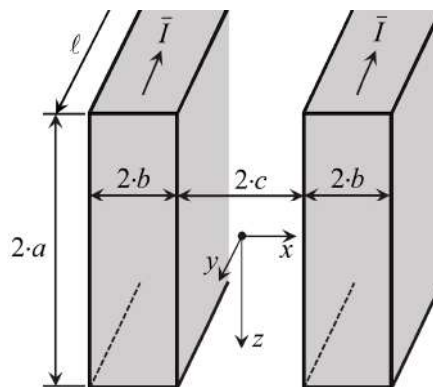
$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = R_{\text{vodica}} + j \cdot X_{\text{un-vodica}} = 2,27910821 \cdot 10^{-3} \angle 46,541851863^\circ \quad \Omega/\text{m} \quad (19.208)$$

pa je jedinična unutarnja impedancija voda:

$$\bar{Z}_{\text{un-voda}}^1 = 2 \cdot \bar{Z}_{\text{un}}^1 = 4,55821642 \cdot 10^{-3} \angle 46,541851863^\circ \quad \Omega/\text{m} \quad (19.209)$$

Posljednje znamenke u rezultatima opisanim izrazima (19.194) i (19.209) razlikuju se zbog greške zaokruživanja.

Zadatak 19.7. Pomoću kompleksnog Poyntingovog teorema, izračunajte ukupnu jediničnu unutarnju impedanciju sustava dvaju jednakih paralelnih vodiča kojima teče sinusoidalna električna struja, uz pretpostavku da je: $\ell \gg a \gg b$. Neka je zadano: $a = 1 \text{ cm}$, $b = c = 0,05 \text{ cm}$, $\kappa = 56 \text{ MS/m}$, $\mu = \mu_0$, $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$. Zanemarite pomačne električne struje.



Slika 19.9. Dva paralelna bakrena vodiča

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrim vodičima, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. Fazori vektora jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravnini (y, z) i ovise samo o varijabli x . Vrijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_y \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_z \cdot \vec{k} = \vec{H} \cdot \vec{k} \quad (19.210)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom homogenom diferencijalnom jednačinom:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad (19.211)$$

čije partikularno rješenje glasi:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma} \cdot x} + \vec{H}_2 \cdot e^{\vec{\gamma} \cdot x} \quad (19.212)$$

gdje su \vec{H}_1 i \vec{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete. Uz uvedene pretpostavke, vrijedi da je:

$$\vec{H} = 0 \quad \text{za} \quad |x| \leq c \quad (19.213)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{I}}{2 \cdot a} \quad \text{za} \quad x \geq c + 2 \cdot b \quad ; \quad \vec{H} = -\frac{\vec{I}}{2 \cdot a} \quad \text{za} \quad x \leq -(c + 2 \cdot b) \quad (19.214)$$

Vodiči su u ovom i prethodnom zadatku isti te su raspodjele jakosti magnetskog polja i jakosti električnog polja u vodičima u oba zadatka istovrsne, jer su granični uvjeti za jakost magnetskog polja u vodičima istovrsni. Stoga je jedinična unutarnja impedancija jednog vodiča u ovom zadatku jednaka jediničnoj unutarnjoj impedanciji jednog vodiča dobivenoj u prethodnom zadatku. Prema izrazu (19.208) vrijedi da je:

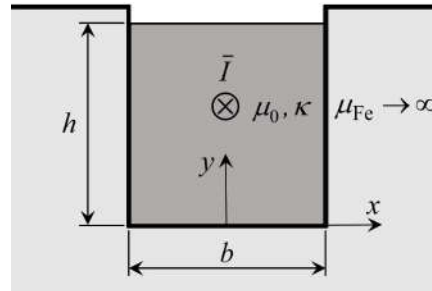
$$\bar{Z}_{\text{un}}^1 = R_{\text{vodica}} + j \cdot X_{\text{Lun-vodica}} = 2,27910821 \cdot 10^{-3} \angle 46,541851863^\circ \Omega/\text{m} \quad (19.215)$$

pa je ukupna jedinična unutarnja impedancija dvaju paralelnih vodiča:

$$\bar{Z}_{\text{un-sustava}}^1 = \frac{\bar{Z}_{\text{un}}^1}{2} = 1,1395541105 \cdot 10^{-3} \angle 46,541851863^\circ \Omega/\text{m} \quad (19.216)$$

Napomena: Jedinična unutarnja impedancija jednog vodiča može se izračunati pomoću kompleksnog Poyntingovog teorema ili pak pomoću faktora porasta radnog otpora i faktora smanjenja unutarnjeg induktiviteta istovrsnog vodiča u utoru električnog stroja. Vanjski induktivitet je u ovom slučaju beskonačan jer je zamišljeni povratni vodič u beskonačnosti.

Zadatak 19.8. Bakreni vodič visine h i širine b nalazi se u pravokutnom utoru i njime teče sinusoidalna električna struja frekvencije $f = 50$ Hz. Pretpostavite da je permeabilnost željeza beskonačna, da su sve silnice u bakrenom vodiču paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u bakrenom vodiču duž silnice konstantna. Zanimajte pomaćne električne struje. Ako je na gornjem rubu vodiča ($y = h$) zadan fazor jakosti električnog polja $\vec{E} = \vec{E}_z = 0,0065 \angle 24^\circ$ V/m, izračunajte fazor jakosti električnog polja na donjem rubu vodiča ($y = 0$) i fazor jakosti električne struje \vec{I} . Neka je zadano: $h = 1$ cm, $b = 5$ mm, $\kappa = 57$ MS/m.



Slika 19.10. Pravokutni bakreni vodič u utoru

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. Fazori vektora jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja leže u ravnini (x, z) i ovise samo o varijabli y . Vrijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_z \cdot \vec{k} = \vec{E} \cdot \vec{k} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_x \cdot \vec{i} = \vec{H} \cdot \vec{i} \quad (19.217)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom homogenom diferencijalnom jednačinom:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad (19.218)$$

čije partikularno rješenje glasi:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma} \cdot y} + \vec{H}_2 \cdot e^{\vec{\gamma} \cdot y} \quad (19.219)$$

gdje su \vec{H}_1 i \vec{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti sljedeće granične uvjete:

$$\vec{H}|_{y=0} = 0 \quad ; \quad \vec{H}|_{y=h} = \frac{\vec{I}}{b} \quad (19.220)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{H} = \frac{\vec{I}}{b} \cdot \frac{\text{sh}(\vec{\gamma} \cdot y)}{\text{sh}(\vec{\gamma} \cdot h)} \quad (19.221)$$

Fazor vektora jakosti električnog polja može se odrediti iz prve Maxwellove diferencijalne jednačine, koja u ovom slučaju glasi:

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \vec{H} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} \cdot \vec{k} \quad (19.222)$$

odakle slijedi da je:

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_z \cdot \vec{k} = \bar{E} \cdot \vec{k} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \cdot \vec{k} \quad (19.223)$$

pa je:

$$\bar{E} = -\frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot y)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad (19.224)$$

Zadano je:

$$\bar{E}_h = \bar{E}_z|_{y=h} = \bar{E}|_{y=h} = -\frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot h)}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} = 0,0065 \angle 24^\circ \text{ V/m} \quad (19.225)$$

a treba izračunati:

$$\bar{E}_0 = \bar{E}|_{y=0} = -\frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{1}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} = -\bar{Z}_v \cdot \frac{\bar{I}}{b} \cdot \frac{1}{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad (19.226)$$

Iz izraza (19.225) i (19.226), slijedi da je:

$$\bar{E}_0 = \frac{\bar{E}_h}{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot h)} \quad ; \quad \bar{I} = -\frac{\bar{E}_0 \cdot b}{\bar{Z}_v} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h) \quad (19.227)$$

gdje je:

$$\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h) = \text{sh}(\alpha \cdot h + j \cdot \alpha \cdot h) = \text{sh}(\alpha \cdot h) \cdot \cos(\alpha \cdot h) + j \cdot \text{ch}(\alpha \cdot h) \cdot \sin(\alpha \cdot h) \quad (19.228)$$

$$\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot h) = \text{ch}(\alpha \cdot h + j \cdot \alpha \cdot h) = \text{ch}(\alpha \cdot h) \cdot \cos(\alpha \cdot h) + j \cdot \text{sh}(\alpha \cdot h) \cdot \sin(\alpha \cdot h) \quad (19.229)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \alpha \cdot h = 1,060723763 \quad (19.230)$$

$$\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot h) = 1,541877778 \angle 66,26502004^\circ \quad (19.231)$$

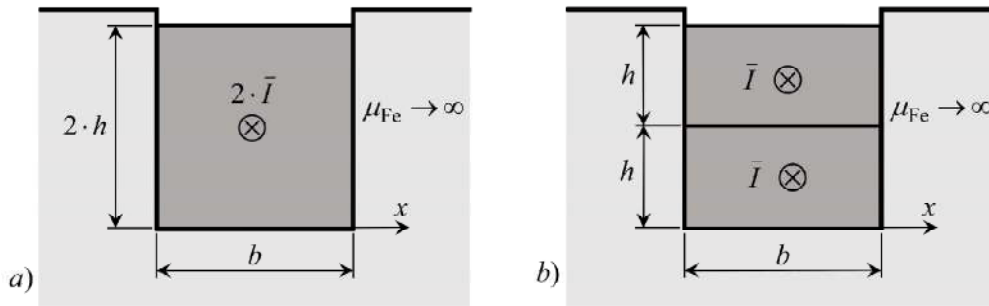
$$\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot h) = 1,361669857 \angle 54,5557039^\circ \quad (19.232)$$

$$\bar{Z}_v = 2,631736722 \cdot 10^{-6} \angle 45^\circ \quad \Omega \quad (19.233)$$

$$\bar{E}_0 = 4,773550626 \cdot 10^{-3} \angle -30,5557039^\circ \text{ V/m} \quad (19.234)$$

$$\bar{I} = 13,98360172 \angle 170,7093161^\circ \text{ A} \quad (19.235)$$

Zadatak 19.9. U pravokutnom utoru širine b nalazi se: a) bakreni vodič visine $2 \cdot h$ kojim teče sinusoidalna električna struja $2 \cdot \bar{I}$, b) dva diona bakrena vodiča visine h kojima teče sinusoidalna električna struja \bar{I} . Pretpostavite da je permeabilnost željeza beskonačna, da su sve silnice u bakrenom vodiču paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u bakrenom vodiču duž silnice konstantna. Zanemarite pomaćne električne struje. Odredite omjer snaga gubitaka u ova dva slučaja. Neka je zadano: $h = 1 \text{ cm}$, $\kappa = 57 \text{ MS/m}$, $f = 50 \text{ Hz}$.



Slika 19.11. Bakreni vodiči u utoru

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. To znači da se mogu koristiti izrazi za faktor porasta radnog otpora u dionim vodičima uslijed skin efekta.

a) Jedan vodič u utoru

Prema izrazima (19.135) - (19.137), za jedan vodič visine $2 \cdot h$ faktor porasta radnog otpora opisan je izrazom:

$$k_{Ra} = \varphi_R(\xi) = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = 2 \cdot \alpha \cdot h \quad (19.236)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad 2 \cdot \alpha \cdot h = 2,121447526 \quad (19.237)$$

$$k_{Ra} = 2,039715956 \quad (19.238)$$

b) Dva diona vodiča u utoru

Prema izrazima (19.135) - (19.137), za dva diona vodiča visine h faktor porasta radnog otpora opisan je izrazima:

$$k_{Rb1} = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.239)$$

$$k_{Rb2} = k_{Rb1} + 4 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.240)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

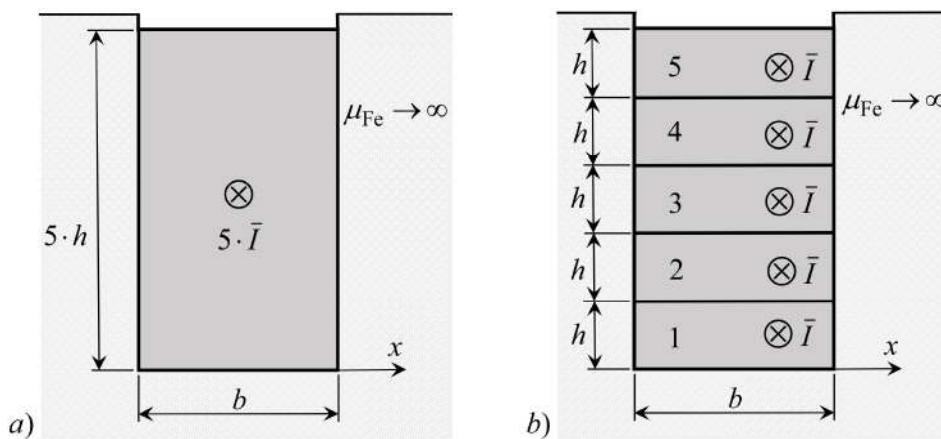
$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \alpha \cdot h = 1,060723763 \quad (19.241)$$

$$k_{Rb1} = 1,107367415 \quad ; \quad k_{Rb2} = 1,910212277 \quad (19.242)$$

Traženi omjer snaga gubitaka je:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{2 \cdot k_{Ra}}{k_{Rb1} + k_{Rb2}} = 1,351888709 \quad (19.243)$$

Zadatak 19.10. U pravokutnom utoru širine b nalazi se: a) bakreni vodič visine $5 \cdot h$ kojim teče sinusoidalna električna struja $5 \cdot \bar{I}$, b) pet dionih bakrenih vodiča visine h kojima teče sinusoidalna električna struja \bar{I} . Pretpostavite da je permeabilnost željeza beskonačna, da su sve silnice u bakrenom vodiču paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u bakrenom vodiču duž silnice konstantna. Zanimajte pomaćne električne struje. Odredite omjer snaga gubitaka u ova dva slučaja. Neka je zadano: $h = 6 \text{ mm}$, $\kappa = 57 \text{ MS/m}$, $f = 50 \text{ Hz}$.



Slika 19.12. Bakreni vodiči u utoru

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. To znači da se mogu koristiti izrazi za faktor porasta radnog otpora u dionim vodičima uslijed skin efekta.

a) Jedan vodič u utoru

Prema izrazima (19.135) - (19.137), za jedan vodič visine $5 \cdot h$ faktor porasta radnog otpora opisan je izrazom:

$$k_{Ra} = \varphi_R(\xi) = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = 5 \cdot \alpha \cdot h \quad (19.244)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} \quad ; \quad 5 \cdot \alpha \cdot h = 3,182171289 \quad (19.245)$$

$$k_{Ra} = 3,194003913 \quad (19.246)$$

b) Pet dionih vodiča u utoru

Prema izrazima (19.135) - (19.137), za pet dionih vodiča visine h faktor porasta radnog otpora opisan je izrazima:

$$k_{Rb1} = \xi \cdot \frac{\text{sh}(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\text{ch}(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)} \quad ; \quad \xi = \alpha \cdot h \quad (19.247)$$

$$k_{Rb2} = k_{Rb1} + 4 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.248)$$

$$k_{Rb3} = k_{Rb1} + 12 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.249)$$

$$k_{Rb4} = k_{Rb1} + 24 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.250)$$

$$k_{Rb5} = k_{Rb1} + 40 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.251)$$

pa je:

$$k_{Rb} = \sum_{i=1}^5 k_{Rbi} = 5 \cdot k_{Rb1} + 80 \cdot \xi \cdot \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) + \cos(\xi)} \quad (19.252)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

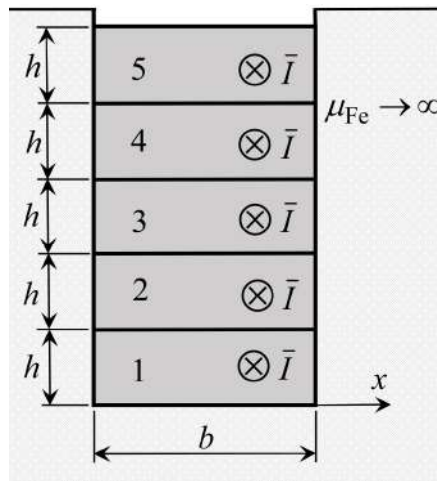
$$\alpha = \sqrt{\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \kappa} = 106,0723763 \text{ m}^{-1} ; \alpha \cdot h = 0,6364342578 \quad (19.253)$$

$$k_{Rb1} = 1,014492957 \quad ; \quad k_{Rb} = 7,245559817 \quad (19.254)$$

Traženi omjer snaga gubitaka je:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{5 \cdot k_{Ra}}{k_{Rb}} = 2,204111203 \quad (19.255)$$

Zadatak 19.11. U pravokutnom utoru širine b nalazi se pet dionih bakrenih vodiča visine h kojima teče sinusoidalna električna struja \bar{I} . Pretpostavite da je permeabilnost željeza beskonačna, da su sve silnice u bakrenom vodiču paralelne koordinatnoj osi x te da je jakost magnetskog polja u bakrenom vodiču duž silnice konstantna. Zanemarite pomaćne električne struje. Neka je faktor porasta radnog otpora prvog dionog vodiča 1,04 te neka je faktor porasta radnog otpora trećeg dionog vodiča 2,12. Izračunajte faktore porasta radnog otpora za tri preostala diona vodiča.



Slika 19.13. Pet dionih vodiča u pravokutnom utoru

Rješenje:

Iz uvedenih pretpostavki slijedi da se, u dobrom vodiču, koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala. To znači da se mogu koristiti izrazi za faktor porasta radnog otpora u dionim vodičima uslijed skin efekta.

Prema izrazima (19.135) - (19.137), za pet dionih vodiča visine h faktor porasta radnog otpora opisan je izrazima:

$$\varphi_R = \varphi_R(\xi) ; \Psi_R = \psi_R(\xi) ; k_{R1} = \varphi_R ; k_{R2} = \varphi_R + 2 \cdot \Psi_R \quad (19.256)$$

$$k_{R3} = \varphi_R + 6 \cdot \Psi_R ; k_{R4} = \varphi_R + 12 \cdot \Psi_R ; k_{R5} = \varphi_R + 20 \cdot \Psi_R \quad (19.257)$$

Na temelju zadanih podataka može se formirati sljedeći sustav jednadžbi:

$$k_{R1} = \varphi_R = 1,04 \quad ; \quad k_{R3} = \varphi_R + 6 \cdot \Psi_R = 2,12 \quad (19.258)$$

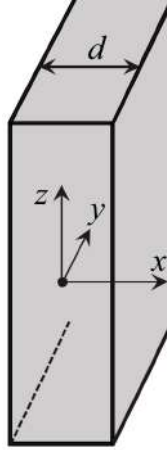
odakle slijedi da je:

$$\varphi_R = 1,04 \quad ; \quad \Psi_R = 0,18 \quad (19.259)$$

pa je:

$$k_{R2} = 1,4 \quad ; \quad k_{R4} = 3,2 \quad ; \quad k_{R5} = 4,64 \quad (19.260)$$

Zadatak 19.12. Odredite funkcije koje opisuju raspodjelu sinusoidalne magnetske indukcije i plošne gustoće električne struje u LIH feromagnetskom limu debljine d , električne provodnosti κ i magnetske permeabilnosti μ . Neka je vektor magnetske indukcije paralelan osi z te neka je zadana jakost magnetskog polja $\vec{H} = \vec{H}_0$ na rubovima lima (za $x = \pm d/2$). Zadatak riješite koristeći magnetodinamičku aproksimaciju linearno polariziranog uniformnog ravnog vala u dobrom vodiču.



Slika 19.14. Feromagnetski lim

Rješenje:

Budući da se koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala, vrijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_y \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_z \cdot \vec{k} = \vec{H} \cdot \vec{k} \quad (19.261)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom homogonom diferencijalnom jednačinom:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad (19.262)$$

čije partikularno rješenje glasi:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma} \cdot x} + \vec{H}_2 \cdot e^{\vec{\gamma} \cdot x} \quad (19.263)$$

gdje su \vec{H}_1 i \vec{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete:

$$\vec{H} \Big|_{x=\pm d/2} = \vec{H}_0 \quad (19.264)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot \frac{\text{ch}(\vec{\gamma} \cdot x)}{\text{ch}(\vec{\gamma} \cdot d/2)} \quad (19.265)$$

pa je raspodjela magnetske indukcije opisana izrazom:

$$\vec{B} = \vec{B}_z = \mu \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}_0 \cdot \frac{\text{ch}(\vec{\gamma} \cdot x)}{\text{ch}(\vec{\gamma} \cdot d/2)} \quad (19.266)$$

Fazor vektora plošne gustoće električne struje može se odrediti iz prve Maxwellove diferencijalne jednačine, koja u ovom slučaju glasi:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{H} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (19.267)$$

odakle slijedi da je:

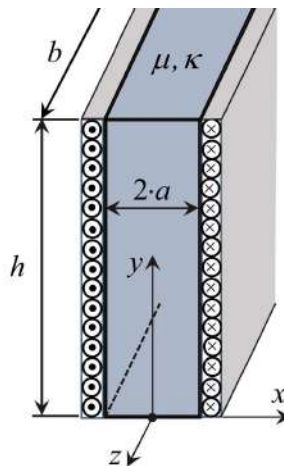
$$\underline{\underline{J}} = \bar{J} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \cdot \vec{j} \quad (19.268)$$

pa je:

$$\bar{J} = \bar{J}_y = -\bar{\gamma} \cdot \bar{H}_0 \cdot \frac{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot d/2)} \quad (19.269)$$

a to je fazor plošne gustoće vrtložne električne struje koja se suprotstavlja promjeni ulančenog magnetskog toka.

