

# MATEMATIKA 3

N. Jakovčević Stor, I. Grgić, P. M. Gojun, M. Čatipović

## MATEMATIKA 3

Osnovni pojmovi i riješeni zadaci

NEVENA JAKOVČEVIĆ - STOR, IVANA GRGIĆ, PETRA MARIJA GOJUN, MARIJA  
ČATIPOVIĆ / MATEMATIKA 3, OSNOVNI POJMOVI I RIJEŠENI ZADACI



Nakladnik  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,  
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Urednik  
prof. dr. sc. Vladan Papić

Autori  
doc. dr. sc. Nevena Jakovčević-Stor  
Ivana Grgić, prof. mat. i inf.  
Petra Marija Gojun, mag. math.  
Marija Čatipović, mag. math.

Recenzenti  
izv. prof. dr. sc. Anita Matković

ISBN 978-953-290-126-9



Ovo je djelo licencirano pod međunarodnom licencom CC BY-NC-ND 4.0 koja dopušta preuzimanje djela i dijeljenje s drugima, pod uvjetom da se navedu autori, te da se djelo ne smije mijenjati ili koristiti u komercijalne svrhe.

Autori i nakladnik ove knjige uložili su sve napore u njejoj pripremi sa željom da prenesu točne i mjerodavne informacije vezane s temom knjige. Autori i izdavač ni u kojem slučaju ne odgovaraju za slučajne ili posljedne štete povezane s izvedbom ili primjenom postupaka koji se u knjizi opisuju.

Prvo izdanje objavljeno u travnju 2023.g.

# **MATEMATIKA 3, OSNOVNI POJMOVI I RIJEŠENI ZADACI**

Nevena Jakovčević Stor, Ivana Grgić, Petra Marija Gojun, Marija Čatipović

Split, 2023.



**SADRŽAJ**

|          |                                  |           |
|----------|----------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>PREDGOVOR</b>                 |           |
| <b>2</b> | <b>VEKTORSKA ANALIZA</b>         | <b>1</b>  |
| 2.1      | Osnovni pojmovi . . . . .        | 1         |
| 2.2      | Zadaci . . . . .                 | 5         |
| <b>3</b> | <b>KRIVULJNI INTEGRAL</b>        | <b>13</b> |
| 3.1      | Osnovni pojmovi . . . . .        | 13        |
| 3.2      | Zadaci . . . . .                 | 16        |
| <b>4</b> | <b>PLOŠNI INTEGRAL</b>           | <b>28</b> |
| 4.1      | Osnovni pojmovi . . . . .        | 28        |
| 4.2      | Zadaci . . . . .                 | 32        |
| <b>5</b> | <b>FOURIEROV RED</b>             | <b>56</b> |
| 5.1      | Osnovni pojmovi . . . . .        | 56        |
| 5.2      | Zadaci . . . . .                 | 58        |
| <b>6</b> | <b>FOURIEROV INTEGRAL</b>        | <b>71</b> |
| 6.1      | Osnovni pojmovi . . . . .        | 71        |
| 6.2      | Zadaci . . . . .                 | 73        |
| <b>7</b> | <b>LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA</b> | <b>82</b> |
| 7.1      | Osnovni pojmovi . . . . .        | 82        |
| 7.2      | Zadaci . . . . .                 | 84        |
| <b>8</b> | <b>LITERATURA</b>                | <b>91</b> |



---

# 1 PREDGOVOR

Ova skripta namijenjena je studentima Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu koji pohađaju kolegij Matematika 3. Svrha pisanja skripte bila je objediniti nastavne materijale kolegija, prvenstveno auditornih vježbi. Skripta sadržava nastavno gradivo predviđeno nastavnim planom kolegija u obliku zadatka s auditornih vježbi, zadatka koji su se tijekom godina pojavljivali na kolokvijima i ispitima te teorijskih osnova nužnih za rješavanje zadataka. Nadamo se da će studentima biti korisna u boljem razumijevanju i lakšem savladavanju gradiva.





## 2 VEKTORSKA ANALIZA

### 2.1 Osnovni pojmovi

**Vektorske funkcije. Limes, derivacija i integral vektorske funkcije.**

**Vektorska funkcija skalarnog argumenta** je funkcija s intervala  $I$  u vektorski prostor  $V^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), odnosno  $\vec{r} : I \rightarrow V^n$ .

Za  $n = 3$  koristimo oznaku

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I.$$

$x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo **skalarnim komponentama** vektorske funkcije  $\vec{r}$ .