Zadatak 19.13. Neka se s dvije strane LIH feromagnetske jezgre nalazi po N vodiča te neka svakim od tih vodiča teče sinusoidalna električna struja efektivne vrijednosti I , kružne frekvencije ω . Odredite nadomjesnu impedanciju jezgre. Zadatak riješite koristeći magnetodinamičku aproksimaciju linearno polariziranog uniformnog ravnog vala u dobrom LIH vodiču. Zanimarite magnetski otpor okolnog sredstva.



Slika 19.15. Jezgra i vodiči protjecani električnom strujom

Rješenje:

Budući da se koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala, vrijedi da je:

$$\underline{\underline{E}} = \bar{E}_z \cdot \vec{k} = \bar{E} \cdot \vec{k} \quad ; \quad \underline{\underline{H}} = \bar{H}_y \cdot \vec{j} = \bar{H} \cdot \vec{j} \quad (19.270)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom homogenom diferencijalnom jednačbom:

$$\Delta \bar{H} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{H} \quad (19.271)$$

čije partikularno rješenje glasi:

$$\bar{H} = \bar{H}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot x} + \bar{H}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot x} \quad (19.272)$$

gdje su \bar{H}_1 i \bar{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete:

$$\bar{H}|_{x=\pm a} = \frac{N \cdot \bar{I}}{h} \quad (19.273)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{H} = \frac{N \cdot \bar{I}}{h} \cdot \frac{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot a)} \quad (19.274)$$

Fazor vektora jakosti električnog polja može se odrediti iz prve Maxwelllove diferencijalne jednačbe, koja u ovom slučaju glasi:

$$\underline{\bar{E}} = \frac{1}{\kappa} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{H} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \cdot \bar{k} \quad ; \quad \underline{\bar{E}} = \bar{E}_z \cdot \bar{k} = \bar{E} \cdot \bar{k} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \cdot \bar{k} \quad (19.275)$$

pa je:

$$\bar{E} = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{N \cdot \bar{I}}{h} \cdot \frac{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot a)} = \bar{Z}_v \cdot \frac{N \cdot \bar{I}}{h} \cdot \frac{\text{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\text{ch}(\bar{\gamma} \cdot a)} \quad ; \quad \bar{Z}_v = \frac{\bar{\gamma}}{\kappa} \quad (19.276)$$

U ovom slučaju, fazor Poyntingovog vektora opisan je izrazom:

$$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{E}} \times \underline{\bar{H}}^* = \bar{E} \cdot \bar{H}^* \cdot (\bar{k} \times \bar{j}) = -\bar{E} \cdot \bar{H}^* \cdot \bar{i} \quad (19.277)$$

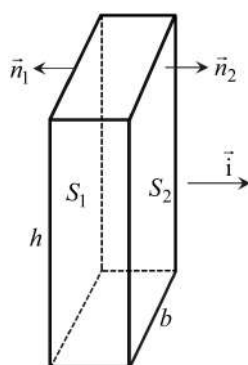
dok je kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u jezgru opisana izrazom:

$$\bar{S}_{p,ul} = P + j \cdot Q = I^2 \cdot \bar{Z} = -\oint_S \underline{\bar{I}} \cdot d\bar{S} = \oint_S \bar{I} \cdot \bar{i} \cdot \bar{n} \cdot dS \quad (19.278)$$

koji se svodi na integraciju po plohi S_1 koja leži u ravнини $x = -a$ te po plohi S_2 koja leži u ravнини $x = a$ (Slika 19.16):

$$\bar{S}_{p,ul} = -(\bar{E} \cdot \bar{H}^*)_{x=-a} \cdot S_1 + (\bar{E} \cdot \bar{H}^*)_{x=a} \cdot S_2 = I^2 \cdot \bar{Z} \quad ; \quad S_1 = S_2 = b \cdot h \quad (19.279)$$

jer fazor Poyntingovog vektora leži u četiri preostale integracijske plohe.



Slika 19.16. Integracijske plohe

Ako se izrazi (19.274) i (19.276) uvrste u izraz (19.279), dobije se sljedeći izraz za nadomjesnu impedanciju feromagnetske jezgre:

$$\bar{Z} = \frac{2 \cdot b \cdot N^2}{h} \cdot \bar{Z}_v \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot a) = R + j \cdot \omega \cdot L \quad (19.280)$$

gdje je R nadomjesni radni otpor jezgre, dok je L nadomjesni induktivitet jezgre.

Vrijedi da je:

$$\operatorname{th}(\bar{\gamma} \cdot a) = \operatorname{th}(\alpha \cdot a + j \cdot \alpha \cdot a) = \frac{\operatorname{sh}(2 \cdot \alpha \cdot a) + j \cdot \sin(2 \cdot \alpha \cdot a)}{\operatorname{ch}(2 \cdot \alpha \cdot a) + \cos(2 \cdot \alpha \cdot a)} \quad (19.281)$$

Napomena: Prema kompleksnom Poyntingovom teoremu u integralnom obliku, do istog se rješenja ovog zadatka za R i L može doći i na teži način pomoću izraza:

$$R \cdot I^2 = \kappa \cdot \int_V \vec{E} \cdot \vec{E}^* \cdot dV \quad ; \quad \frac{L \cdot I^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}^* \cdot dV \quad (19.282)$$

gdje se pojavljuje potreba za korištenjem sljedećih izraza:

$$\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x) \cdot (\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x))^* = |\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)|^2 = \frac{\operatorname{ch}(2 \cdot \alpha \cdot x) - \cos(2 \cdot \alpha \cdot x)}{2} \quad (19.283)$$

$$\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x) \cdot (\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x))^* = |\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x)|^2 = \frac{\operatorname{ch}(2 \cdot \alpha \cdot x) + \cos(2 \cdot \alpha \cdot x)}{2} \quad (19.284)$$

a korisno je znati i sljedeće izraze:

$$\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x) \cdot (\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x))^* = \frac{\operatorname{sh}(2 \cdot \alpha \cdot x) + j \sin(2 \cdot \alpha \cdot x)}{2} \quad (19.285)$$

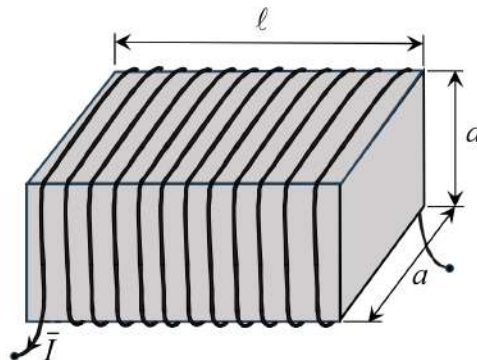
$$\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x) \cdot (\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x))^* = \frac{\operatorname{sh}(2 \cdot \alpha \cdot x) - j \sin(2 \cdot \alpha \cdot x)}{2} \quad (19.286)$$

Iz izraza (19.283) - (19.285) lako se dobiju već korišteni izrazi:

$$\operatorname{th}(\bar{\gamma} \cdot x) = \frac{\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x)} = \frac{\operatorname{sh}(2 \cdot \alpha \cdot x) + j \sin(2 \cdot \alpha \cdot x)}{\operatorname{ch}(2 \cdot \alpha \cdot x) + \cos(2 \cdot \alpha \cdot x)} \quad (19.287)$$

$$\operatorname{cth}(\bar{\gamma} \cdot x) = \frac{\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot x)}{\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot x)} = \frac{\operatorname{sh}(2 \cdot \alpha \cdot x) - j \sin(2 \cdot \alpha \cdot x)}{\operatorname{ch}(2 \cdot \alpha \cdot x) - \cos(2 \cdot \alpha \cdot x)} \quad (19.288)$$

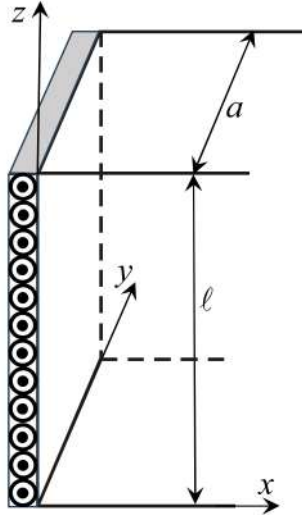
Zadatak 19.14. Na punu ravnu feromagnetsku jezgru kvadratnog poprečnog presjeka gusto je namotana zavojnica duljine ℓ koja ima ukupno N zavoja. Neka je jezgra od LIH materijala električne provodnosti κ i magnetske permeabilnosti μ . Neka zavojnicom teče sinusoidalna električna struja efektivne vrijednosti I , kružne frekvencije ω . Odredite nadomjesnu impedanciju jezgre i snagu gubitaka u jezgri, uz pretpostavku da je dubina prodiranja elektromagnetskog vala u jezgru mnogo manja od duljine njezinog brida a . Utjecaj krajeva jezgre zanemarite. Zadatak riješite koristeći magnetodinamičku aproksimaciju linearno polariziranog uniformnog ravnog vala u dobrom vodiču.



Slika 19.17. Zavojnica namotana na ravnu feromagnetsku jezgru

Rješenje:

Zbog pretpostavke da je dubina prodiranja vala u jezgru mnogo manja od duljine njezinog brida ($d = 1/\alpha \ll a$) te zbog zanemarenja utjecaja krajeva jezgre, može se zasebno promatrati svaka od četiri granične plohe. Drugim riječima, razmatra se samo jedna četvrtina namota ispred feromagnetskog sredstva koje se proteže do beskonačnosti (Slika 19.18).



Slika 19.18. Četvrtina namota ispred feromagnetskog sredstva

Budući da se koristi magnetodinamička aproksimacija ravnog linearno polariziranog uniformnog elektromagnetskog vala, vrijedi da je:

$$\vec{E} = \vec{E}_y \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_z \cdot \vec{k} = \vec{H} \cdot \vec{k} \quad (19.289)$$

Fazor jakosti magnetskog polja opisan je 1D Helmholtzovom homogenom diferencijalnom jednačinom:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \vec{\gamma}^2 \cdot \vec{H} \quad (19.290)$$

čije partikularno rješenje glasi:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma} \cdot x} + \vec{H}_2 \cdot e^{\vec{\gamma} \cdot x} \quad (19.291)$$

gdje su \vec{H}_1 i \vec{H}_2 nepoznate kompleksne konstante, koje trebaju zadovoljiti zadane granične uvjete:

$$\vec{H} \Big|_{x=0} = \frac{N \cdot \vec{I}}{\ell} \quad ; \quad \vec{H} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (19.292)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{H} = \frac{N \cdot \vec{I}}{\ell} \cdot e^{-\vec{\gamma} \cdot x} \quad (19.293)$$

Fazor vektora jakosti električnog polja može se odrediti iz prve Maxwellove diferencijalne jednačine, koja u ovom slučaju glasi:

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{H} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \cdot \vec{j} \quad (19.294)$$

odakle slijedi da je:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_y \cdot \underline{\vec{j}} = \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{j}} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial \underline{\vec{H}}}{\partial x} \cdot \underline{\vec{j}} \quad (19.295)$$

pa je:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{\gamma}}{\kappa} \cdot \frac{N \cdot \underline{I}}{\ell} \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} = \underline{\vec{Z}}_v \cdot \frac{N \cdot \underline{I}}{\ell} \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} \quad (19.296)$$

gdje je:

$$\underline{\vec{Z}}_v = \frac{\underline{\gamma}}{\kappa} \quad (19.297)$$

valna impedancija jezgre, uz zanemarenje pomaćnih električnih struja.

U ovom slučaju, fazor Poyntingovog vektora opisan je izrazom:

$$\underline{\vec{G}} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* = \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{H}}^* \cdot (\underline{\vec{j}} \times \underline{\vec{k}}) = \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{H}}^* \cdot \underline{\vec{i}} \quad (19.298)$$

dok je kompleksna prividna elektromagnetska snaga koja ulazi u jezgru kroz sve četiri granične ploha opisana izrazom:

$$\underline{\vec{S}}_{p,ul} = P + j \cdot Q = I^2 \cdot \underline{\vec{Z}} = -4 \cdot \oint_S \underline{\vec{G}} \cdot d\underline{\vec{S}} = -4 \cdot \oint_S \underline{\vec{G}} \cdot \underline{\vec{i}} \cdot \underline{\vec{n}} \cdot dS \quad (19.299)$$

koji se svodi na integraciju po plohi S_1 koja leži u ravnini $x=0$ pa je:

$$\underline{\vec{S}}_{p,ul} = 4 \cdot (\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{H}}^*)_{x=0} \cdot S_1 = I^2 \cdot \underline{\vec{Z}} \quad ; \quad S_1 = a \cdot \ell \quad (19.300)$$

Ako se izrazi (19.293) i (19.296) uvrste u izraz (19.300), dobije se sljedeći izraz za nadomjesnu impedanciju feromagnetske jezgre:

$$\underline{\vec{Z}} = 4 \cdot \frac{N^2 \cdot a}{\ell} \cdot \frac{\underline{\gamma}}{\kappa} = R + j \cdot \omega \cdot L = R + j \cdot X_L \quad (19.301)$$

gdje je R nadomjesni radni otpor jezgre, L nadomjesni induktivitet jezgre, dok je X_L nadomjesna induktivna reaktancija jezgre.

Budući da je $\underline{\gamma} = (1 + j) \cdot \alpha$, iz izraza (19.301), slijedi da je:

$$R = X_L = 4 \cdot \frac{N^2 \cdot a}{\ell} \cdot \frac{\alpha}{\kappa} = 4 \cdot \frac{N^2 \cdot a}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \cdot \kappa}} \quad (19.302)$$

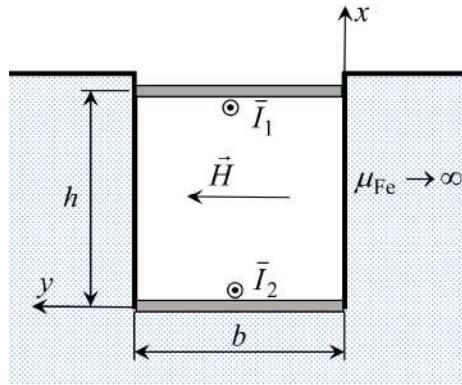
pa je snaga gubitaka jezgre:

$$P = I^2 \cdot R = 4 \cdot \frac{N^2 \cdot a \cdot I^2}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \cdot \kappa}} \quad (19.303)$$

dok je jalova snaga u jezgri:

$$Q = I^2 \cdot X_L = 4 \cdot \frac{N^2 \cdot a \cdot I^2}{\ell} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2 \cdot \kappa}} = P \quad (19.304)$$

Zadatak 19.15. U beskonačno dugom utoru usječenom u beskonačno permeabilni poluprostor nalaze se dva tanka električna vodiča u obliku tanke strujne trake, kojima je jedinični radni otpor R . Neka su trake spojene na početku i u beskonačnosti te neka njima teče ukupna sinusoidalna električna struja efektivne vrijednosti I . Odredite: a) električnu struju pojedinog vodiča, b) razmotrite utjecaj preplitanja na raspodjelu ukupne električne struje po vodičima. Pretpostavite da je magnetsko polje između traka homogeno te da su silnice paralelne osi y .



Slika 19.19. Dvije strujne trake u beskonačno dugom utoru

Rješenje:

a) Raspodjela ukupne električne struje po vodičima

Između strujnih traka fazor jakosti magnetskog polja opisan je izrazom:

$$\vec{H} = \vec{H}_y \cdot \vec{j} = \vec{H} \cdot \vec{j} = \frac{\bar{I}_2}{b} \cdot \vec{j} \quad (19.305)$$

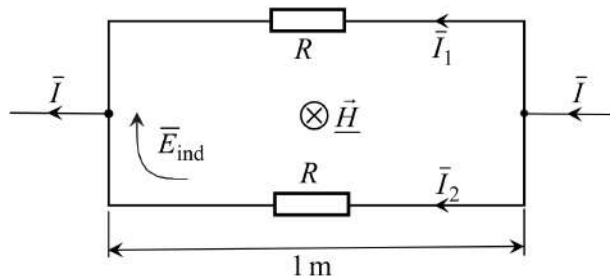
Promatra se jedinica duljine utora i strujnih traka, a koristi se šema prikazana na Slici 19.20. Za tu zamišljenu petlju vrijedi Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -j \cdot \omega \cdot \vec{\Phi} = -j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{\bar{I}_2}{b} \cdot h \quad (19.306)$$

gdje je:

$$\vec{\Phi} = \mu_0 \cdot \frac{\bar{I}_2}{b} \cdot h \cdot 1 = \mu_0 \cdot \frac{\bar{I}_2}{b} \cdot h \quad (19.307)$$

magnetski tok po jedinici duljine utora, dok je \vec{E}_{ind} EMS inducirana u zamišljenoj petlji.



Slika 19.20. Zamišljena petlja pridružena jediničnoj duljini utora

Inducirana EMS tjera električnu struju kroz zamišljenu petlju, koja je opisana izrazom:

$$\bar{I}_{\text{ind}} = \frac{\vec{E}_{\text{ind}}}{2 \cdot R} = -j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{\bar{I}_2 \cdot h}{2 \cdot R \cdot b} \quad (19.308)$$

dok su fazori električnih struja u trakama opisani izrazima:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{I}}{2} - \bar{I}_{\text{ind}} \quad ; \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{I}}{2} + \bar{I}_{\text{ind}} \quad (19.309)$$

Iz sustava triju linearnih jednadžbi, opisanih izrazima (19.308) i (19.309), dobiju se sljedeći izrazi:

$$\bar{I}_1 = \frac{1 + j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{h}{R \cdot b}}{2 + j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{h}{R \cdot b}} \cdot \bar{I} \quad ; \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{2 + j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \frac{h}{R \cdot b}} \cdot \bar{I} \quad (19.310)$$

Za $\omega = 0$ vrijedi da je:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \frac{\bar{I}}{2} \quad (19.311)$$

dok za $\omega \rightarrow \infty$ vrijedi da je:

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \quad ; \quad \bar{I}_2 = 0 \quad (19.312)$$

b) Utjecaj preplitanja na raspodjelu ukupne električne struje po vodičima

Svrha preplitanja vodiča jest to da vodičima teku električne struje istog iznosa, odnosno da vrijedi izraz (19.311).

Zadatak 19.16. Izračunajte frekvenciju ravnog elektromagnetskog vala koji se u vodljivom LIH sredstvu giba faznom brzinom $v = 2,236$ m/s. Neka su značajke sredstva: $\kappa = 10$ MS/m, $\mu_r = 1000$, $\varepsilon_r = 11$.

Rješenje:

Iz izraza (17.120) i (17.121), slijedi da je fazna konstanta vodljivog sredstva opisana izrazom:

$$\beta = \sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2}} \quad (19.313)$$

dok je fazna brzina vala opisana izrazom:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (19.314)$$

Iz izraza (19.313) i (19.314), slijedi da je:

$$v^2 \cdot \left(\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2} \right) \cdot \frac{\omega \cdot \mu}{2} = \omega^2 \quad (19.315)$$

pa je:

$$\sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2} = \omega \cdot \left(\frac{2}{\mu \cdot v^2} - \varepsilon \right) \quad (19.316)$$

odakle se, nakon kvadriranja izraza (19.316), lako dobije sljedeći izraz:

$$\omega = \frac{\mu \cdot \kappa \cdot v^2}{2 \cdot \sqrt{1 - \mu \cdot \varepsilon \cdot v^2}} \quad (19.317)$$

Dakle, frekvencija ravnog vala je:

$$f = \frac{\mu \cdot \kappa \cdot v^2}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - \mu \cdot \varepsilon \cdot v^2}} = 4,999696 \text{ kHz} \quad (19.318)$$

Ako se zanemare pomaćne električne struje, onda je:

$$f = \frac{\mu \cdot \kappa \cdot v^2}{4 \cdot \pi} = 4,999696 \text{ kHz} \quad (19.319)$$

što znači da je numerički rezultat ostao isti.

Zadatak 19.17. Izračunajte faznu brzinu ravnog elektromagnetskog sinusoidalnog vala frekvencije $f = 10$ MHz koji se giba u vodljivom LIH sredstvu. Neka su značajke sredstva: $\kappa = 10$ MS/m, $\mu_r = 1000$, $\varepsilon_r = 11$.

Rješenje:

Fazna brzina vala je, prema prethodnom zadatku, opisana sljedećim izrazom:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2}}} = 99,99999997 \text{ m/s} \quad (19.320)$$

gdje je $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$.

Ako se zanemare pomaćne električne struje, onda je:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{\mu \cdot \kappa}} = 100 \text{ m/s} \quad (19.321)$$

Zadatak 19.18. Izračunajte faznu brzinu ravnog elektromagnetskog sinusoidalnog vala frekvencije $f = 50$ MHz koji se giba u LIH tlu. Neka su značajke tla: $\kappa = 0,001$ S/m, $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 10$.

Rješenje:

Fazna brzina vala je, prema prethodnim zadacima, opisana sljedećim izrazom:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega \cdot \varepsilon + \sqrt{(\omega \cdot \varepsilon)^2 + \kappa^2}} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{2}}} = 7,070969467 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad (19.322)$$

gdje je $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$.

Ako se zanemare pomaćne struje, onda je:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{\mu \cdot \kappa}} = 7,071067812 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad (19.323)$$

Zadatak 19.19. Neka je jakost električnog polja u zraku opisana sljedećim izrazom: $\vec{E}(z, t) = 50 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \vec{i}$ V/m. Odredite izraz za trenutnu i srednju vrijednost elektromagnetske snage koja prolazi kroz zamišljeni krug u ravnini $z = a$ kojemu je središte na osi z pravokutnog koordinatnog sustava. Neka je polumjer kruga $r = 2,5$ m. Neka se linearno polarizirani ravni val giba u smjeru koordinatne osi z .

Rješenje:

Zadana jakost električnog polja opisana je izrazom:

$$\vec{E}(z, t) = 50 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \vec{i} \text{ V/m} \quad (19.324)$$

pa, iz izraza (19.48) i (19.49), slijedi da je:

$$\vec{H}(z, t) = \frac{50}{Z_v} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \vec{j} \text{ A/m} \quad (19.325)$$

gdje je, prema izrazu (19.45), valni otpor zraka:

$$Z_v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,730313668 \ \Omega \quad (19.326)$$

Trenutna vrijednost elektromagnetske snage koja prolazi kroz zadani krug opisana je izrazom:

$$p = \vec{I} \Big|_{z=a} \cdot \vec{k} \cdot S = (\vec{E} \times \vec{H})_{z=a} \cdot \vec{k} \cdot S = E(a, t) \cdot H(a, t) \cdot r^2 \cdot \pi \quad (19.327)$$

gdje je Poyntingov vektor \vec{I} po svom fizikalnom značenju vektor plošne gustoće trenutne elektromagnetske snage, a njegova mjerna jedinica je W/m^2 .

Ako se izrazi (19.324) i (19.325) uvrste u izraz (19.327), dobije se sljedeći izraz:

$$p = \frac{50^2}{Z_v} \cdot \cos^2(\omega \cdot t - \beta \cdot a) \cdot r^2 \cdot \pi \quad (19.328)$$

Ako se uvrste zadani podaci, dobije se da je:

$$p = 130,2984746 \cdot \cos^2(\omega \cdot t - \beta \cdot a) \ \text{W} \quad (19.329)$$

Da bi se lakše izračunala srednja vrijednost elektromagnetske snage koja prolazi kroz zamišljeni krug, izraz (19.329) može se napisati u sljedećem obliku:

$$p = \frac{130,2984746}{2} \cdot [1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t - 2 \cdot \beta \cdot a)] \ \text{W} \quad (19.330)$$

odakle slijedi da je tražena srednja vrijednost elektromagnetske snage:

$$P_{sr} = \frac{130,2984746}{2} = 65,1492343 \ \text{W} \quad (19.331)$$

Isti rezultat daje i sljedeći izraz:

$$P_{sr} = E_{ef} \cdot H_{ef} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{130,297}{2} = 65,1492343 \ \text{W} \quad (19.332)$$

gdje je:

E_{ef} - efektivna vrijednost sinusoidalne jakosti električnog polja,

H_{ef} - efektivna vrijednost sinusoidalne jakosti magnetskog polja.

20. SINUSOIDALNI RAVNI VAL NA GRANICI DVAJU SREDSTAVA

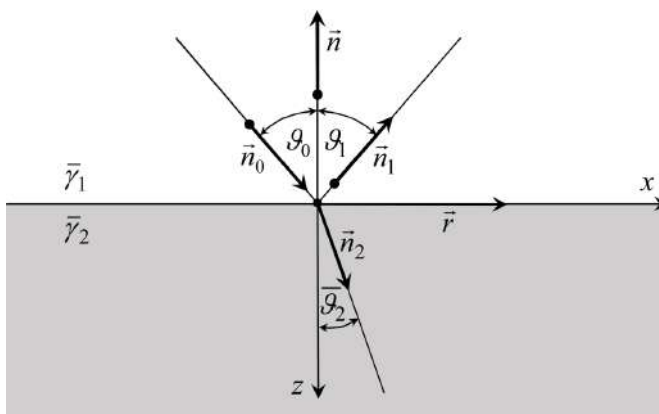
Neka je granica koja dijeli dva poluprostora ravnina. Neka je svaki poluprostor ispunjen LIH sredstvom.

Kada elektromagnetski ravni val iz prvog sredstva naiđe na graničnu ravninu, on izazove polarizaciju drugog sredstva te se u njemu induciraju vrtložne električne struje ako je drugo sredstvo vodljivo. Drugo se sredstvo opire nadiranjju vala polarizacijom i induciranim električnim strujama, što je analogno djelovanju sekundara transformatora. Opiranje sredstva uzrokuje refleksiju i lom elektromagnetskog vala. Elektromagnetsko polje polariziranih dipola i vrtložnih struja pribraja se upadnom elektromagnetskom polju.

20.1. Snellovi zakoni

Važno je istaknuti da se elektromagnetski ravni val pri upadu na granicu dvaju LIH sredstava ponaša poput svjetlosti.

Neka ravni linearno polarizirani elektromagnetski val iz sredstva 1 upada na granicu sredstva 2. Neka se upadni val giba u smjeru jediničnog vektora \vec{n}_0 , reflektirani val u smjeru jediničnog vektora \vec{n}_1 , a prolazni val u smjeru jediničnog vektora \vec{n}_2 (Slika 20.1). Sva tri jedinična vektora leže u istoj ravnini. Neka je ravni elektromagnetski val sinusoidalan.



Slika 20.1. Upadni, reflektirani i prolazni val

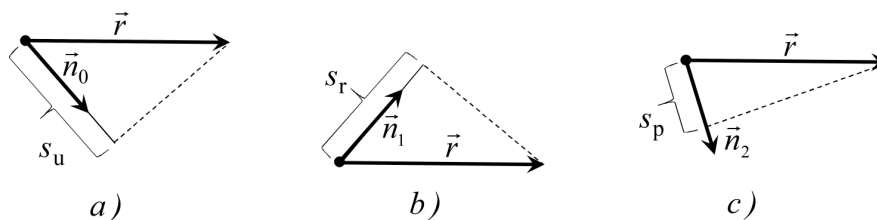
Upadni ravni val upada pod kutom ϑ_0 u odnosu na jediničnu normalu \vec{n} razdjelne ravnine dvaju sredstava. Reflektirani val se odbija pod kutom ϑ_1 u odnosu na jediničnu normalu \vec{n} razdjelne ravnine dvaju sredstava. Prolazni val s koordinatnom osi z zatvara kut ϑ_2 koji je u općem slučaju kompleksna veličina (Slika 20.1).

Značajke dvaju LIH sredstava sadržane su u valnim konstantama tih sredstva: $\vec{\gamma}_1$ i $\vec{\gamma}_2$.

Za upadnu sinusoidalnu jakost električnog polja, u fazorskom području, vrijedi jednačba:

$$\vec{E}_u = \vec{E}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot s_u} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{r}} \quad (20.1)$$

gdje su vektori \vec{n}_0 i \vec{r} prikazani na Slikama 20.1 i 20.2-a.



Slika 20.2. Projekcija vektora \vec{r} na jedinične vektore \vec{n}_0 , \vec{n}_1 i \vec{n}_2

Iz izraza (20.1) slijedi da upadni val ima samo direktnu komponentu, a njegovo se širenje izražava preko vektora \vec{r} .

U vremenskom području, izraz (20.1) glasi:

$$\vec{E}_u = \text{Re} \left[\sqrt{2} \cdot \vec{E}_u \cdot e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{r}} \cdot e^{j\omega t} \right] \quad (20.2)$$

Na mjestu upada elektromagnetskog vala vrijedi da je:

$$s_u = \vec{n}_0 \cdot \vec{r} = 0 \quad (20.3)$$

Za upadnu sinusoidalnu jakost magnetskog polja, u fazorskom području, vrijedi jednačba:

$$\vec{H}_u = \vec{H}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot s_u} = \vec{H}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{r}} \quad (20.4)$$

Lako se može pokazati da vrijedi jednačba:

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{n}_0 \times \vec{E}_0}{Z_1} \quad (20.5)$$

jer je:

$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* = \vec{I}_0 = \vec{I}_0 \cdot \vec{n}_0 \quad ; \quad \vec{H}_0 = \frac{\vec{E}_0}{Z_1} \quad (20.6)$$

Za reflektiranu sinusoidalnu jakost električnog polja, u fazorskom području, vrijedi jednačba:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot s_r} = \vec{E}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{r}} \quad (20.7)$$

gdje su vektori \vec{n}_1 i \vec{r} prikazani na Slikama 20.1 i 20.2-b.

U vremenskom području izraz (20.7) glasi:

$$\vec{E}_r = \text{Re} \left[\sqrt{2} \cdot \vec{E}_r \cdot e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \cdot \vec{E}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{r}} \cdot e^{j\omega t} \right] \quad (20.8)$$

Za reflektiranu sinusoidalnu jakost magnetskog polja, u fazorskom području, vrijedi jednačba:

$$\vec{H}_r = \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot s_r} = \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{r}} \quad (20.9)$$

Lako se može pokazati da vrijedi jednačba:

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{E}_1}{Z_1} \quad (20.10)$$

jer je:

$$\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* = \vec{I}_1 = \vec{I}_1 \cdot \vec{n}_1 \quad ; \quad \vec{H}_1 = \frac{\vec{E}_1}{Z_1} \quad (20.11)$$

Za prolaznu sinusoidalnu jakost električnog polja, u fazorskom području, vrijedi jednačba:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot s_p} = \vec{E}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \quad (20.12)$$

gdje su vektori \vec{n}_2 i \vec{r} prikazani na Slikama 20.1 i 20.2-c.

U vremenskom području izraz (20.12) glasi:

$$\vec{E}_p = \text{Re} \left[\sqrt{2} \cdot \vec{E}_p \cdot e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\sqrt{2} \cdot \vec{E}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \cdot e^{j\omega t} \right] \quad (20.13)$$

Za prolaznu sinusoidalnu jakost magnetskog polja, u fazorskom području, vrijedi jednačba:

$$\vec{H}_p = \vec{H}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot s_p} = \vec{H}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \quad (20.14)$$

Lako se može pokazati da vrijedi jednačba:

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{n}_2 \times \vec{E}_2}{Z_2} \quad (20.15)$$

jer je:

$$\vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* = \vec{I}_2 = \vec{I}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad ; \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{E}_2}{Z_2} \quad (20.16)$$

Tangencijalne komponente jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja moraju biti kontinuirane pa vrijede sljedeće jednadžbe:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_u + \vec{E}_r) = \vec{n} \times \vec{E}_p \quad ; \quad \vec{n} \times (\vec{H}_u + \vec{H}_r) = \vec{n} \times \vec{H}_p \quad (20.17)$$

pa je:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{r}} + \vec{E}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{r}}) = \vec{n} \times \vec{E}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \quad (20.18)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_0 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{r}} + \vec{H}_1 \cdot e^{-\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{r}}) = \vec{n} \times \vec{H}_2 \cdot e^{-\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \quad (20.19)$$

što znači da moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad ; \quad \vec{n} \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_1) = \vec{n} \times \vec{H}_2 \quad (20.20)$$

$$\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{r} = \vec{\gamma}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot \vec{r} = \vec{\gamma}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{r} \quad (20.21)$$

Iz izraza (20.21) i Slike 20.1, slijedi da je:

$$\vec{\gamma}_1 \cdot r \cdot \sin \vartheta_0 = \vec{\gamma}_1 \cdot r \cdot \sin \vartheta_1 = \vec{\gamma}_2 \cdot r \cdot \sin \vartheta_2 \quad (20.22)$$

odakle slijede Snellovi zakoni:

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 \quad (20.23)$$

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\vec{\gamma}_1}{\vec{\gamma}_2} \cdot \sin \vartheta_0 \quad (20.24)$$

odnosno Snellov zakon refleksije (odbijanja) elektromagnetskog vala i Snellov zakon prolaza (transmisije; loma) elektromagnetskog vala.

Iz Snellovog zakona prolaza (20.24) slijedi da je, u općem slučaju, sinus kuta loma kompleksna veličina pa je tada i kut loma kompleksna veličina. U posebnom slučaju, kada su oba sredstva savršeni LIH dielektrici, vrijedi da je:

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} = \frac{\vec{\gamma}_1}{\vec{\gamma}_2} = \frac{j \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}}{j \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \cdot \varepsilon_2}} = \frac{v_2}{v_1} \quad (20.25)$$

gdje su v_1 i v_2 brzine elektromagnetskog vala u pojedinom sredstvu, koje ne ovise o frekvenciji. Važno je uočiti da je u ovom slučaju kut loma realna veličina.

Nadalje, ako za savršene LIH dielektrike vrijedi da je $\mu_1 = \mu_2$, onda je:

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{1,2} \quad ; \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad ; \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad (20.26)$$

gdje su n_1 i n_2 indeksi loma pojedinog savršenog LIH dielektrika, $n_{1,2}$ relativni indeks loma dvaju savršenih LIH dielektrika, dok je c brzina svjetlosti u vakuumu.

20.2. Fresnelove jednadžbe

Na granici dvaju sredstava ($z = 0$) vrijede tzv. Fresnelove jednadžbe za jakost električnog polja:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (20.27)$$

$$\vec{n} \times \left(\frac{\vec{n}_0 \times \vec{E}_0}{\bar{Z}_1} + \frac{\vec{n}_1 \times \vec{E}_1}{\bar{Z}_1} \right) = \vec{n} \times \frac{\vec{n}_2 \times \vec{E}_2}{\bar{Z}_2} \quad (20.28)$$

gdje je:

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{n}_0 \times \vec{E}_0}{\bar{Z}_1} \quad ; \quad \vec{H}_1 = \frac{\vec{n}_1 \times \vec{E}_1}{\bar{Z}_1} \quad ; \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{n}_2 \times \vec{E}_2}{\bar{Z}_2} \quad (20.29)$$

Posebno je važno razmotriti dva slučaja kada je:

- vektor jakosti električnog polja okomit na upadnu ravninu,
- vektor jakosti električnog polja leži u upadnoj ravnini.

Prema Slici 20.1, upadna ravnina jest ravnina u kojoj leže jedinični vektori \vec{n}_0 , \vec{n}_1 , \vec{n}_2 i \vec{n} .

U općem slučaju, vektor jakosti električnog polja može se rastaviti na ove dvije komponente. Fresnelove jednadžbe (20.27) i (20.28) koriste se ako je vektor jakosti električnog polja okomit na upadnu ravninu, a tada vektor jakosti magnetskog polja leži u upadnoj ravnini.

Na granici dvaju sredstava ($z = 0$) vrijede Fresnelove jednadžbe za jakost magnetskog polja:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_0 + \vec{H}_1) = \vec{n} \times \vec{H}_2 \quad (20.30)$$

$$\bar{Z}_1 \cdot \vec{n} \times (\vec{n}_0 \times \vec{H}_0 + \vec{n}_1 \times \vec{H}_1) = \bar{Z}_2 \cdot \vec{n} \times (\vec{n}_2 \times \vec{H}_2) \quad (20.31)$$

gdje je:

$$\vec{E}_0 = -\bar{Z}_1 \cdot (\vec{n}_0 \times \vec{H}_0) \quad ; \quad \vec{E}_1 = -\bar{Z}_1 \cdot (\vec{n}_1 \times \vec{H}_1) \quad ; \quad \vec{E}_2 = -\bar{Z}_2 \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{H}_2) \quad (20.32)$$

Fresnelove jednadžbe (20.30) i (20.31) koriste se ako vektor jakosti električnog polja leži u upadnoj ravnini, a tada je vektor jakosti magnetskog polja okomit na upadnu ravninu.

20.3. Vektor jakosti električnog polja okomit na upadnu ravninu

Neka je vektor jakosti električnog polja okomit na upadnu ravninu (Slika 20.3). U tom se slučaju za određivanje izraza za koeficijente refleksije (odbijanja) i transmisije (prolaza) mogu koristiti Fresnelove jednadžbe za jakost električnog polja (20.27) i (20.28) jer je električno polje tangencijalno u odnosu na graničnu ravninu. Treba zadovoljiti kontinuitet tangencijalnih komponenti vektora jakosti električnog polja i vektora jakosti magnetskog polja. Za tangencijalne komponente vektora jakosti električnog polja vrijedi da je:

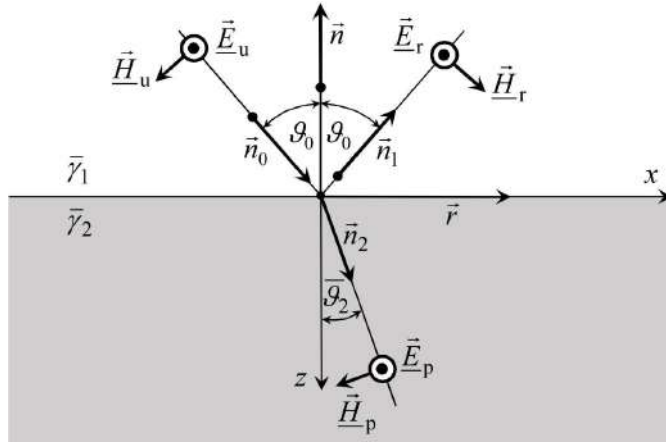
$$\vec{E}_{0y} = \vec{E}_0 \quad ; \quad \vec{E}_{1y} = \vec{E}_1 \quad ; \quad \vec{E}_{2y} = \vec{E}_2 \quad (20.33)$$

dok, prema Slici 20.3, za tangencijalne komponente vektora jakosti magnetskog polja vrijedi da je:

$$\vec{H}_{0x} = -\vec{H}_0 \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \vec{H}_{1x} = \vec{H}_1 \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \vec{H}_{2x} = -\vec{H}_2 \cdot \cos \vartheta_2 \quad (20.34)$$

odakle slijedi da je:

$$\vec{H}_{0x} = -\frac{\vec{E}_0}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \vec{H}_{1x} = \frac{\vec{E}_1}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \vec{H}_{2x} = -\frac{\vec{E}_2}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_2 \quad (20.35)$$



Slika 20.3. Vektor jakosti električnog polja okomit na upadnu ravninu

Iz zahtjeva da tangencijalne komponente jakosti polja budu kontinuirane, slijedi da je:

$$\bar{E}_{0y} + \bar{E}_{1y} = \bar{E}_{2y} \quad ; \quad \bar{H}_{0x} + \bar{H}_{1x} = \bar{H}_{2x} \quad (20.36)$$

pa, uz uvažavanje izraza (20.33) i (20.35), lako se dobije sljedeći sustav linearnih jednačbi:

$$\bar{E}_0 + \bar{E}_1 = \bar{E}_2 \quad (20.37)$$

$$\bar{E}_0 \cdot \cos \vartheta_0 - \bar{E}_1 \cdot \cos \vartheta_0 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \bar{E}_2 \cdot \cos \vartheta_2 \quad (20.38)$$

Da bi se dobili izrazi za koeficijent refleksije i koeficijent transmisije za jakost električnog polja, jednačbe (20.37) i (20.38) mogu se iskazati na sljedeći način:

$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \bar{E}_0 \quad (20.39)$$

$$\bar{E}_1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0} \cdot \bar{E}_2 = \bar{E}_0 \quad (20.40)$$

odakle slijedi da je:

$$\left(1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0}\right) \cdot \bar{E}_1 = \bar{E}_0 \cdot \left(1 - \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0}\right) \quad (20.41)$$

$$\left(1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0}\right) \cdot \bar{E}_2 = 2 \cdot \bar{E}_0 \quad (20.42)$$

Iz izraza (20.41) i (20.42), lako se dobije da je:

$$\bar{E}_1 = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_2} \cdot \bar{E}_0 \quad ; \quad \bar{E}_2 = \frac{2 \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_2} \cdot \bar{E}_0 \quad (20.43)$$

Koeficijent refleksije (odbijanja) za jakost električnog polja jest omjer tangencijalnih komponenti vektora jakosti električnog polja:

$$\bar{\rho}_{\perp}^E = \frac{\bar{E}_{1y}}{\bar{E}_{0y}} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_0} = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2} \quad (20.44)$$

dok je koeficijent transmisije (prolaza) za jakost električnog polja opisan izrazom:

$$\bar{\tau}_{\perp}^E = \frac{\bar{E}_{2y}}{\bar{E}_{0y}} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_0} = \frac{2 \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2} = 1 + \bar{\rho}_{\perp}^E \quad (20.45)$$

Iz izraza (20.35) i (20.45), slijedi da je koeficijent refleksije za jakost magnetskog polja opisan sljedećim izrazom:

$$\bar{\rho}_{\perp}^H = \frac{\bar{H}_{1x}}{\bar{H}_{0x}} = -\frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_0} = -\bar{\rho}_{\perp}^E = \frac{\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 - \cos \vartheta_0}{\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 + \cos \vartheta_0} \quad (20.46)$$

ili drukčije pisano:

$$\bar{\rho}_{\perp}^H = \frac{\cos \bar{\vartheta}_2 - \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \bar{\vartheta}_2 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \vartheta_0} \quad (20.47)$$

Iz izraza (20.35) i (20.45), slijedi da je koeficijent transmisije (prolaza) za jakost magnetskog polja opisan izrazom:

$$\bar{\tau}_{\perp}^H = \frac{\bar{H}_{2x}}{\bar{H}_{0x}} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_0} \cdot \frac{\bar{Z}_1 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\bar{Z}_2 \cdot \cos \vartheta_0} = \bar{\tau}_{\perp}^E \cdot \frac{\bar{Z}_1 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\bar{Z}_2 \cdot \cos \vartheta_0} = \frac{2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \bar{\vartheta}_2 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \vartheta_0} \quad (20.48)$$

te vrijedi da je:

$$\bar{\tau}_{\perp}^H = 1 + \bar{\rho}_{\perp}^H \quad (20.49)$$

Koeficijent refleksije i koeficijent prolaza su kompleksne veličine, što znači da se odbijeni i prolazni val razlikuju po modulu i po fazi od upadnog vala.