Neka su zadane vektorska funkcija  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  i vektor  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ . Tada je  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$  ako i samo ako je

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z.$$

**Derivacija** vektorske funkcije  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  može se računati pomoću derivacija njenih komponenti, tj. vrijedi

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Za funkciju  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , kažemo da je **integrabilna** na segmentu  $[a, b]$  ako su njene skalarne komponente  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  integrabilne na  $[a, b]$ . Tada je

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left( \int_a^b x(t) dt \right) \vec{i} + \left( \int_a^b y(t) dt \right) \vec{j} + \left( \int_a^b z(t) dt \right) \vec{k}.$$

Svojstva derivacije i integrala vektorskih funkcija su slična onima za realne funkcije.

Ako je  $\vec{r}(t)$  neprekidna vektorska funkcija i  $\vec{s}(t)$  njena **primitivna funkcija** na  $I$ , tj. ona za koju vrijedi  $\vec{s}'(t) = \vec{r}(t)$ ,  $\forall t \in I$ , onda za  $a, b \in I$  vrijedi

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{s}(b) - \vec{s}(a).$$

### Skalarna i vektorska polja. Gradijent, divergencija, rotacija i usmjerene derivacije

Skalarno polje je funkcija sa skupa  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  u skup  $\mathbb{R}$ , odnosno  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Vektorsko polje je funkcija sa skupa  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  u skup  $V^3$ , odnosno  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$ .

Pišemo  $\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$  gdje su  $a_x, a_y, a_z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , (komponente ili koordinatne funkcije) skalarna polja.

Parcijalne derivacije vektorskog polja se definiraju potpuno analogno parcijalnim derivacijama skalarnog polja (realne funkcije triju varijabli) i svode se na parcijalne derivacije njegovih komponenti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} &= \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} &= \frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{k}\end{aligned}$$

Ako skalarno ili vektorsko polje ima sve parcijalne derivacije, onda kažemo da je ono derivabilno.

Neka su  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , derivabilno skalarno i vektorsko polje, redom.

- **Gradijentom** skalarnog polja  $f$  nazivamo vektorsko polje  $\text{grad } f : \Omega \rightarrow V^3$  definirano sa

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},$$

- **Divergencijom** vektorskog polja  $\vec{a}$  nazivamo skalarno polje  $\text{div } \vec{a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definirano sa

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

- **Rotacijom** vektorskog polja  $\vec{a}$  nazivamo vektorsko polje  $\text{rot } \vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$  definirano sa

$$\text{rot } \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\vec{k}.$$

Primjetimo da  $\text{rot } \vec{a}$  dopušta formalni zapis u obliku determinante

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Gradijent, divergencija i rotacija mogu se opisati samo jednim operatorom. Znakom  $\nabla$  (nabla) označimo tzv. **Hamiltonov diferencijalni operator** - formalni vektor

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Na vektorskom prostoru svih derivabilnih skalarnih (vektorskih) polja vrijedi:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \text{grad } f, & (\text{djelovanje operatora } \nabla \text{ na skalarno polje } f); \\ \nabla \cdot \vec{a} &= \text{div } \vec{a}, & (\text{formalni skalarni umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{a}); \\ \nabla \times \vec{a} &= \text{rot } \vec{a}, & (\text{formalni vektorski umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je tzv. **Laplaceov diferencijalni operator** (delta). Ako je  $f$  dvaput derivabilno skalarno polje onda je

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

Ako je  $\vec{a}$  dvaput derivabilno vektorsko polje onda je

$$\begin{aligned}\Delta \vec{a} &= (\Delta a_x) \vec{i} + (\Delta a_y) \vec{j} + (\Delta a_z) \vec{k} \\ &= \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

Za vektorsko polje  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$  kažemo da je **potencijalno** ako postoji skalarno polje  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  takvo da je  $\vec{a} = -\text{grad } f$ . Tada  $f$  nazivamo potencijalom polja  $\vec{a}$ .

Svako vektorsko polje  $\vec{a}$  za koje je  $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$  nazivamo bezvrtložno, a svako ono za koje je  $\text{div } \vec{a} = 0$  solenoidalno.

Neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilno skalarno polje i  $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$  jedinični vektor. Tada **derivaciju skalarnog polja**  $f$  u točki  $T_0$  u smjeru vektora  $\vec{s}$  računamo kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(T_0) = \text{grad } f(T_0) \cdot \vec{s} = (\vec{s} \cdot \nabla) f(T_0).$$

Ako  $\vec{s}$  nije jedinični vektor uzmemo jedinični vektor  $\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$  u smjeru vektora  $\vec{s}$ .

Skalarno polje  $f$  najbrže raste u smjeru što ga određuje  $\text{grad } f$ , a najbrže pada u smjeru što ga određuje  $-\text{grad } f$ .