20.4. Vektor jakosti električnog polja leži u upadnoj ravnini

Ako vektor jakosti električnog polja leži u upadnoj ravnini, onda je vektor jakosti magnetskog polja okomit na upadnu ravninu (Slika 20.4).

U ovom se slučaju za određivanje izraza za koeficijente refleksije (odbijanja) i transmisije (prolaza) mogu koristiti Fresnelove jednadžbe za jakost magnetskog polja (20.30) i (20.31) jer je magnetsko polje tangencijalno u odnosu na graničnu ravninu. Treba zadovoljiti kontinuitet tangencijalnih komponenti vektora jakosti električnog polja i vektora jakosti magnetskog polja. Za tangencijalne komponente vektora jakosti magnetskog polja vrijedi da je:

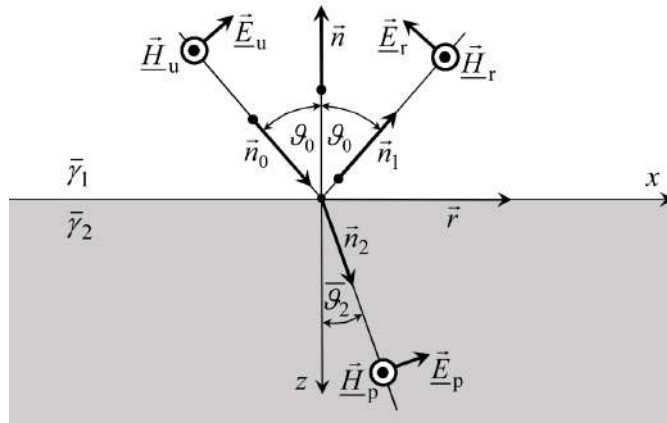
$$\bar{H}_{0y} = \bar{H}_0 \quad ; \quad \bar{H}_{1y} = \bar{H}_1 \quad ; \quad \bar{H}_{2y} = \bar{H}_2 \quad (20.50)$$

dok, prema Slici 20.4, za tangencijalne komponente vektora jakosti električnog polja vrijedi da je:

$$\bar{E}_{0x} = \bar{E}_0 \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \bar{E}_{1x} = -\bar{E}_1 \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \bar{E}_{2x} = \bar{E}_2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 \quad (20.51)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{E}_{0x} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{H}_0 \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \bar{E}_{1x} = -\bar{Z}_1 \cdot \bar{H}_1 \cdot \cos \vartheta_0 \quad ; \quad \bar{E}_{2x} = \bar{Z}_2 \cdot \bar{H}_2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 \quad (20.52)$$



Slika 20.4. Vektor jakosti električnog polja leži u upadnoj ravnini

Iz zahtjeva da tangencijalne komponente jakosti polja budu kontinuirane, slijedi da je:

$$\bar{H}_{0y} + \bar{H}_{1y} = \bar{H}_{2y} \quad ; \quad \bar{E}_{0x} + \bar{E}_{1x} = \bar{E}_{2x} \quad (20.53)$$

pa, uz uvažavanje izraza (20.50) i (20.52), lako se dobije sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\bar{H}_0 + \bar{H}_1 = \bar{H}_2 \quad (20.54)$$

$$\bar{H}_0 \cdot \cos \vartheta_0 - \bar{H}_1 \cdot \cos \vartheta_0 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \bar{H}_2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 \quad (20.55)$$

Da bi se dobili izrazi za koeficijent refleksije i koeficijent transmisije za jakost magnetskog polja, jednadžbe (20.54) i (20.55) mogu se iskazati na sljedeći način:

$$\bar{H}_1 - \bar{H}_2 = \bar{H}_0 \quad (20.56)$$

$$\bar{H}_1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \frac{\cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0} \cdot \bar{H}_2 = \bar{H}_0 \quad (20.57)$$

odakle slijedi da je:

$$\left(1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \frac{\cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0} \right) \cdot \bar{H}_1 = \bar{H}_0 \cdot \left(1 - \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \frac{\cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0} \right) \quad (20.58)$$

$$\left(1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \frac{\cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0} \right) \cdot \bar{H}_2 = 2 \cdot \bar{H}_0 \quad (20.59)$$

Iz izraza (20.58) i (20.59), lako se dobije da je:

$$\bar{H}_1 = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2} \cdot \bar{H}_0 \quad ; \quad \bar{H}_2 = \frac{2 \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2} \cdot \bar{H}_0 \quad (20.60)$$

Koeficijent refleksije (odbijanja) za jakost magnetskog polja jest omjer tangencijalnih komponenti vektora jakosti magnetskog polja:

$$\bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{H}} = \frac{\bar{H}_{1y}}{\bar{H}_{0y}} = \frac{\bar{H}_1}{\bar{H}_0} = \frac{\cos \vartheta_0 - \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2} \quad (20.61)$$

dok je koeficijent transmisije (prolaza) za jakost magnetskog polja opisan izrazom:

$$\bar{\tau}_{\text{par}}^{\text{H}} = \frac{\bar{H}_{2y}}{\bar{H}_{0y}} = \frac{\bar{H}_2}{\bar{H}_0} = \frac{2 \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2} = 1 + \bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{H}} \quad (20.62)$$

Iz izraza (20.52) i (20.61), slijedi da je koeficijent refleksije za jakost električnog polja opisan sljedećim izrazom:

$$\bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{E}} = \frac{\bar{E}_{1x}}{\bar{E}_{0x}} = -\frac{\bar{H}_1}{\bar{H}_0} = -\bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{H}} = \frac{\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 - \cos \vartheta_0}{\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \cos \bar{\vartheta}_2 + \cos \vartheta_0} \quad (20.63)$$

ili drukčije pisano:

$$\bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{E}} = \frac{\cos \bar{\vartheta}_2 - \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_0}{\cos \bar{\vartheta}_2 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_0} \quad (20.64)$$

Iz izraza (20.52) i (20.62), slijedi da je koeficijent transmisije (prolaza) za jakost električnog polja opisan izrazom:

$$\bar{\tau}_{\text{par}}^{\text{E}} = \frac{\bar{E}_{2x}}{\bar{E}_{0x}} = \frac{\bar{H}_2}{\bar{H}_0} \cdot \frac{\bar{Z}_2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\bar{Z}_1 \cdot \cos \vartheta_0} = \bar{\tau}_{\text{par}}^{\text{H}} \cdot \frac{\bar{Z}_2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\bar{Z}_1 \cdot \cos \vartheta_0} = \frac{2 \cdot \cos \bar{\vartheta}_2}{\cos \bar{\vartheta}_2 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \cos \vartheta_0} \quad (20.65)$$

te vrijedi da je:

$$\bar{\tau}_{\text{par}}^{\text{E}} = 1 + \bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{E}} \quad (20.66)$$

I u ovom su slučaju, koeficijent refleksije i koeficijent prolaza kompleksne veličine, što znači da se odbijeni i prolazni val razlikuju po modulu i po fazi od upadnog vala.

Važno je istaknuti da, prema izrazima (20.46) i (20.63), vrijedi da je:

$$\bar{\rho}_{\perp}^{\text{H}} = -\bar{\rho}_{\perp}^{\text{E}} \quad ; \quad \bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{E}} = -\bar{\rho}_{\text{par}}^{\text{H}} \quad (20.67)$$

20.5. Okomiti upad sinusoidalnog ravnog vala

Neka ravni linearno polarizirani elektromagnetski val iz sredstva 1 upada okomito na granicu sredstva 2. U ovom slučaju jakost električnog polja i jakost magnetskog polja imaju samo tangencijalne komponente, a upadnih ravnina ima beskonačno mnogo.

Okomiti upad ravnog elektromagnetskog vala može se razmatrati kao poseban slučaj prethodno razmatranih dvaju slučajeva kosih upada ravnog elektromagnetskog vala, za koji vrijedi da je:

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0 \quad ; \quad \cos \vartheta_0 = \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 = 1 \quad (20.68)$$

U ovom posebnom slučaju, Fresnelove jednačbe za jakost električnog polja (20.37) i (20.38) poprimaju novi oblik:

$$\bar{E}_0 + \bar{E}_1 = \bar{E}_2 \quad ; \quad \bar{E}_0 - \bar{E}_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \cdot \bar{E}_2 \quad (20.69)$$

odakle se lako dobije da su koeficijenti refleksije i koeficijenti prolaza:

$$\bar{\rho}_E = \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_0} = \frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad ; \quad \bar{\tau}_E = \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_0} = 1 + \bar{\rho}_E = \frac{2 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad (20.70)$$

$$\bar{\rho}_H = -\bar{\rho}_E = \frac{\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad ; \quad \bar{\tau}_H = 1 + \bar{\rho}_H = \frac{2 \cdot \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad (20.71)$$

U ovom posebnom slučaju, Fresnelove jednadžbe za jakost magnetskog polja (20.54) i (20.55) poprimaju novi oblik:

$$\bar{H}_0 + \bar{H}_1 = \bar{H}_2 \quad ; \quad \bar{H}_0 - \bar{H}_1 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \cdot \bar{H}_2 \quad (20.72)$$

odakle se lako dobije da su koeficijenti refleksije i koeficijenti prolaza:

$$\bar{\rho}_H = \frac{\bar{H}_1}{\bar{H}_0} = \frac{\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad ; \quad \bar{\tau}_H = \frac{\bar{H}_2}{\bar{H}_0} = 1 + \bar{\rho}_H = \frac{2 \cdot \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad (20.73)$$

$$\bar{\rho}_E = -\bar{\rho}_H = \frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad ; \quad \bar{\tau}_E = 1 + \bar{\rho}_E = \frac{2 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \quad (20.74)$$

Zaključak: Za tangencijalne komponente jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja ravnog sinusoidalnog vala vrijedi da je:

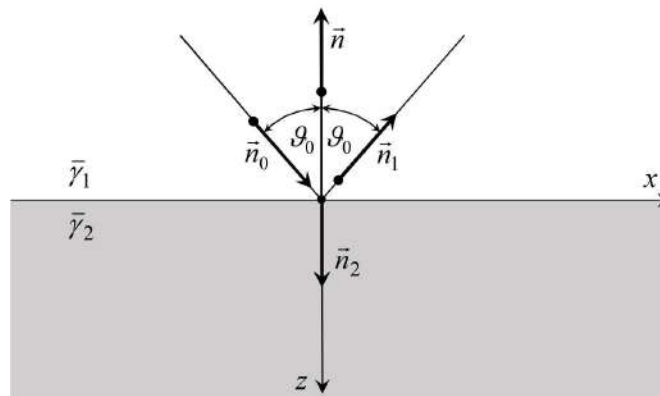
$$1 + \bar{\rho} = \bar{\tau} \quad ; \quad 1 + \bar{\rho}_\perp = \bar{\tau}_\perp \quad ; \quad 1 + \bar{\rho}_{\text{par}} = \bar{\tau}_{\text{par}} \quad (20.75)$$

Međutim, kod primjene metode oslikavanja u elektrostatici, magnetostatici i kod stacionarnih strujnih polja za koeficijent refleksije k_R i koeficijent transmisije k_T vrijedi da je:

$$k_R + k_T = 1 \quad (20.76)$$

20.6. Upad ravnog vala na granicu savršenog dielektrika i dobrog vodiča

Neka ravni linearno polarizirani elektromagnetski val iz savršenog LIH dielektrika (sredstva 1) upada koso na granicu dobrog LIH vodiča (sredstvo 2), što je prikazano na Slici 20.5.



Slika 20.5. Upad ravnog vala iz savršenog dielektrika na granicu s dobrim vodičem

Za savršeni LIH dielektrik vrijede sljedeći izrazi:

$$\bar{\gamma}_1 = j \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1} \quad (20.77)$$

dok za dobar LIH vodič vrijede izrazi:

$$\bar{\gamma}_2 = \sqrt{\omega \cdot \mu_2 \cdot \kappa_2} \cdot e^{j\pi/4} \quad (20.78)$$

Prema izrazima (20.24), (20.77) i (20.78), vrijedi da je:

$$\sin \bar{\vartheta}_2 = \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_2} \cdot \sin \vartheta_0 = e^{j\pi/4} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_1 \cdot \varepsilon_1}{\mu_2 \cdot \kappa_2}} \cdot \sin \vartheta_0 \quad (20.79)$$

Budući da vrijedi da je:

$$\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_1 \cdot \varepsilon_1}{\mu_2 \cdot \kappa_2}} \approx 0 \quad (20.80)$$

čak i za vrlo visoke frekvencije reda GHz, slijedi da je:

$$\sin \bar{\vartheta}_2 \approx 0 \quad ; \quad \bar{\vartheta}_2 \approx 0 \quad (20.81)$$

što znači da se u dobrom vodiču prolazni elektromagnetski val širi približno okomito u odnosu na površinu vodiča, odnosno približno okomito u odnosu na graničnu ravninu savršenog dielektrika i dobrog vodiča (Slika 20.5).

U ovom slučaju vrijedi da je:

$$\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} = \frac{\mu_2 \cdot \bar{\gamma}_1}{\mu_1 \cdot \bar{\gamma}_2} = e^{j\pi/4} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_2 \cdot \varepsilon_1}{\mu_1 \cdot \kappa_2}} \approx 0 \quad (20.82)$$

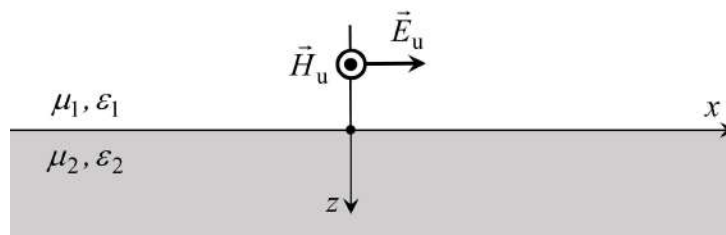
pa iz izraza (20.44) - (20.47) ili pak iz izraza (20.61) - (20.64) slijedi da su koeficijenti refleksije i prolaza jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja:

$$\bar{\rho}_E \approx -1 \quad ; \quad \bar{\tau}_E \approx 0 \quad ; \quad \bar{\rho}_H \approx 1 \quad ; \quad \bar{\tau}_H \approx 2 \quad (20.83)$$

što znači da je koeficijent prolaza električnog polja zanemariv u odnosu na koeficijent prolaza magnetskog polja. Važno je istaknuti da je dubina prodiranja elektromagnetskog vala u dobar vodič vrlo malena, odnosno da elektromagnetski val ne prodire u supravodič.

20.7. Zadaci

Zadatak 20.1. Neka je vektor jakosti upadnog električnog polja opisan sljedećim izrazom: $\vec{E}_u = 100 \cdot \cos(\omega \cdot t - 6 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{i}$ V/m. Neka u trenutku $t = 0$ elektromagnetski linearno polarizirani sinusoidalni ravni val upada okomito na graničnu ravninu između sredstva 1 ($\mu_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r1} = 4$, $\kappa_1 = 0$) i sredstva 2 ($\mu_{r2} = 4$, $\varepsilon_{r2} = 9$, $\kappa_2 = 0$). Za upadni, reflektirani i prolazni val napišite izraze koji opisuju vremensku ovisnost vektora jakosti električnog polja i vektora jakosti magnetskog polja.



Slika 20.6. Okomiti upad ravnog vala na granicu dvaju savršenih LIH dielektrika

Rješenje:

Zadani vektor jakosti upadnog električnog polja ravnog linearno polariziranog vala opisan je izrazom:

$$\vec{E}_u = 100 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta_1 \cdot z) \cdot \vec{i} = 100 \cdot \cos(\omega \cdot t - 6 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{i} \text{ V/m} \quad (20.84)$$

odakle slijedi da je fazna konstanta sredstva 1:

$$\beta_1 = \omega \cdot \sqrt{\mu_1 \cdot \varepsilon_1} = 6 \cdot \pi \quad (20.85)$$

pa je fazna konstanta sredstva 2:

$$\beta_2 = \beta_1 \cdot \sqrt{\frac{\mu_{r2} \cdot \varepsilon_{r2}}{\mu_{r1} \cdot \varepsilon_{r1}}} = 3 \cdot \beta_1 = 18 \cdot \pi \quad (20.86)$$

Valni otpor sredstva 1 opisan je izrazom:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = 188,3651568 \ \Omega \quad (20.87)$$

dok je valni otpor sredstva 2 opisan izrazom:

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = 251,1535424 \ \Omega \quad (20.88)$$

Koeficijenti refleksije i prolaza (transmisije) za jakost električnog polja su:

$$\rho_E = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{7} \quad ; \quad \tau_E = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{8}{7} \quad (20.89)$$

Iz izraza (20.84) slijedi da je vektor jakosti upadnog magnetskog polja opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{H}_u = \frac{E_u}{Z_1} \cdot \vec{j} = 0,5308837456 \cdot \cos(\omega \cdot t - 6 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{j} \text{ A/m} \quad (20.90)$$

Vektor jakosti reflektiranog električnog polja opisan je izrazom:

$$\vec{E}_r = \rho_E \cdot 100 \cdot \cos(\omega \cdot t + 6 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{i} \text{ V/m} = \frac{100}{7} \cdot \cos(\omega \cdot t + 6 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{i} \text{ V/m} \quad (20.91)$$

pa je vektor jakosti reflektiranog magnetskog polja opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{H}_r = -\frac{E_r}{Z_1} \cdot \vec{j} = -0,07584053509 \cdot \cos(\omega \cdot t + 6 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{j} \text{ A/m} \quad (20.92)$$

Vektor jakosti prolaznog (transmitiranog) električnog polja opisan je izrazom:

$$\vec{E}_p = \tau_E \cdot 100 \cdot \cos(\omega \cdot t - 18 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{i} \text{ V/m} = \frac{800}{7} \cdot \cos(\omega \cdot t - 18 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{i} \text{ V/m} \quad (20.93)$$

pa je vektor jakosti prolaznog magnetskog polja opisan sljedećim izrazom:

$$\vec{H}_p = \frac{E_p}{Z_2} \cdot \vec{j} = 0,4550432105 \cdot \cos(\omega \cdot t - 18 \cdot \pi \cdot z) \cdot \vec{j} \text{ A/m} \quad (20.94)$$

21. ELEKTROENERGETSKI PRIJENOSNI VODOVI

Električni vod je skup od jednog ili više vodiča, izolatora i različite druge opreme koji služi za prijenos, raspodjelu i razvođenje električne energije ili u telekomunikacijske svrhe.

Elektroenergetski prijenosni vodovi služe za prijenos električne energije na veće udaljenosti te za njezinu raspodjelu. U pravilu su visokonaponski, a mogu biti: nadzemni (zračni) prijenosni vodovi i kabelski prijenosni vodovi. Kabelski prijenosni vodovi mogu biti podzemni ili pak podvodni.

Telekomunikacijski prijenosni vodovi služe za prijenos i razvođenje analognih ili digitalnih signala u javnim i posebnim mrežama te telekomunikacijskim instalacijama u građevinama i drugim objektima. U elektronici se za prijenos elektromagnetske energije na visokim frekvencijama koriste i šuplje metalne cijevi koje se nazivaju valovodima, dok se na vrlo visokim frekvencijama koriste i dielektrični valovodi.

U ovom udžbeniku, koji je namijenjen studentima iz polja elektrotehnike, grana elektroenergetike i elektrostrojarstva, razmatrat će se samo teorija elektroenergetskih prijenosnih vodova.

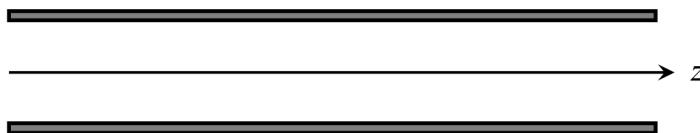
Za numeričko modeliranje elektroenergetskih prijenosnih vodova mogu se koristiti elektromagnetski modeli, koji su utemeljeni na Maxwellovim diferencijalnim jednažbama, gdje su svi dijelovi elektroenergetskog voda međusobno elektromagnetski spregnuti. Međutim, elektromagnetski modeli električnih mreža, čije su sastavnice i elektroenergetski prijenosni vodovi, spadaju u napredne numeričke modele i neće biti razmatrani u ovom udžbeniku.

U ovom poglavlju će se razmatrati numerički model elektroenergetskog prijenosnog voda (engl. *TLM – Transmission Line Model*), što je aproksimacija zbivanja u elektromagnetskom polju, koja se dobije iz Maxwellovih diferencijalnih jednažbi.

Pojednostavljena teorija elektroenergetskog prijenosnog voda izvodi se iz teorije elektromagnetskog polja, a u njoj se vektori jakosti električnog polja i jakosti magnetskog polja zamjenjuju električnim strujama u vodičima i električnim naponima između vodiča (poprečnim električnim naponima). Ustvari, prijenosni vodovi se modeliraju poput električnih mreža s koncentriranim parametrima, što znači da se koriste Kirchhoffovi zakoni, ali su parametri prijenosnog voda raspodijeljeni. To znači da su (poprečni) električni napon i električna struja duž prijenosnog voda promjenjivi. Ovakav pojednostavljeni model prijenosnog voda omogućuje numeričko modeliranje elektroenergetskih prijenosnih vodova protjecanih: vremenski konstantnim električnim strujama, sinusoidalnim električnim strujama i tranzijentnim električnim strujama. Drugim riječima, numerički model elektroenergetskog prijenosnog voda (TLM) služi za numeričko modeliranje sinusoidalnih električnih mreža i prijelaznih pojava u električnim mrežama i na elektroenergetskim prijenosnim vodovima.

21.1. Jednažbe dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda

Neka su R , L , C i G radni otpor, induktivitet, kapacitet i odvod po jedinici duljine elektroenergetskog prijenosnog voda. Ovi se parametri zovu primarnim parametrima električnog voda ili pak jediničnim parametrima električnog voda. Električni napon između vodiča i električne struje u vodičima ovise o položaju točke promatranja duž voda, odnosno o koordinati z (Slika 21.1).



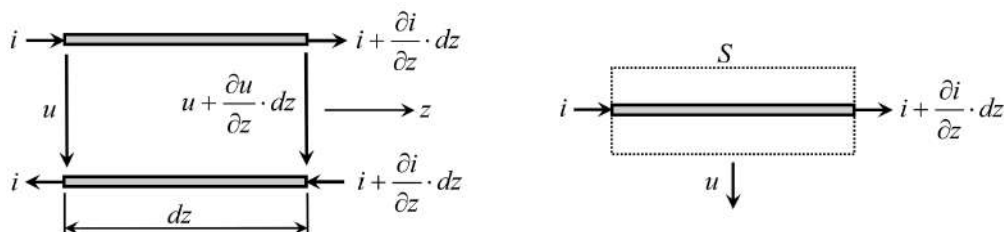
Slika 21.1. Dvožični elektroenergetski prijenosni vod

Važno je podsjetiti se da u vremenski promjenjivom elektromagnetskom polju električni napon ovisi o krivulji integracije pa kod električnog voda napon između dvije točke nije jednoznačan. Poprečni električni napon jest poseban slučaj električnog napona između dviju točaka koji je jednak razlici skalarnih električnih potencijala između tih točaka. Ono što se ovdje naziva električnim naponom jest poprečni električni napon. U tom kontekstu električni napon uzduž voda (uzdužni električni napon) može se zvati padom električnog napona.

Promjena električnog napona (električnog potencijala) duž vodiča postoji i kod električnih mreža s koncentriranim parametrima, ali promjena električne struje duž električnog vodiča jest novi pojam. Ona nastaje iz dva razloga. Prvi razlog je to što izolator između električnih vodiča nije savršen, dok je drugi razlog to što između električnih vodiča postoji kapacitivna sprega pa kapacitivna komponenta električne struje prelazi iz jednog električnog vodiča u drugi.

Diferencijalne jednačbe dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda slijede iz Maxwellovih diferencijalnih jednačbi za infinitezimalni dio elektroenergetskog prijenosnog voda duljine dz .

Prva diferencijalna jednačba dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda može se izvesti iz prvog Kirchhoffovog zakona, koji vrijedi za infinitezimalni odsječak elektroenergetskog prijenosnog voda duljine dz (Slike 21.2).



Slika 21.2. Električni naponi i električne struje infinitezimalnog odsječka dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda

Prema prvom Kirchhoffovom zakonu, zbroj električnih struja koje ulaze u volumen zatvoren plohom S (Slika 21.2) jednak je zbroju električnih struja koje izlaze iz tog volumena:

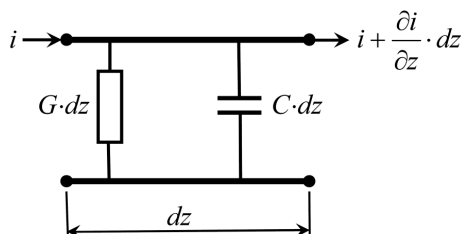
$$i = \left(i + \frac{\partial i}{\partial z} \cdot dz \right) + (G \cdot dz) \cdot u + (C \cdot dz) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (21.1)$$

gdje se za električnu struju koju odvodi infinitezimalni odvod $G \cdot dz$ i pomaćnu električnu struju koju odvodi infinitezimalni kapacitet $C \cdot dz$ uzima da je električni napon u konstantan duž infinitezimalnog odsječka elektroenergetskog prijenosnog voda.

Iz izraza (21.1), lako se dobije općepoznata prva diferencijalna jednačba dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda, koja glasi:

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (21.2)$$

i može se opisati nadomjesnom šemom prikazanom na Slici 20.3.

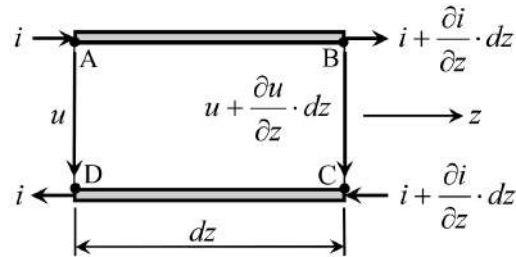


Slika 21.3. Nadomjesna šema za prvu diferencijalnu jednačbu dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda

Druga diferencijalna jednačba dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda može se izvesti iz Faradayevog zakona elektromagnetske indukcije, odnosno iz druge Maxwellove integralne jednačbe (6.95), koja glasi:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (21.3)$$

koja vrijedi i za infinitezimalni odsječak dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda (Slika 21.4).



Slika 21.4. Infinitezimalni odsječak dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda

Unutar vodiča vektor jakosti električnog polja ima uzdužnu komponentu, a između vodiča postoji poprečna komponenta vektora jakosti električnog polja. Pravokutna integracijska krivulja K , naznačena u izrazu (21.3), prema Slici 21.4 definirana je točkama A, B, C i D.

Prema izrazu (21.3) i Slici 21.4, vrijedi da je:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -L_{\text{vanj}} \cdot dz \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (21.4)$$

gdje je L_{vanj} jedinični vanjski induktivitet elektroenergetskog prijenosnog voda.

Nadalje vrijedi da je:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = R \cdot dz \cdot i + L_{\text{un}} \cdot dz \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (21.5)$$

$$\int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz \right) - u = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz \quad (21.6)$$

gdje je L_{un} jedinični unutarnji induktivitet elektroenergetskog prijenosnog voda.

Iz izraza (21.4) – (21.6), lako se dobije općepoznata druga diferencijalna jednačba dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda, koja glasi:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (21.7)$$

gdje je:

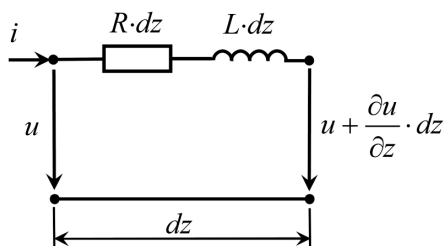
$$L = L_{\text{un}} + L_{\text{vanj}} \quad (21.8)$$

Jedinični radni otpor elektroenergetskog prijenosnog voda R i jedinični unutarnji induktivitet elektroenergetskog prijenosnog voda L_{un} jednaki su ukupnom električnom otporu i ukupnom unutarnjem induktivitetu obaju vodiča dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda. Jedinični radni otpor i jedinični unutarnji induktivitet elektroenergetskog prijenosnog voda frekvencijski su ovisni parametri pa se u numeričkim modelima mogu aproksimirati jediničnim radnim otporom i jediničnim unutarnjim induktivitetom elektroenergetskog prijenosnog voda koji vrijede za vremenski konstantnu električnu struju.

Druga diferencijalna jednačba dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda (21.7) može se opisati nadomjesnom šemom prikazanom na Slici 21.5. Ako se na nadomjesnu šemu primjeni drugi Kirchhoffov zakon, slijedi da je:

$$R \cdot dz \cdot i + L \cdot dz \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz - u = 0 \quad (21.9)$$

odakle se lako dobije druga diferencijalna jednačba elektroenergetskog prijenosnog voda (21.7).



Slika 21.5. Nadomjesna šema za drugu diferencijalnu jednačbu dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda

Dakle, diferencijalne jednačbe dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda* glase:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R \cdot i + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (21.10)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G \cdot u + C \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (21.11)$$

a to su parcijalne diferencijalne jednačbe prvog reda koje ne uzimaju u račun međusobnu elektromagnetsku spregu između infinitezimalnih odsječaka voda.

Diferencijalne jednačbe (21.10) i (21.11) mogu se derivirati po z i po t pa se dobiju sljedeći izrazi:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R \cdot \frac{\partial i}{\partial z} + L \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = R \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + L \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (21.12)$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = G \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21.13)$$

Iz diferencijalnih jednačbi (21.10) - (21.13), lako se dobiju sljedeće parcijalne diferencijalne jednačbe drugog reda†:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R \cdot G \cdot u + (R \cdot C + L \cdot G) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (21.14)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = R \cdot G \cdot i + (R \cdot C + L \cdot G) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (21.15)$$

U fazorskom području, parcijalne diferencijalne jednačbe voda prvog reda (21.10) i (21.11) se transformiraju u sljedeće parcijalne diferencijalne jednačbe:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = -(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \bar{I} \quad (21.16)$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial z} = -(G + j \cdot \omega \cdot C) \cdot \bar{U} \quad (21.17)$$

dok se parcijalne diferencijalne jednačbe voda drugog reda (21.14) i (21.15), slično kao kod ravnog elektromagnetskog vala, transformiraju u Helmholtzove homogene diferencijalne jednačbe:

* U literaturi neki autori ove diferencijalne jednačbe nazivaju telegrafskim jednačbama voda

† U literaturi neki autori ove diferencijalne jednačbe nazivaju telegrafskim jednačbama voda

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{U} \quad (21.18)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial z^2} = \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{I} \quad (21.19)$$

gdje je valna konstanta prijenosnog voda $\bar{\gamma}$ opisana sljedećim izrazom:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (G + j \cdot \omega \cdot C)} \quad (21.20)$$

Rješenja Helmholtzovih homogenih diferencijalnih jednadžbi (21.18) i (21.19) opisana su sljedećim izrazima:

$$\bar{U} = \bar{A}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{A}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (21.21)$$

$$\bar{I} = \bar{B}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{B}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (21.22)$$

gdje su $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{B}_1$ i \bar{B}_2 nepoznate kompleksne konstante koje se određuju na temelju zadovoljenja zadanih graničnih uvjeta.

Ako se izrazi (21.21) i (21.22) uvrste u izraz (21.16), dobije se sljedeći izraz:

$$\bar{\gamma} \cdot (-\bar{A}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{A}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z}) = -(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot (\bar{B}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{B}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z}) \quad (21.23)$$

odakle slijedi da je:

$$[-\bar{\gamma} \cdot \bar{A}_1 + (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \bar{B}_1] \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + [\bar{\gamma} \cdot \bar{A}_2 + (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \bar{B}_2] \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} = 0 \quad (21.24)$$

pa je:

$$-\bar{\gamma} \cdot \bar{A}_1 + (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \bar{B}_1 = 0 \quad (21.25)$$

$$\bar{\gamma} \cdot \bar{A}_2 + (R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \bar{B}_2 = 0 \quad (21.26)$$

Iz izraza (21.25) i (21.26), slijedi da je:

$$\frac{\bar{A}_1}{\bar{B}_1} = -\frac{\bar{A}_2}{\bar{B}_2} = \frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{\bar{\gamma}} = \bar{Z}_c \quad (21.27)$$

gdje je \bar{Z}_c valna impedancija prijenosnog voda, koja je poznata i pod nazivom: karakteristična impedancijom prijenosnog voda.

Iz izraza (21.21) i (21.27) slijedi da je valna impedancija prijenosnog voda opisana izrazom:

$$\bar{Z}_c = \frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{\bar{\gamma}} = \frac{\bar{\gamma}}{G + j \cdot \omega \cdot C} = \sqrt{\frac{R + j \cdot \omega \cdot L}{G + j \cdot \omega \cdot C}} = Z_c \cdot e^{j \cdot \varphi_c} \quad (21.28)$$

Iako se može uspostaviti analogija između jednadžbi dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda i jednadžbi ravnog vala, valnu impedanciju prijenosnog voda treba fizikalno razlikovati od valne impedancije sredstva koja se pojavljuje kod ravnog sinusoidalnog vala.

Valna konstanta prijenosnog voda može se opisati sljedećim izrazom:

$$\bar{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta \quad (21.29)$$

gdje je α prigušna konstanta prijenosnog voda, dok je β fazna konstanta prijenosnog voda.

Brzina širenja elektromagnetskog vala duž prijenosnog voda, odnosno fazna brzina elektromagnetskog vala definirana je izrazom:

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (21.30)$$

Neka je:

$$\bar{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi_{1u}} \quad ; \quad \bar{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\varphi_{2u}} \quad (21.31)$$

$$\bar{B}_1 = B_1 \cdot e^{j\varphi_{1i}} \quad ; \quad \bar{B}_2 = B_2 \cdot e^{j\varphi_{2i}} \quad (21.32)$$

Iz izraza (21.21), (21.22), (21.31) i (21.32), slijedi da je:

$$\bar{U} = A_1 \cdot e^{j\varphi_{1u}} \cdot e^{-(\alpha+j\beta)z} + A_2 \cdot e^{j\varphi_{2u}} \cdot e^{(\alpha+j\beta)z} \quad (21.33)$$

$$\bar{I} = B_1 \cdot e^{j\varphi_{1i}} \cdot e^{-(\alpha+j\beta)z} + B_2 \cdot e^{j\varphi_{2i}} \cdot e^{(\alpha+j\beta)z} \quad (21.34)$$

pa je:

$$\bar{U} = A_1 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j(\beta z - \varphi_{1u})} + A_2 \cdot e^{\alpha z} \cdot e^{j(\beta z + \varphi_{2u})} \quad (21.35)$$

$$\bar{I} = B_1 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j(\beta z - \varphi_{1i})} + B_2 \cdot e^{\alpha z} \cdot e^{j(\beta z + \varphi_{2i})} \quad (21.36)$$

Iz izraza (21.35) i (21.36), slijedi da su jakost električnog polja i jakost magnetskog polja u vremenskom području opisane izrazima:

$$u(z, t) = u_{\text{dir}}(z, t) + u_{\text{inv}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1u}) + \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{\alpha z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2u}) \quad (21.37)$$

$$i(z, t) = i_{\text{dir}}(z, t) + i_{\text{inv}}(z, t) = \sqrt{2} \cdot B_1 \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1i}) + \sqrt{2} \cdot B_2 \cdot e^{\alpha z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2i}) \quad (21.38)$$

Direktni elektromagnetski val se kreće u smjeru osi z , a inverzni elektromagnetski val u suprotnom smjeru. Svaki se od tih valova prigušuje u smjeru svog širenja.

Fazni kutovi električnog napona i električne struje povezani su preko kuta valne impedancije prijenosnog voda. Vrijedi da je:

$$\frac{\bar{A}_1}{\bar{B}_1} = \frac{A_1}{B_1} \cdot e^{j(\varphi_{1u} - \varphi_{1i})} = Z_c \cdot e^{j\varphi_c} \quad (21.39)$$

$$\frac{\bar{A}_2}{\bar{B}_2} = \frac{A_2}{B_2} \cdot e^{j(\varphi_{2u} - \varphi_{2i})} = -Z_c \cdot e^{j\varphi_c} = Z_c \cdot e^{j(\varphi_c + \pi)} \quad (21.40)$$

odakle slijedi da je:

$$B_1 = \frac{A_1}{Z_c} \quad ; \quad \varphi_{1i} = \varphi_{1u} - \varphi_c \quad (21.41)$$

$$B_2 = \frac{A_2}{Z_c} \quad ; \quad \varphi_{2i} = \varphi_{2u} - \varphi_c - \pi \quad (21.42)$$

Iz izraza (21.37), (21.38), (21.41) i (21.42), slijedi da se električni napon i električna struja u vremenskom području mogu opisati i sljedećim izrazima:

$$u(z, t) = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1u}) + \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{\alpha z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2u}) \quad (21.43)$$

$$i(z, t) = \sqrt{2} \cdot \frac{A_1}{Z_c} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z + \varphi_{1u} - \varphi_c) - \sqrt{2} \cdot \frac{A_2}{Z_c} \cdot e^{\alpha \cdot z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot z + \varphi_{2u} - \varphi_c) \quad (21.44)$$

21.2. Dvožični elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka

Za dvožični elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka vrijedi da je:

$$R = G = 0 \quad (21.45)$$

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad ; \quad \bar{\gamma} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (21.46)$$

$$\bar{Z}_c = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad ; \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (21.47)$$

što znači da je širenje elektromagnetskog vala duž dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda bez gubitaka analogno širenju ravnog elektromagnetskog vala u savršenom LIH dielektriku.

U ovom posebnom slučaju, fazna brzina vala ne ovisi o frekvenciji, a na razmaku od jedne valne duljine (λ) prostorna faza se promijeni za $2 \cdot \pi$ pa vrijede izrazi:

$$\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi \quad ; \quad \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} = \frac{1}{f \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{v}{f} \quad (21.48)$$

Neka su vodiči osamljenog zračnog dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda razmaknuti za d (Slika 21. 6) te neka je polumjer obaju vodiča r_0 i $d \gg r_0$.