Neka je  $\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z) \vec{i} + a_y(x, y, z) \vec{j} + a_z(x, y, z) \vec{k}$  derivabilno vektorsko polje na  $\Omega$ ,  $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$  jedinični vektor i  $T_0 \in \Omega$ . Tada **derivaciju vektorskog polja**  $\vec{a}$  u točki  $T_0$  u smjeru vektora  $\vec{s}$  računamo kao

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}}(T_0) &= \left( s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} + s_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{a}(T_0) = (\vec{s} \cdot \nabla) \vec{a}(T_0) \\ &= s_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}(T_0) + s_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y}(T_0) + s_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}(T_0).\end{aligned}$$

**Još neke formule:**

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + b \frac{\partial \vec{a}}{\partial b} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} + a \frac{\partial \vec{b}}{\partial a}$$

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = b \frac{\partial \vec{a}}{\partial b} - a \frac{\partial \vec{b}}{\partial a} + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a}$$

$$\nabla (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}$$

$$\Delta f = \text{div grad } f$$

$$\Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}$$

Ostalo:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

## 2.2 Zadaci

1. Krivulja  $K$  je presjek plohe  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$  i ravnine  $x + y = 1$ . Odredite jednu njenu parametrizaciju te vektor smjera tangente u točki  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ .
2. Izračunajte gradijent skalarnog polja  $f(x, y, z) = \ln \frac{yz}{x} + 2$ . Odredite točku  $T$  za koju je  $(\text{grad } f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .
3. Zadano je vektorsko polje  $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ . Izračunajte  $\text{div } \vec{v}$  i  $\text{rot } \vec{v}$ .
4. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja  $\varphi = xy^2 + z^3 - xyz$  u točki  $T(1, 1, 2)$  u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara kuteve  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$  respektivno.
5. Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja  $\vec{a} = xz\vec{i} + 3\vec{j} - y\sqrt{z}\vec{k}$  u točki  $T(0, -4, 1)$  u smjeru vektora  $\vec{s} = (2, -2, -1)$ .
6. Izračunajte  $\vec{v}$  ako je  $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$ , gdje je  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$  i  $r$  njegova duljina.
7. Izračunajte  $\frac{\partial [r(\vec{a} \cdot \vec{r})]}{\partial \vec{a}}$  ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor, a  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ .
8. Izračunajte  $\nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})]$  ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor, a  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ .
9. Izračunajte  $\nabla [r \nabla (r\vec{r})]$  ako je  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ ,  $r = |\vec{r}|$ .
10. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja  $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$  u točki  $T(\sqrt{3}, 0, 1)$  u smjeru vektora  $\vec{k}$ .
11. Izračunajte 
$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial \vec{s}}$$
 ako je  $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + 5xy\vec{j} + xy^2\vec{k}$  i  $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .
12. Izračunajte 
$$\nabla \left( \frac{r^2 \vec{r}}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right)$$
 ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor, a  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ .
13. Izračunajte  $\Delta r \vec{r}$  ako je  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ ,  $r = |\vec{r}|$ .
14. Izračunajte 
$$\nabla \ln \{r e^r + \nabla [r(\vec{a} \times \vec{r})]\}$$
 ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor,  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ , a  $r$  njegova duljina.
15. Izračunajte 
$$\frac{\partial (\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}}$$
 u točki  $T(1, 1, 1)$  ako je  $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ .

**Rješenja:**

1. Krivulja  $K$  je presjek plohe  $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$  i ravnine  $x + y = 1$ . Odredite jednu njenu parametrizaciju te vektor smjera tangente u točki  $A \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$ .

Odredimo projekciju krivulje  $K$  na  $xz$  ravninu tako da  $y = 1 - x$  uvrstimo u jednadžbu prve plohe.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2(1-x)^2 + z^2 &= 2 \\ 4x^2 - 4x + z^2 &= 0 \\ x^2 - x + \frac{1}{4}z^2 &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4} &= \frac{1}{4} \\ \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} &= 1 \end{aligned}$$

Projekcija je pomaknuta elipsa koju možemo parametrizirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \\ z(t) &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Još preostaje odrediti  $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - x(t) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t \end{aligned}$$

pa je time dobivena jedna parametrizacija krivulje  $K$ .