Slika 21.6. Zračni dvožični elektroenergetski prijenosni vod

Uz zanemarenje gubitaka osamljenog zračnog dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda te uz zanemarenje unutarnjeg induktiviteta voda, jedinični induktivitet i jedinični kapacitet voda opisani su sljedećim izrazima:

$$L = L_{\text{vanj}} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{r_0} \quad ; \quad C = \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r_0}} \quad (21.49)$$

pa je, prema izrazima (21.47), fazna brzina vala jednaka brzini svjetlosti:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} = c \quad (21.50)$$

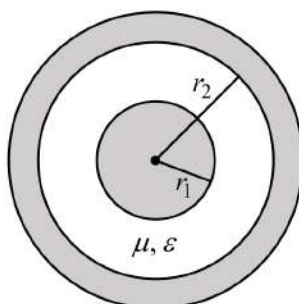
dok je valna impedancija prijenosnog voda, koja se u ovom slučaju svodi na valni otpor prijenosnog voda, opisana izrazom:

$$\bar{Z}_c = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \ln \frac{d}{r_0} = \frac{1}{\pi} \cdot Z_0 \cdot \ln \frac{d}{r_0} \quad (21.51)$$

gdje je valni otpor zraka Z_0 opisan izrazom (19.45).

Dakle, u slučaju zračnog dvožičnog elektroenergetskog prijenosnog voda bez gubitaka, elektromagnetska energija se energija duž voda prenosi brzinom svjetlosti.

Neka su vodiči koaksijalnog (suosnog) dvožičnog kablenskog prijenosnog voda prikazani na Slici 21.7.



Slika 21.7. Koaksijalni dvožični kablenski prijenosni vod

Uz zanemarenje gubitaka dvožičnog koaksijalnog kablenskog prijenosnog voda te uz zanemarenje unutarnjeg induktiviteta obaju vodiča, jedinični induktivitet i jedinični kapacitet voda opisani su sljedećim izrazima:

$$L = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (21.52)$$

pa je, prema izrazima (21.47), fazna brzina vala:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \quad (21.53)$$

dok je valna impedancija koaksijalnog kablenskog prijenosnog voda, koja se u ovom slučaju svodi na valni otpor koaksijalnog kablenskog prijenosnog voda, opisana izrazom:

$$\bar{Z}_c = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (21.54)$$

21.3. Električni napon i električna struja duž dvožičnog prijenosnog voda

Neka su električni napon i električna struja sinusoidalni. U tom slučaju, oni su opisani izrazima (21.21) i (21.22), koji glase:

$$\bar{U} = \bar{A}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{A}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad ; \quad \bar{I} = \bar{B}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{B}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (21.55)$$

pa je prema izrazu (21.27):

$$\bar{U} = \bar{A}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{A}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad ; \quad \bar{I} = \frac{\bar{A}_1}{\bar{Z}_c} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} - \frac{\bar{A}_2}{\bar{Z}_c} \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (21.56)$$

Sustav linearnih jednadžbi (21.56) u matricnom zapisu glasi:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\bar{\gamma} \cdot z} & e^{\bar{\gamma} \cdot z} \\ \frac{1}{\bar{Z}_c} & -\frac{1}{\bar{Z}_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.57)$$

Neka je duljina dvožičnog prijenosnog voda ℓ te neka je početak voda $z = z_1$, a kraj voda $z = z_2$ (Slike 21.8 i 21.9).



Slika 21.8. Jednožični prikaz dvožičnog prijenosnog voda



Slika 21.9. Pojednostavljeni prikaz električnih napona i električnih struja dvožičnog prijenosnog voda

Iz izraza (21.57), slijedi da su električni napon i električna struja na početku voda opisani sljedećim matricnim izrazom:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} & e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1}}{\bar{Z}_c} & -\frac{e^{\bar{\gamma} \cdot z_1}}{\bar{Z}_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.58)$$

gdje je:

\bar{U}_1 - fazor električnog napona na početku dvožičnog prijenosnog voda,

\bar{I}_1 - fazor električne struje na početku dvožičnog prijenosnog voda.

Nakon invertiranja matrice sustava linearnih jednadžbi (21.58), dobije se da je:

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} = -\frac{\bar{Z}_c}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{e^{\bar{\gamma} \cdot z_1}}{\bar{Z}_c} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ -\frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1}}{\bar{Z}_c} & e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} & \frac{\bar{Z}_c \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} \\ \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} & -\frac{\bar{Z}_c \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} \quad (21.59)$$

Iz matricnih izraza (21.57) i (21.59), lako se dobije da su raspodjela električnog napona i raspodjela električne struje duž dvožičnog prijenosnog voda, izražene preko električnog napona i električne struje na početku prijenosnog voda, opisane sljedećim matricnim izrazom:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\bar{\gamma} \cdot z} & e^{\bar{\gamma} \cdot z} \\ \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot z}}{\bar{Z}_c} & -\frac{e^{\bar{\gamma} \cdot z}}{\bar{Z}_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} & \frac{\bar{Z}_c \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} \\ \frac{e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} & -\frac{\bar{Z}_c \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} \quad (21.60)$$

koji, nakon množenja matrica, poprima novi oblik:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U} \\ \bar{I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)) & -\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)) \\ -\frac{1}{\bar{Z}_c} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)) & \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} \quad (21.61)$$

gdje je:

$$\operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)) = \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)} + e^{-\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)}}{2} \quad (21.62)$$

$$\operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)) = \frac{e^{\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)} - e^{-\bar{\gamma} \cdot (z - z_1)}}{2} \quad (21.63)$$

Iz matičnog izraza (21.61), slijedi da su električni napon i električna struja na kraju dvožičnog prijenosnog voda, izraženi preko električnog napona i električne struje na početku prijenosnog voda, opisani sljedećim matičnim izrazom:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & -\bar{Z}_c \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \\ -\frac{1}{\bar{Z}_c} \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & \operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} \quad (21.64)$$

gdje je:

\bar{U}_2 - fazor električnog napona na kraju dvožičnog prijenosnog voda,

\bar{I}_2 - fazor električne struje na kraju dvožičnog prijenosnog voda.

Nakon invertiranja matrice sustava linearnih jednažbi (21.64), dobije se da je:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & \bar{Z}_c \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \\ \frac{1}{\bar{Z}_c} \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & \operatorname{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.65)$$

što opisuje električni napon i električnu struju na početku dvožičnog prijenosnog voda preko električnog napona i električne struje na kraju prijenosnog voda.

21.4. Izražavanje električnih struja u rubnim točkama prijenosnog voda preko električnih napona

Iz rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednažbi prijenosnog voda, opisanih izrazima (21.56), slijedi da je:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} & e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ e^{-\bar{\gamma} \cdot z_2} & e^{\bar{\gamma} \cdot z_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.66)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{Z}_c} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ e^{-\bar{\gamma} \cdot z_2} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.67)$$

Nakon invertiranja matrice sustava linearnih jednažbi (21.66), dobije se da je:

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \cdot \begin{bmatrix} e^{\bar{\gamma} \cdot z_2} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ -e^{-\bar{\gamma} \cdot z_2} & e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.68)$$

pa se, nakon uvrštenja izraza (21.68) u izraz (21.67), dobije da je:

$$\begin{Bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ e^{-\bar{\gamma} \cdot z_2} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\bar{\gamma} \cdot z_2} & -e^{\bar{\gamma} \cdot z_1} \\ -e^{-\bar{\gamma} \cdot z_2} & e^{-\bar{\gamma} \cdot z_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.69)$$

koji, nakon množenja matrica, poprima novi oblik:

$$\begin{Bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & -2 \\ 2 & -2 \cdot \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.70)$$

odakle slijedi konačni izraz:

$$\begin{Bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} & -\frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \\ \frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} & -\frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.71)$$

21.5. TKE – sustav jednadžbi dionice dvožičnog prijenosnog voda

Ako se koristi tehnika konačnih elemenata (TKE), onda za dionicu dvožičnog prijenosnog voda prikazanu na Slici 21.9 treba uvesti nove oznake prikazane na Slici 21.10, gdje je:

\bar{U}_{n1} - fazor električnog napona lokalnog čvora 1 dvočvornog konačnog elementa,

\bar{U}_{n2} - fazor električnog napona lokalnog čvora 2 dvočvornog konačnog elementa,

\bar{I}_{n1} - fazor električne struje lokalnog čvora 1 dvočvornog konačnog elementa,

\bar{I}_{n2} - fazor električne struje lokalnog čvora 2 dvočvornog konačnog elementa.



Slika 21.10. Električni naponi i električne struje dvočvornog konačnog elementa

Na temelju usporedbe veličina na Slikama 21.9 i 21.10, lako je zaključiti da vrijede sljedeći izrazi:

$$\bar{U}_{n1} = \bar{U}_1 \quad ; \quad \bar{U}_{n2} = \bar{U}_2 \quad ; \quad \bar{I}_{n1} = \bar{I}_1 \quad ; \quad \bar{I}_{n2} = -\bar{I}_2 \quad (21.72)$$

Prema izrazima (21.71) i (21.72), u tehnici konačnih elemenata potpuni lokalni sustav linearnih jednadžbi dionice dvožičnog prijenosnog voda (dvočvornog konačnog elementa) glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} & -\frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} & \frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_{n1} \\ \bar{U}_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{I}_{n1} \\ \bar{I}_{n2} \end{Bmatrix} \quad (21.73)$$

dok nepotpuni lokalni sustav linearnih jednadžbi dionice dvožičnog prijenosnog voda glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} & -\frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} & \frac{1}{\bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_{n1} \\ \bar{U}_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21.74)$$

U tehnici konačnih elemenata, nepotpuni globalni sustav linearnih jednažbi dobije se uključivanjem nepotpunih lokalnih sustava linearnih jednažbi u nepotpuni globalni sustav linearnih jednažbi. Vektori električnih struja koje ulaze u lokalne čvorove konačnih elemenata mogu se proglasiti nulvektorima jer je, prema prvom Kirchhoffovom zakonu, suma električnih struja koje ulaze u globalne čvorove jednaka nuli. Nakon toga se nepotpuni globalni sustav linearnih jednažbi upotpunjuje tako da se u njega uključe zadani globalni električni naponi i/ili zadane globalne električne struje. Mrežu konačnih elemenata može tvoriti više dionica dvožičnog prijenosnog voda i, u općem slučaju, konačni elementi neke druge vrste kao što su npr. konačni elementi s koncentriranim parametrima.

21.6. Opterećeni dvožični prijenosni vod

Neka je dvožični vod opterećen impedancijom \bar{Z}_t . Tada se rješenja Helmholtzovih homogenih diferencijalnih jednažbi prijenosnog voda (21.18) i (21.19) opisana izrazima (21.56), koji glase:

$$\bar{U} = \bar{A}_1 \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} + \bar{A}_2 \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad ; \quad \bar{I} = \frac{\bar{A}_1}{\bar{Z}_c} \cdot e^{-\bar{\gamma} \cdot z} - \frac{\bar{A}_2}{\bar{Z}_c} \cdot e^{\bar{\gamma} \cdot z} \quad (21.75)$$

mogu se u čvoru 2 (na kraju voda prema Slici 21.9) napisati u sljedećem obliku:

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_{\text{dir}} + \bar{U}_{\text{inv}} \quad ; \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{\text{dir}}}{\bar{Z}_c} - \frac{\bar{U}_{\text{inv}}}{\bar{Z}_c} \quad (21.76)$$

gdje je:

\bar{U}_{dir} - direktna komponenta fazora električnog napona na kraju voda,

\bar{U}_{inv} - inverzna komponenta fazora električnog napona na kraju voda.

Sustav linearnih jednažbi (21.76) u matricnom zapisu glasi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\bar{Z}_c} & -\frac{1}{\bar{Z}_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_{\text{dir}} \\ \bar{U}_{\text{inv}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_t \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \bar{I}_2 \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Z}_t \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (21.77)$$

gdje je:

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_t \cdot \bar{I}_2 \quad (21.78)$$

Nakon invertiranja matrice sustava linearnih jednažbi (21.77), dobije se da je:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{\text{dir}} \\ \bar{U}_{\text{inv}} \end{Bmatrix} = \frac{\bar{I}_2}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_c \\ 1 & -\bar{Z}_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Z}_t \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{I}_2}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Z}_t + \bar{Z}_c \\ \bar{Z}_t - \bar{Z}_c \end{Bmatrix} \quad (21.79)$$

odakle slijedi da je:

$$\bar{U}_{\text{dir}} = \frac{(\bar{Z}_t + \bar{Z}_c) \cdot \bar{I}_2}{2} \quad ; \quad \bar{U}_{\text{inv}} = \frac{(\bar{Z}_t - \bar{Z}_c) \cdot \bar{I}_2}{2} \quad (21.80)$$

Slijedi da su koeficijent refleksije i koeficijent prolaza električnog napona opisani izrazima:

$$\bar{\rho}_u = \frac{\bar{U}_{\text{inv}}}{\bar{U}_{\text{dir}}} = \frac{\bar{Z}_t - \bar{Z}_c}{\bar{Z}_t + \bar{Z}_c} \quad ; \quad \bar{\tau}_u = 1 + \bar{\rho}_u = \frac{2 \cdot \bar{Z}_t}{\bar{Z}_t + \bar{Z}_c} \quad (21.81)$$

pa su koeficijent refleksije i koeficijent prolaza električne struje opisani izrazima:

$$\bar{\rho}_i = -\bar{\rho}_u = \frac{\bar{Z}_c - \bar{Z}_t}{\bar{Z}_t + \bar{Z}_c} \quad ; \quad \bar{\tau}_i = 1 + \bar{\rho}_i = \frac{2 \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_t + \bar{Z}_c} \quad (21.82)$$

U slučaju kada je impedancija opterećenja jednaka valnoj impedanciji prijenosnog voda:

$$\bar{Z}_t = \bar{Z}_c \quad (21.83)$$

takvo se opterećenje naziva prirodnim opterećenjem prijenosnog voda, odnosno kaže se da je ovakvo opterećenje prilagođeno prijenosnom vodu. U tom slučaju nema refleksije vala jer vrijedi da je:

$$\bar{\rho}_u = \bar{\rho}_i = 0 \quad ; \quad \bar{\tau}_u = \bar{\tau}_i = 1 \quad (21.84)$$

U slučaju praznog hoda, impedancija opterećenja je beskonačna:

$$\bar{Z}_t \rightarrow \infty \quad (21.85)$$

pa vrijedi da je:

$$\bar{\rho}_u = 1 \quad ; \quad \bar{\tau}_u = 2 \quad ; \quad \bar{\rho}_i = -1 \quad ; \quad \bar{\tau}_i = 0 \quad (21.86)$$

U slučaju kratkog spoja, impedancija opterećenja jednaka je nuli:

$$\bar{Z}_t = 0 \quad (21.87)$$

pa vrijedi da je:

$$\bar{\rho}_u = -1 \quad ; \quad \bar{\tau}_u = 0 \quad ; \quad \bar{\rho}_i = 1 \quad ; \quad \bar{\tau}_i = 2 \quad (21.88)$$

21.7. Mjerenje valne impedancije dvožičnog prijenosnog voda

Valna impedancija dvožičnog prijenosnog voda može se izračunati iz podataka dobivenih pokusom praznog hoda i pokusom kratkog spoja.

Iz rješenja Helmholtzovih nehomogenih diferencijalnih jednadžbi dobiven je sustav linearnih jednadžbi (21.65), koji glasi:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & \bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \\ \frac{1}{\bar{Z}_c} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) & \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.89)$$

gdje se električni napon i električna struja na početku dvožičnog prijenosnog voda izraženi preko električnog napona i električne struje na kraju voda.

U praznom hodu ($\bar{I}_2 = 0$) mjere se električni napon i električna struja na početku dvožičnog prijenosnog voda i, prema izrazu (21.89), izražavaju se preko električnog napona na kraju voda:

$$\bar{U}_{1,\text{ph}} = \bar{U}_{2,\text{ph}} \cdot \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \quad ; \quad \bar{I}_{1,\text{ph}} = \frac{\bar{U}_{2,\text{ph}}}{\bar{Z}_c} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \quad (21.90)$$

odakle slijedi da je ulazna impedancija praznog hoda dvožičnog prijenosnog voda:

$$\bar{Z}_{\text{ul,ph}} = \frac{\bar{U}_{1,\text{ph}}}{\bar{I}_{1,\text{ph}}} = \bar{Z}_c \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \quad (21.91)$$

U kratkom spoju ($\bar{U}_2 = 0$) mjere se električni napon i električna struja na početku dvožičnog prijenosnog voda i, prema izrazu (21.89), izražavaju se preko električne struje na kraju voda:

$$\bar{U}_{1,ks} = \bar{I}_{2,ks} \cdot \bar{Z}_c \cdot \text{sh}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \quad ; \quad \bar{I}_{1,ks} = \bar{I}_{2,ks} \cdot \text{ch}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \quad (21.92)$$

odakle slijedi da je ulazna impedancija kratkog spoja dvožičnog prijenosnog voda:

$$\bar{Z}_{ul,ks} = \frac{\bar{U}_{1,ks}}{\bar{I}_{1,ks}} = \bar{Z}_c \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \quad (21.93)$$

Slijedi da je:

$$\bar{Z}_{ul,ph} \cdot \bar{Z}_{ul,ks} = \bar{Z}_c^2 \cdot \text{cth}(\bar{\gamma} \cdot \ell) \cdot \text{th}(\bar{\gamma} \cdot \ell) = \bar{Z}_c^2 \quad (21.94)$$

pa je:

$$\bar{Z}_c = \sqrt{\bar{Z}_{ul,ph} \cdot \bar{Z}_{ul,ks}} = \sqrt{\frac{\bar{U}_{1,ph} \cdot \bar{U}_{1,ks}}{\bar{I}_{1,ph} \cdot \bar{I}_{1,ks}}} \quad (21.95)$$

Dakle, prema izrazu (21.95), iz izmjerenih električnih napona i električnih struja na početku dvožičnog prijenosnog voda u praznom hodu i u kratkom spoju može se izračunati valna impedancija dvožičnog prijenosnog voda.

21.8. Val na granici dvaju prijenosnih vodova bez gubitaka

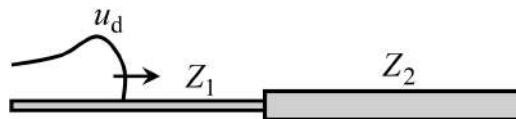
Neka val proizvoljnog oblika nailazi homogenim dvožičnim prijenosnim vodom bez gubitaka valnog otpora (impedancije) Z_1 na granicu s homogenim dvožičnim prijenosnim vodom bez gubitaka valnog otpora Z_2 (Slika 21.11).

Valni otpor prijenosnog voda bez gubitaka ne ovisi o frekvenciji, a na granici dvaju dvožičnih prijenosnih vodova bez gubitaka, u vremenskom području, vrijede jednadžbe:

$$u_d + u_r = u_p \quad ; \quad i_d + i_r = i_p \quad (21.96)$$

gdje je:

- u_d - dolazni električni napon,
- u_r - reflektirani električni napon,
- u_p - prolazni električni napon,
- i_d - jakost dolazne električne struje,
- i_r - jakost reflektirane električne struje,
- i_p - jakost prolazne električne struje.



Slika 21.11. Upad vala na granicu dvaju prijenosnih vodova bez gubitaka

Vrijedi da je:

$$i_d = \frac{u_d}{Z_1} \quad ; \quad i_r = -\frac{u_r}{Z_1} \quad ; \quad i_p = \frac{u_p}{Z_2} \quad (21.97)$$

pa se sustav linearnih jednažbi (21.96) može napisati i u sljedećem obliku:

$$u_d + u_r = u_p \quad ; \quad \frac{u_d}{Z_1} - \frac{u_r}{Z_1} = \frac{u_p}{Z_2} \quad (21.98)$$

odakle je:

$$u_r - u_p = -u_d \quad (21.99)$$

$$u_r + \frac{Z_1}{Z_2} \cdot u_p = u_d \quad (21.100)$$

Ako se žele odrediti koeficijenti refleksije i prolaza električnog napona, treba reflektirani i prolazni električni napon izraziti pomoću dolaznog električnog napona. Iz sustava linearnih jednažbi (21.99) i (21.100) lako se dobije da je:

$$\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot u_r = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot u_d \quad (21.101)$$

$$\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot u_p = 2 \cdot u_d \quad (21.102)$$

odakle slijedi da su koeficijenti refleksije i prolaza električnog napona:

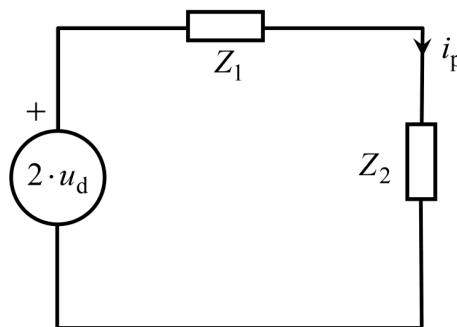
$$\rho_u = \frac{u_r}{u_d} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad ; \quad \tau_u = \frac{u_p}{u_d} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1 + \rho_u \quad (21.103)$$

dok su koeficijenti refleksije i prolaza električne struje:

$$\rho_i = -\rho_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad ; \quad \tau_i = 1 + \rho_i = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (21.104)$$

21.9. Petersenovo pravilo

Refleksiju i prolaz vala na granici dvaju dvožičnih prijenosnih vodova bez gubitaka, iz prethodnog potpoglavlja, može se sagledati i pomoću Petersenovog pravila za koje vrijedi nadomjesna šema prikazana na Slici 21.12.



Slika 21.12. Nadomjesna šema Petersenovog pravila

Prema Slici 21.12, jakost prolazne električne struje opisana je sljedećim izrazom:

$$i_p = \frac{2 \cdot u_d}{Z_1 + Z_2} \quad (21.105)$$

pa je, prema (21.97), prolazni električni napon opisan sljedećim izrazom:

$$u_p = i_p \cdot Z_2 = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot u_d \quad (21.106)$$

odakle slijedi da je koeficijent prolaza električnog napona:

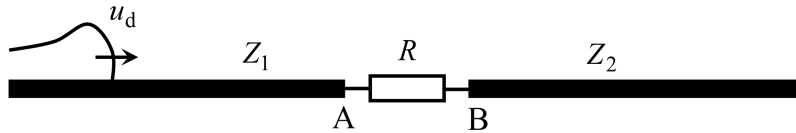
$$\tau_u = \frac{u_p}{u_d} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (21.106)$$

Nakon toga je lako dobiti izraze za preostale koeficijente refleksije i prolaza jer je:

$$\rho_u = \tau_u - 1 \quad ; \quad \rho_i = -\rho_u = 1 - \tau_u \quad ; \quad \tau_i = 1 + \rho_i = 2 - \tau_u \quad (21.107)$$

21.10. Koncentrirani otpor između dva dvožična prijenosna voda bez gubitaka

Neka je između dva dvožična prijenosna voda bez gubitaka ubačen koncentrirani radni otpor R (Slika 21.13). Neka val proizvoljnog oblika nailazi homogenim dvožičnim prijenosnim vodom bez gubitaka valnog otpora (valne impedancije) Z_1 . Treba odrediti izraz za pad (poprečnog) električnog napona na otporu R .



Slika 21.13. Koncentrirani otpor R između dva dvožična prijenosna voda bez gubitaka

Iz izraza (21.103) i (21.104) slijedi da su koeficijenti refleksije i prolaza električnog napona u točkama A i B opisani sljedećim izrazima:

$$\rho_{uA} = \frac{u_{rA}}{u_d} = \frac{(Z_2 + R) - Z_1}{Z_1 + (Z_2 + R)} \quad (21.108)$$

$$\tau_{uA} = \frac{u_{pA}}{u_d} = \frac{2 \cdot (Z_2 + R)}{Z_1 + (Z_2 + R)} \quad (21.109)$$

$$\tau_{uB} = \frac{u_{pB}}{u_d} = \frac{2 \cdot Z_2}{(Z_1 + R) + Z_2} \quad (21.110)$$

što znači da se u promatranoj točki koncentrirani radni otpor i valni otpor prijenosnog voda kojemu ne pripada ta točka zbrajaju.

Pad (poprečnog) napona na otporu R , odnosno uzdužni napon na otporu R , opisan je izrazom:

$$u_R = (\tau_{uA} - \tau_{uB}) \cdot u_d = \frac{2 \cdot R}{Z_1 + Z_2 + R} \cdot u_d \quad (21.111)$$

Do istog se rješenja može doći pomoću Petersenovog pravila, a u ovom slučaju nadomjesna šema Petersenovog pravila prikazana je na Slici 21.14. Vrijedi da je:

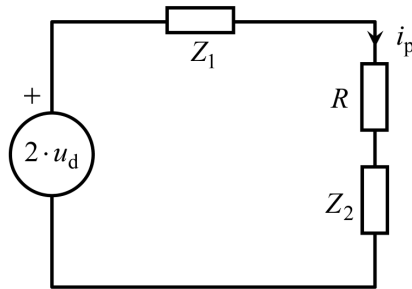
$$i_p = i_{pA} = i_{pB} = \frac{2 \cdot u_d}{Z_1 + (Z_2 + R)} \quad (21.112)$$

pa je:

$$u_R = i_p \cdot R = \frac{2 \cdot R}{Z_1 + Z_2 + R} \cdot u_d \quad (21.113)$$

dok je:

$$u_{pB} = i_p \cdot Z_2 = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2 + R} \cdot u_d \quad (21.114)$$



Slika 21.14. Nadomjesna šema Petersenovog pravila za koncentrirani otpor između dvaju prijenosnih vodova bez gubitaka

Električni napon reflektiranog i prolaznog vala u čvoru A je:

$$u_{rA} = u_{pA} - u_d \quad (21.115)$$

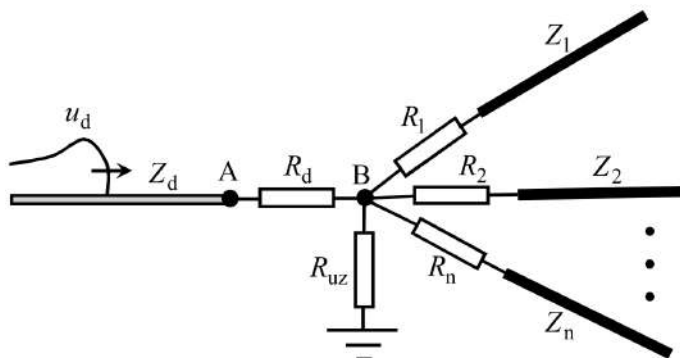
$$u_{pA} = i_p \cdot (R + Z_2) = \frac{2 \cdot (Z_2 + R)}{Z_1 + (Z_2 + R)} \cdot u_d \quad (21.116)$$

odakle slijedi da je:

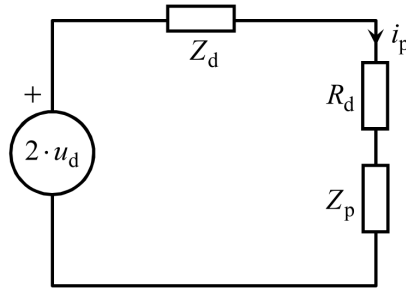
$$u_{rA} = \frac{Z_2 - Z_1 + R}{Z_1 + Z_2 + R} \cdot u_d \quad (21.117)$$

21.11. Grananje dvožičnih prijenosnih vodova bez gubitaka

Pomoću Petersenovog pravila može se razmatrati i upad vala u čvor u kojem se granaju vodovi bez gubitaka (Slika 21.15), gdje je R_{uz} otpor uzemljenja. Pripadna nadomjesna šema Petersenovog pravila prikazana je na Slici 21.16.



Slika 21.15. Grananje dvožičnih prijenosnih vodova bez gubitaka



Slika 21.16. Nadomjesna šema Petersenovog pravila za grananje prijenosnih vodova bez gubitaka

Otpor Z_p paralelno povezanih vodova u točki B, uključujući otpor uzemljenja, opisan je sljedećim izrazom:

$$Z_p = \frac{1}{\frac{1}{R_{uz}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i + Z_i}} \quad (21.118)$$

Iz nadomjesne šeme, prikazane na Slici 21.16, slijedi da je jakost prolazne električne struje opisana sljedećim izrazom:

$$i_p = i_{pA} = i_{pB} = \frac{2 \cdot u_d}{Z_d + R_d + Z_p} \quad (21.119)$$

pa je pad električnog napona na otporu R_d opisan izrazom:

$$u_{R_d} = i_p \cdot R_d = \frac{2 \cdot R_d}{Z_d + R_d + Z_p} \cdot u_d \quad (21.120)$$

dok je električni napon u točki B:

$$u_B = u_{pB} = i_p \cdot Z_p = \frac{2 \cdot Z_p}{Z_d + R_d + Z_p} \cdot u_d \quad (21.121)$$

Električni napon reflektiranog i prolaznog vala u čvoru A je:

$$u_{rA} = u_{pA} - u_d \quad (21.122)$$

$$u_A = u_{pA} = i_p \cdot (R_d + Z_p) = \frac{2 \cdot (R_d + Z_p)}{Z_d + R_d + Z_p} \cdot u_d \quad (21.123)$$

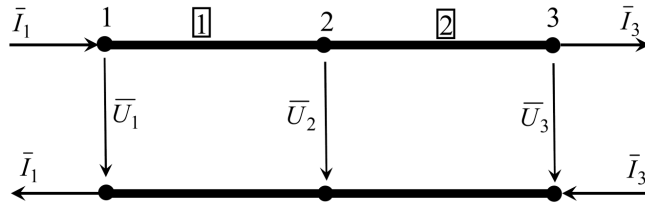
odakle slijedi da je:

$$u_{rA} = \frac{(Z_p + R_d) - Z_d}{Z_d + (R_d + Z_p)} \cdot u_d \quad (21.124)$$

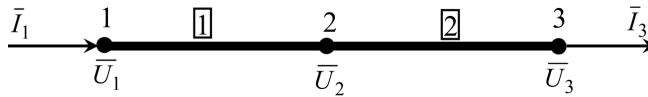
21.12. Serijsko povezivanje dionica dvožičnog prijenosnog voda

Dionice dvožičnog prijenosnog voda, u fazorskom području, mogu se promatrati kao četveropoli. Prije razvoja naprednih numeričkih metoda, teorija četveropola imala je značajnu primjenu u analizi elektroenergetskih prijenosnih vodova.

Dvije serijski povezane dionice dvožičnog prijenosnog voda prikazane su na Slici 21.17, a na Slici 21.18 dan je njihov pojednostavljeni prikaz.



Slika 21.17. Serijski povezane dvije dionice dvožičnog prijenosnog voda



Slika 21.18. Pojednostavljeni prikaz serijski povezanih dviju dionica dvožičnog prijenosnog voda

Prema izrazu (21.65), za prvu dionicu dvožičnog prijenosnog voda vrijedi sljedeći izraz:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) & \bar{Z}_{c1} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) \\ \frac{1}{\bar{Z}_{c1}} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) & \text{ch}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = [\bar{T}_1] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} \quad (21.125)$$

gdje je:

$$[\bar{T}_1] = \begin{bmatrix} \text{ch}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) & \bar{Z}_{c1} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) \\ \frac{1}{\bar{Z}_{c1}} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) & \text{ch}(\bar{\gamma}_1 \cdot \ell_1) \end{bmatrix} \quad (21.126)$$

prijenosna matrica prve dionice dvožičnog prijenosnog voda, odnosno matrica prvog četveropola.

Prema izrazu (21.65), za drugu dionicu dvožičnog prijenosnog voda vrijedi sljedeći izraz:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{I}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) & \bar{Z}_{c2} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) \\ \frac{1}{\bar{Z}_{c2}} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) & \text{ch}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{I}_3 \end{Bmatrix} = [\bar{T}_2] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{I}_3 \end{Bmatrix} \quad (21.127)$$

gdje je:

$$[\bar{T}_2] = \begin{bmatrix} \text{ch}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) & \bar{Z}_{c2} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) \\ \frac{1}{\bar{Z}_{c2}} \cdot \text{sh}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) & \text{ch}(\bar{\gamma}_2 \cdot \ell_2) \end{bmatrix} \quad (21.128)$$

prijenosna matrica druge dionice dvožičnog prijenosnog voda, odnosno matrica drugog četveropola.

Budući da postoji kontinuitet električnog napona i električne struje na spoju dviju dionica prijenosnog voda, za dvije serijski povezane dionice prijenosnog voda vrijedi sljedeći izraz:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = [\bar{T}_1] \cdot [\bar{T}_2] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{I}_3 \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ \bar{I}_3 \end{Bmatrix} \quad (21.129)$$

Ako dvožični prijenosni vod tvori n serijski povezanih dionica prijenosnog voda, onda vrijedi sljedeći izraz:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{I}_i \end{Bmatrix} = [\bar{T}_i] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_{i+1} \\ \bar{I}_{i+1} \end{Bmatrix} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21.130)$$

gdje je prijenosna matrica i -te dionice prijenosnog voda opisana izrazom:

$$[\bar{T}_i] = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\bar{\gamma}_i \cdot \ell_i) & \bar{Z}_{ci} \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma}_i \cdot \ell_i) \\ \frac{1}{\bar{Z}_{ci}} \cdot \operatorname{sh}(\bar{\gamma}_i \cdot \ell_i) & \operatorname{ch}(\bar{\gamma}_i \cdot \ell_i) \end{bmatrix} \quad (21.131)$$

Slijedi da se električni napon i električna struja na početku cjelokupnog voda mogu izraziti preko električnog napona i električne struje na kraju voda na sljedeći način:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{Bmatrix} = [\bar{T}_1] \cdot [\bar{T}_2] \cdot \dots \cdot [\bar{T}_n] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{Bmatrix} = [\bar{T}] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{U}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (21.132)$$

gdje je, dakle, prijenosna matrica cjelokupnog voda $[\bar{T}]$ opisana sljedećim izrazom:

$$[\bar{T}] = [\bar{T}_1] \cdot [\bar{T}_2] \cdot \dots \cdot [\bar{T}_n] = \prod_{i=1}^n [\bar{T}_i] \quad (21.133)$$

21.13. Zadaci

Zadatak 21.1. Nadzemni dvožični elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka valnog otpora $Z_1 = 400 \Omega$ prelazi u kabelski prijenosni vod bez gubitaka valnog otpora $Z_2 = 50 \Omega$. Odredite koeficijente refleksije i prolaza električnog napona i električne struje na granici prelaska nadzemnog prijenosnog voda u kabelski prijenosni vod.



Slika 21.19. Prijelaz nadzemnog voda u kabelski vod

Rješenje:

Prema potpoglavlju 21.8, pošavši od sustava dviju linearnih jednačbi:

$$u_d + u_r = u_p ; \quad \frac{u_d}{Z_1} - \frac{u_r}{Z_1} = \frac{u_p}{Z_2} \quad (21.134)$$

lako se mogu dobiti izrazi za koeficijente refleksije i prolaza električnog napona:

$$\rho_u = \frac{u_r}{u_d} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -\frac{7}{9} ; \quad \tau_u = \frac{u_p}{u_d} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1 + \rho_u = \frac{2}{9} \quad (21.135)$$

dok su koeficijenti refleksije i prolaza električne struje:

$$\rho_i = -\rho_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{7}{9} ; \quad \tau_i = 1 + \rho_i = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{16}{9} \quad (21.136)$$

Do istog se rješenja može doći i pomoću Petersenovog pravila, što je opisano u potpoglavlju 21.9.

Zadatak 21.2. Dvožični elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka sastavljen je iz dva dijela: nadzemnog prijenosnog voda ($L_{nv} = 3,48 \text{ mH/km}$; $C_{nv} = 0,0219 \text{ } \mu\text{F/km}$) i kablenskog prijenosnog voda ($L_{kv} = 0,696 \text{ mH/km}$; $C_{kv} = 0,438 \text{ } \mu\text{F/km}$). Neka pravokutni prenaponski val električnog napona 17,3 kV nailazi sa strane nadzemnog voda. Odredite prolaznu i reflektiranu komponentu električnog napona i električne struje na mjestu prelaska nadzemnog prijenosnog voda u kablenski prijenosni vod.

Rješenje:

Ako se zanemare gubici dvožičnog voda, onda se valna impedancija voda svodi na valni otpor voda, koji je opisan izrazom:

$$\bar{Z} = Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (21.137)$$

gdje su L i C jedinični induktivitet voda i jedinični kapacitet voda.

Slijedi da je valni otpor nadzemnog prijenosnog voda:

$$Z_1 = Z_{nv} = \sqrt{\frac{L_{nv}}{C_{nv}}} = \sqrt{\frac{3,48 \cdot 10^{-3}}{0,0219 \cdot 10^{-6}}} = 398,6277833 \text{ } \Omega \quad (21.138)$$

dok je valni otpor kablenskog prijenosnog voda:

$$Z_2 = Z_{kv} = \sqrt{\frac{L_{kv}}{C_{kv}}} = \sqrt{\frac{0,696 \cdot 10^{-3}}{0,438 \cdot 10^{-6}}} = 39,86277833 \text{ } \Omega \quad (21.139)$$

Koeficijenti refleksije i prolaza električnog napona su:

$$\rho_u = \frac{u_r}{u_d} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -\frac{9}{11} \quad ; \quad \tau_u = \frac{u_p}{u_d} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1 + \rho_u = \frac{2}{11} \quad (21.140)$$

pa je reflektirana komponenta električnog napona:

$$u_r = \rho_u \cdot u_d = -14,15454545 \text{ kV} \quad (21.141)$$

dok je prolazna komponenta električnog napona:

$$u_p = \tau_u \cdot u_d = 3,145454545 \text{ kV} \quad (21.142)$$

Jakost dolazne električne struje je:

$$i_d = \frac{u_d}{Z_1} = 43,39888168 \text{ A} \quad (21.143)$$

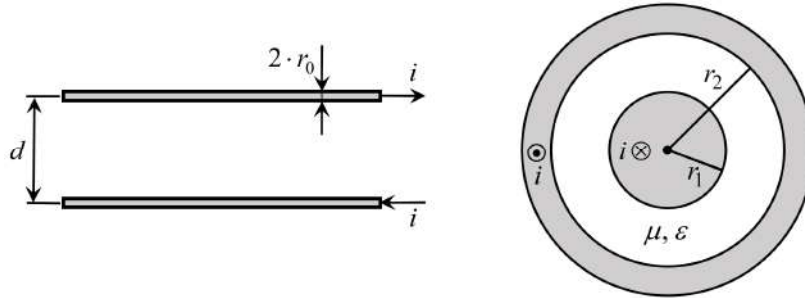
dok je reflektirana komponenta jakosti električne struje:

$$i_r = -\frac{u_r}{Z_1} = 35,50817592 \text{ A} \quad (21.144)$$

a prolazna komponenta jakosti električne struje je:

$$i_p = \frac{u_p}{Z_2} = 78,9070576 \text{ A} \quad (21.145)$$

Zadatak 21.3. Dvožični elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka sastavljen je iz dva dijela: osamljenog nadzemnog prijenosnog voda ($r_0 = 5 \text{ mm}$; $d = 1 \text{ m}$; $r_0 \ll d$) i kablenskog prijenosnog voda ($r_1 = 1 \text{ cm}$; $r_2 = 2 \text{ cm}$; $\varepsilon_r = 2,1$; $\mu_r = 1$). Neka pravokutni val električnog napona $17,5 \text{ kV}$ nailazi sa strane nadzemnog voda. Izračunajte električni napon na mjestu prelaska nadzemnog prijenosnog voda u kablenski prijenosni vod i to u trenutku dolaska vala na to mjesto. Prilikom izračuna jediničnog induktiviteta i kapaciteta, pretpostavite da su nadzemni vod i kablenski vod beskonačno dugi. Zanemarite unutarnji induktivitet vodiča i utjecaj zemlje na značajke nadzemnog voda.



Slika 21.20. Parametri dvožičnog nadzemnog voda i dvožičnog kablenskog voda

Rješenje:

Za osamljeni dvožični nadzemni elektroenergetski prijenosni vod, uz uvedena zanemarenja, lako se dobiju sljedeći izrazi za jedinični (vanjski) induktivitet i jedinični kapacitet:

$$L_{nv} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{r_0} \quad ; \quad C_{nv} = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0}{\ln \frac{d}{r_0}} \quad (21.146)$$

dok za dvožični kablenski prijenosni vod, uz uvedena zanemarenja, izrazi za jedinični induktivitet i jedinični kapacitet glase:

$$L_{kv} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad C_{kv} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (21.147)$$

Slijedi da je valni otpor nadzemnog prijenosnog voda:

$$Z_1 = Z_{nv} = \sqrt{\frac{L_{nv}}{C_{nv}}} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \ln \frac{d}{r_0} = 635,358235 \, \Omega \quad (21.148)$$

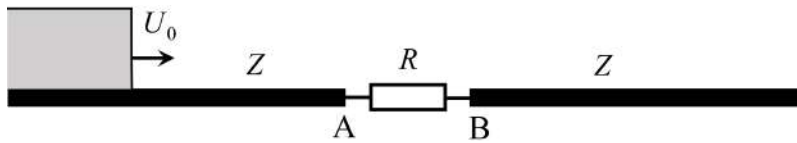
dok je valni otpor kablenskog prijenosnog voda:

$$Z_2 = Z_{kv} = \sqrt{\frac{L_{kv}}{C_{kv}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 28,67916565 \, \Omega \quad (21.149)$$

Električni napon na mjestu prelaska nadzemnog prijenosnog voda u kablenski prijenosni vod i to u trenutku dolaska vala na to mjesto jednak je prolaznom električnom naponu:

$$u_p = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot u_d = 1,511617865 \text{ kV} \quad (21.150)$$

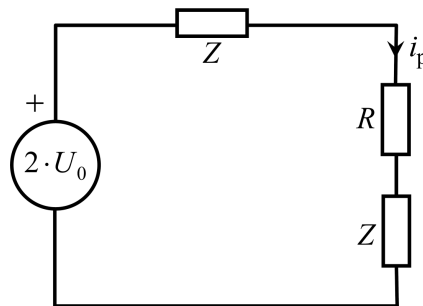
Zadatak 21.4. Elektroenergetski prijenosni vod bez gubitaka valnog otpora $Z = 400 \Omega$ presječen je i na to je mjesto umetnut koncentrirani radni otpor $R = 100 \Omega$. Odredite pad napona na radnom otporu, prolazni električni napon i reflektirani električni napon ako na mjesto diskontinuiteta upada pravokutni prenaponski val $u_d = U_0 = 17 \text{ kV}$.



Slika 21.21. Upad prenaponskog vala na mjesto diskontinuiteta

Rješenje:

Zadatak se može lako riješiti pomoću Petersenovog pravila (Slika 21.22).



Slika 21.22. Nadomjesna šema Petersenovog pravila

Prema Petersenovom pravilu, prolazna električna struja opisana je izrazom:

$$i_p = i_{pA} = i_{pB} = \frac{2 \cdot U_0}{2 \cdot Z + R} \quad (21.151)$$

dok je pad (poprečnog) električnog napona na radnom otporu:

$$u_R = i_p \cdot R = \frac{2 \cdot R}{2 \cdot Z + R} \cdot U_0 = 3,7777777778 \text{ kV} \quad (21.152)$$

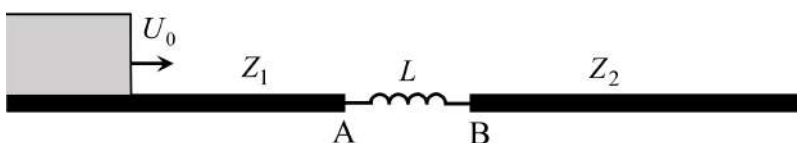
Nadalje je, prolazni električni napon u točki B:

$$u_p = u_{pB} = i_p \cdot Z = \frac{2 \cdot Z}{2 \cdot Z + R} \cdot U_0 = 15,1111111111 \text{ kV} \quad (21.153)$$

dok je reflektirani električni napon u točki A:

$$u_r = u_{rA} = u_R + u_{pB} - U_0 = \frac{R}{2 \cdot Z + R} \cdot U_0 = \frac{u_R}{2} = 1,8888888889 \text{ kV} \quad (21.154)$$

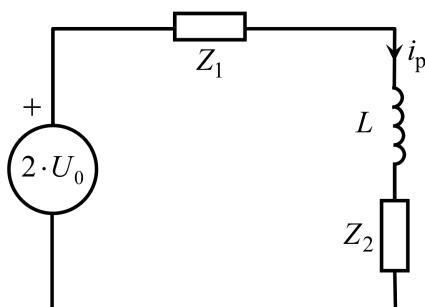
Zadatak 21.5. Između dva elektroenergetska prijenosna voda bez gubitaka umetnuta je savršena zavojnica induktiviteta L . Odredite prolazni električni napon u točki B, pad električnog napona na zavojnici i reflektirani električni napon u točki A u ovisnosti o vremenu ako u trenutku $t = 0$ na zavojnicu upada pravokutni prenaponski val $u_d = U_0$.



Slika 21.23. Upad prenaponskog vala na mjesto diskontinuiteta

Rješenje:

Zadatak se može lako riješiti pomoću Petersenovog pravila (Slika 21.24).



Slika 21.24. Nadomjesna šema Petersenovog pravila

Prema Petersenovom pravilu, vrijedi da je:

$$2 \cdot U_0 = i_p \cdot (Z_1 + Z_2) + L \cdot \frac{di_p}{dt} \quad (21.155)$$

odakle slijedi diferencijalna jednačba:

$$T \cdot \frac{di_p}{dt} + i_p = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \quad ; \quad T = \frac{L}{Z_1 + Z_2} \quad (21.156)$$

gdje je T vremenska konstanta.

Diferencijalna jednačba (21.156) može se riješiti metodom separacije varijabli tako da se u prvom koraku ova diferencijalna jednačba napiše u sljedećem obliku:

$$\frac{di_p}{i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2}} = - \frac{dt}{T} \quad (21.157)$$

pa se potom integrira lijeva i desna strana izraza (21.157). Nakon integracije dobije se da je:

$$\ln K + \ln \left(i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \right) = - \frac{t}{T} \quad (21.158)$$

ili drukčije pisano:

$$\ln \left[K \cdot \left(i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \right) \right] = - \frac{t}{T} \quad (21.159)$$

pa je:

$$K \cdot \left(i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \right) = e^{-t/T} \quad (21.160)$$

$$i_p = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{K} \cdot e^{-t/T} \quad (21.161)$$

Izraz (21.161) treba zadovoljiti zadani početni uvjet:

$$i_p \Big|_{t=0} = 0 \quad (21.162)$$

odakle slijedi da je:

$$\frac{1}{K} = -\frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \quad (21.163)$$

pa konačni izraz koji opisuje jakost prolazne električne struje glasi:

$$i_p = i_{pA} = i_{pB} = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (21.164)$$

Prolazni električni napon u točki B opisan je izrazom:

$$u_p = u_{pB} = i_p \cdot Z_2 = \frac{2 \cdot U_0 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (21.165)$$

Pad poprečnog električnog napona na zavojnici (koncentriranom induktivitetu) opisan je izrazom:

$$u_L = L \cdot \frac{di_p}{dt} = 2 \cdot U_0 \cdot e^{-t/T} \quad (21.166)$$

Reflektirani električni napon u točki A može se dobiti iz sljedećeg izraza:

$$u_{rA} = u_{pA} - U_0 = u_L + u_{pB} - U_0 \quad (21.167)$$

pa iz prethodnih triju izraza slijedi da je:

$$u_{rA} = U_0 \cdot \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} + U_0 \cdot \frac{2 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-t/T} \quad (21.168)$$

U posebnom slučaju kada je $Z_1 = Z_2 = Z$, vrijedi da je:

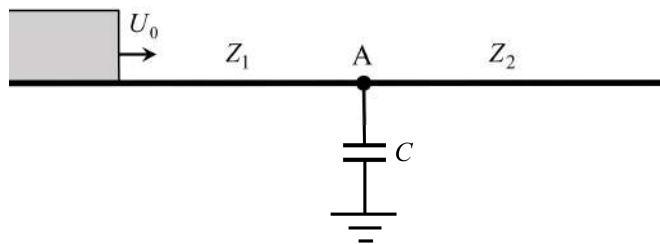
$$i_p = i_{pA} = i_{pB} = \frac{U_0}{Z} \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad ; \quad T = \frac{L}{2 \cdot Z} \quad (21.169)$$

$$u_p = u_{pB} = i_p \cdot Z = U_0 \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (21.170)$$

$$u_L = 2 \cdot U_0 \cdot e^{-t/T} \quad (21.171)$$

$$u_{rA} = U_0 \cdot e^{-t/T} \quad (21.172)$$

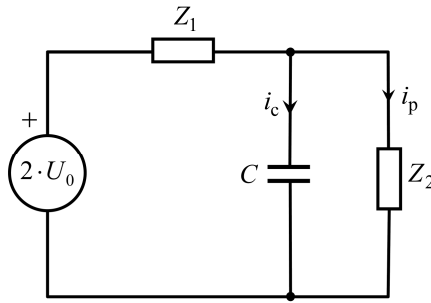
Zadatak 21.6. Između dva elektroenergetska prijenosna voda bez gubitaka paralelno je spojen savršeni električni kondenzator kapaciteta C . Odredite izraze za električni napon kondenzatora, prolazni električni napon, reflektirani električni napon, prolaznu električnu struju, reflektiranu električnu struju i električnu struju kondenzatora u ovisnosti o vremenu ako u trenutku $t = 0$ u točku A upada pravokutni prenaponski val $u_d = U_0$. Neka je na početku prijelazne pojave električni kondenzator prazan.



Slika 21.25. Upad prenaponskog vala na mjesto diskontinuiteta

Rješenje:

Zadatak se može lako riješiti pomoću Petersenovog pravila (Slika 21.26).



Slika 21.26. Nadomjesna šema Petersenovog pravila

Prema Petersenovom pravilu, vrijedi da je:

$$2 \cdot U_0 = Z_1 \cdot (i_p + i_c) + Z_2 \cdot i_p \quad (21.173)$$

Električni napon kondenzatora jednak je prolaznom električnom naponu u točki A te vrijedi da je:

$$u_c = u_p = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_c \cdot dt = i_p \cdot Z_2 \quad (21.174)$$

odakle slijedi da je:

$$i_c = C \cdot Z_2 \cdot \frac{di_p}{dt} \quad (21.175)$$

Ako se izraz (21.175) uvrsti u izraz (21.173), dobije se sljedeća diferencijalna jednačba:

$$T \cdot \frac{di_p}{dt} + i_p = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \quad ; \quad T = \frac{C \cdot Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (21.176)$$

gdje je T vremenska konstanta.

Diferencijalna jednačba (21.176) može se riješiti metodom separacije varijabli tako da se u prvom koraku ova diferencijalna jednačba napiše u sljedećem obliku:

$$\frac{di_p}{i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2}} = - \frac{dt}{T} \quad (21.177)$$

pa se potom integrira lijeva i desna strana izraza (21.177). Nakon integracije dobije se da je:

$$\ln K + \ln \left(i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \right) = - \frac{t}{T} \quad (21.178)$$

ili drukčije pisano:

$$\ln \left[K \cdot \left(i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \right) \right] = - \frac{t}{T} \quad (21.179)$$

pa je:

$$K \cdot \left(i_p - \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \right) = e^{-t/T} \quad (21.180)$$

$$i_p = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{K} \cdot e^{-t/T} \quad (21.181)$$

Izraz (21.181) treba zadovoljiti zadani početni uvjet:

$$i_p|_{t=0} = 0 \quad (21.182)$$

odakle slijedi da je:

$$\frac{1}{K} = -\frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \quad (21.183)$$

pa izraz koji opisuje prolaznu električnu struju glasi:

$$i_p = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1 + Z_2} \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (21.184)$$

Električni napon kondenzatora i prolazni električni napon u točki A opisani su izrazom:

$$u_c = u_p = i_p \cdot Z_2 = \frac{2 \cdot U_0 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (21.185)$$

dok je reflektirani električni napon u točki A opisan izrazom:

$$u_r = u_p - U_0 \quad (21.186)$$

pa iz prethodnih dvaju izraza slijedi da je:

$$u_r = U_0 \cdot \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} - U_0 \cdot \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-t/T} \quad (21.187)$$

Iz izraza (21.175) i (21.184), slijedi da je jakost električne struje kondenzatora:

$$i_c = C \cdot Z_2 \cdot \frac{di_p}{dt} = U_0 \cdot \frac{2 \cdot C \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{1}{T} \cdot e^{-t/T} = \frac{2 \cdot U_0}{Z_1} \cdot e^{-t/T} \quad (21.188)$$

Jakost reflektirane električne struje opisana je izrazom:

$$i_r = -\frac{u_r}{Z_1} = \frac{U_0}{Z_1} \cdot \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{U_0}{Z_1} \cdot \frac{2 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-t/T} \quad (21.189)$$

dok je jakost dolazne električne struje opisana izrazom:

$$i_d = \frac{u_d}{Z_1} = \frac{U_0}{Z_1} \quad (21.190)$$

U posebnom slučaju kada je $Z_1 = Z_2 = Z$, vrijedi da je:

$$i_p = \frac{U_0}{Z} \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad ; \quad T = \frac{C \cdot Z}{2} \quad (21.191)$$

$$u_c = u_p = i_p \cdot Z = U_0 \cdot (1 - e^{-t/T}) \quad (21.192)$$

$$u_r = -U_0 \cdot e^{-t/T} \quad (21.193)$$

$$i_c = \frac{2 \cdot U_0}{Z} \cdot e^{-t/T} \quad ; \quad i_r = \frac{U_0}{Z} \cdot e^{-t/T} \quad ; \quad i_d = \frac{U_0}{Z} \quad (21.194)$$

LITERATURA

- [1] Assis, A. K. T.; Hernandes, J. A., *The Electric Force of a Current - Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents*, Apeiron, Montreal, 2007.
- [2] Barkeshli, K., *Advanced Electromagnetics and Scattering Theory*, Springer, New York, 2015.
- [3] Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics – Second Edition*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2012.
- [4] Bansal, R. (Editor), *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, 2006.
- [5] Berberović, S., *Teorijska elektrotehnika – Odabrani primjeri*, Graphis, Zagreb, 1998.
- [6] Bosanac, T., *Teoretska elektrotehnika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- [7] Bronštejn, I. N.; Semendjajev, K. A., *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.
- [8] Edminister, P. A.; Nahvi, M., *Electromagnetics – Fourth Edition*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 2014.
- [9] Harrington, R. F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, IEEE Press, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [10] Haus, H. A.; Melcher, J. R., *Electromagnetic Fields and Energy*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [11] Haznadar, Z., *Zbirka zadataka iz teoretske elektrotehnike*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1963.
- [12] Haznadar, Z.; Štih, Ž., *Elektromagnetizam – Svezak 1 – Elektromagnetska teorija, statička i kvazistatička polja*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [13] Haznadar, Z.; Štih, Ž., *Elektromagnetizam – Svezak 2 – Elektromagnetski valovi i numeričke metode*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [14] Ida, N.; Bastos, J. P. A., *Electromagnetics and Calculation of Fields*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [15] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [16] Koch, W., *Erdungen in Wechselstromanlagen über 1 kV - Berechnung und Ausführung*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [17] Kurtović, M., *Predavanja iz Teorijske elektrotehnike*, neregizirana interna skripta, Sveučilište u Splitu, FESB, Split, 2004.
- [18] Lovrić, D.; Vujević, S., Accurate Computation of Internal Impedance of Two-Layer Cylindrical Conductors for Arguments of Arbitrary Magnitude, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 60, No. 2, pp. 347-353, 2018.
- [19] Lovrić, D.; Vujević, S.; Krolo, I., Computation of Per-Unit-Length Internal Impedance of a Multilayer Cylindrical Conductor with Possible Dielectric Layers, *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, Vol. 33, No. 4, pp. 605-616, 2020.
- [20] Magnuson, P. C.; Alexander, G. C.; Tripathi, V. K.; Weisshaar, A., *Transmission Lines and Wave Propagation – 4th Edition*, CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [21] Maksimović, N. G.; Batranin, F. E., *Zbirka zadataka iz teoretske elektrotehnike*, Sveučilište u Zagrebu, ETF, Zagreb, 1974.
- [22] Matjan, J., *Auditorne vježbe iz teoretske elektrotehnike*, Sveučilište u Zagrebu, ETF, Zagreb, 1975.
- [23] Moore, J.; Piezer, R., *Moment Methods in Electromagnetics – Techniques and Applications*, Research Studies Press Ltd., Letchworth, 1984.
- [24] Nojman, L. R.; Kalantarov, P. L., *Teoriski osnovi elektrotehnike – Knjiga prva – Fizički osnovi elektrotehnike*, Naučna knjiga, Beograd, 1951.
- [25] Nojman, L. R.; Kalantarov, P. L., *Teoriski osnovi elektrotehnike – Knjiga druga – Teorija naizmjeničnih struja*, Naučna knjiga, Beograd, 1958.
- [26] Nojman, L. R.; Kalantarov, P. L., *Teoriski osnovi elektrotehnike – Knjiga treća – Teorija elektromagnetskog polja*, Naučna knjiga, Beograd, 1952.

- [27] Ollendorf, F., *Erdströme – Zweite, neubearbeitete Auflage*, Verlag, Basel, 1969.
- [28] Panofsky, W. K. H.; Phillips, M., *Classical Electricity and Magnetism – Second Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1962.
- [29] Patra, H. P.; Mallick, K., *Geosounding Principles, 2 – Time-Varying Geoelectric Sounding*, Elsevier, Amsterdam, 1980.
- [30] Poljak, D., *Advanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility*, JohnWiley & Sons, New York, 2007.
- [31] Popović, B. D., *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.
- [32] Popović, Z.; Popović, B. D., *Introductory Electromagnetics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- [33] Spiegel, M. R., *Vector Analysis and An Introduction to Tensor Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [34] Straton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [35] Sunde, E. D., *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*, D. Van Nostrand Company, Toronto, 1949.
- [36] Surutka, J., *Elektromagnetika – 7. izdanje*, Grafička knjiga, Beograd, 1989.
- [37] Van Bladel, J. G., *Electromagnetic Fields – Second Edition*, IEEE Press, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2007.
- [38] Veličković, D. M., *Elektromagnetika – Prva sveska - 3. izdanje*, Edicija: Osnovni udžbenici, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš, 2004.
- [39] Vujević, S.; Boras, V.; Sarajčev, P., A Novel Algorithm for Internal Impedance Computation of Solid and Tubular Cylindrical Conductors, *International Review of Electrical Engineering (IREE) – Part B*, Vol. 4, No. 6, pp. 1418-1425, 2009.
- [40] Vujević, S.; Modrić, T.; Lovrić, D., The Difference between Voltage and Potential Difference, *Proceedings of the Joint INDS'11 & ISTET'11*, pp. 137-143, Klagenfurt, Austrija, 2011.
- [41] Vujević, S.; Balaž, Z.; Lovrić, D., Ground Impedance of Cylindrical Metal Plate Buried in Homogeneous Earth, *Proceedings of the Joint INDS'11 & ISTET'11*, pp. 197-203, Klagenfurt, Austrija, 2011.
- [42] Vujević, S.; Lovrić, D.; Modrić, T., Scalar Electric Potential in the Air Due To a Direct Current Point Source Buried in the Earth, *Proceedings of the XVII-th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies SIELA 2012, Volume I*, pp. 344-351, Burgas, Bugarska, 2012.
- [43] Vujević, S.; Lovrić, D.; Boras, V., High-Accurate Numerical Computation of Internal Impedance of Cylindrical Conductors for Complex Arguments of Arbitrary Magnitude, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 56, pp. 1431-1438, 2014.
- [44] Vujević, S.; Modrić, T.; Vukić, B., Internal Impedance of Two-Layer Cylindrical Conductors, *International Review of Electrical Engineering (IREE)*, Vol. 9, No. 1, pp. 235-243, 2014.
- [45] Vujević, S.; Lovrić, D., On Continuous Numerical Fourier Transform for Transient Analysis of Lightning Current Related Phenomena, *Electric Power Systems Research*, Vol. 119, pp. 364-369, 2015.
- [46] Vujević, S.; Lovrić, D., Inverse Continuous Numerical Fourier Transform for Transient Analysis of Electromagnetic Phenomena, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 57, No. 5, pp. 1149-1154, 2015.
- [47] Vujević, S.; Lovrić, D.; Balaž, Z., Self and Mutual Ground Impedances of Cylindrical Metal Plates Buried in Homogeneous Earth, *International Journal of Numerical Modelling - Electronic Networks Devices and Fields*, Vol. 28, No. 1, pp. 33-49, 2015.
- [48] Vujević, S.; Lovrić, D.; Krolo, I.; Duvnjak, I., Computation of Electric and Magnetic Field Distribution inside a Multilayer Cylindrical Conductor, *Progress In Electromagnetics Research M (PIER M)*, Vol. 88, pp. 53-63, 2020.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
SVEUČILIŠNA KNJIŽNICA
U SPLITU

UDK 621.3(075.8)

VUJEVIĆ, Slavko
Teorijska elektrotehnika / <autor,
crteži i tehnička obrada> Slavko Vujević ;
<urednik Ivo Marinić-Kragić>. - Split :
Fakultet elektrotehnike, strojarstva i
brodogradnje, 2024.

ISBN 978-953-290-137-5

I. Marinić-Kragić, Ivo
I. Elektrotehnika -- Teorijski pristup -- Udžbenik

191115023

ISBN 978-953-290-137-5



SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ISBN: 978-953-290-137-5