Izjednačavanjem  $x(t) = \frac{1}{2}$ ,  $y(t) = \frac{1}{2}$ ,  $z(t) = 1$  dobijemo parametar  $t_0$  koji odgovara točki  $A$ . Dakle,  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ . Derivacije komponenata su  $x'(t) = -\frac{1}{2} \sin t$ ,  $y'(t) = \frac{1}{2} \sin t$ ,  $z'(t) = \cos t$ . Vektor smjera tangente u točki  $A$  je

$$\vec{s} = \frac{-1}{2} \sin t_0 \vec{i} + \frac{1}{2} \sin t_0 \vec{j} + \cos t_0 \vec{k} = \frac{-1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}.$$

2. Izračunajte gradijent skalarnog polja  $f(x, y, z) = \ln \frac{yz}{x} + 2$ . Odredite točku  $T$  za koju je  $(\text{grad } f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \frac{-1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k}$$

Znamo da su dva vektora jednaka ako su im jednake odgovarajuće komponente, stoga dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{x} = 2 &\Rightarrow x = \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{y} = -1 &\Rightarrow y = -1 \\ \frac{1}{z} = 3 &\Rightarrow z = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Tražena točka je  $T\left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{3}\right)$ .

3. Zadano je vektorsko polje  $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ . Izračunajte  $\text{div } \vec{v}$  i  $\text{rot } \vec{v}$ .

Divergencija vektorskog polja je skalarno polje koje računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial xyz}{\partial z} \\ &= 2x + 2y + xy.\end{aligned}$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje koje računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & xyz \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial xyz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial xyz}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \\ &= xz\vec{i} - yz\vec{j}.\end{aligned}$$

4. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja  $\varphi = xy^2 + z^3 - xyz$  u točki  $T(1, 1, 2)$  u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara kuteve  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$  respektivno.

Derivaciju skalarnog polja  $\varphi$  u točki  $T$  u smjeru jediničnog vektora  $\vec{s}$  računamo pomoću  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}(T) = \text{grad } \varphi(T) \cdot \vec{s}$ . Jedinični vektor  $\vec{s}$  koji s koordinatnim osima zatvara kuteve  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$  respektivno jednak je

$$\vec{s} = \cos 60^\circ \vec{i} + \cos 45^\circ \vec{j} + \cos 60^\circ \vec{k} = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}.$$

Gradijent skalarnog polja  $\varphi$  je

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = (y^2 - yz)\vec{i} + (2xy - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k}.$$

Sada je



$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}} &= \left( (y^2 - yz)\vec{i} + (2xy - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k} \right) \cdot \left( \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \right) \\ &= \frac{y^2 - yz}{2} + \frac{\sqrt{2}(2xy - xz)}{2} + \frac{3z^2 - xy}{2}.\end{aligned}$$

Konačno, vrijednost u točki  $T$  iznosi  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}(1, 1, 2) = 5$ .

5. Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja  $\vec{a} = xz\vec{i} + 3\vec{j} - y\sqrt{z}\vec{k}$  u točki  $T(0, -4, 1)$  u smjeru vektora  $\vec{s} = (2, -2, -1)$ .

Jedinični vektor u smjeru vektora  $\vec{s}$  je vektor  $\vec{s}_0 = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$ . Derivaciju vektorskog polja  $\vec{a}$  u smjeru vektora  $\vec{s}$  računamo pomoću

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}} = (\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(a_x))\vec{i} + (\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(a_y))\vec{j} + (\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(a_z))\vec{k}.$$

Gradijenti skalarnih komponenti su

$$\begin{aligned}\text{grad}(a_x) &= \text{grad}(xz) = z\vec{i} + x\vec{k}, \\ \text{grad}(a_y) &= \text{grad}(3) = \vec{0}, \\ \text{grad}(a_z) &= \text{grad}(-y\sqrt{z}) = -\sqrt{z}\vec{j} - \frac{y}{2\sqrt{z}}\vec{k}.\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}} &= \left( \vec{s}_0 \cdot (z\vec{i} + x\vec{k}) \right)\vec{i} + (\vec{s}_0 \cdot \vec{0})\vec{j} + \left( \vec{s}_0 \cdot \left( -\sqrt{z}\vec{j} - \frac{y}{2\sqrt{z}}\vec{k} \right) \right)\vec{k} \\ &= \left( \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}x \right)\vec{i} + \left( \frac{2}{3}\sqrt{z} + \frac{y}{6\sqrt{z}} \right)\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}}(0, -4, 1) &= \frac{2}{3}\vec{i}.\end{aligned}$$

6. Izračunajte  $\vec{v}$  ako je  $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$ , gdje je  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$  i  $r$  njegova duljina.

Radi jednostavnijeg računa koristimo Hamiltonov operator  $\nabla$ .

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \nabla(r^2 \ln r) = \nabla(r^2 \underline{\ln r}) + \nabla(\underline{r^2} \ln r) \\ &= (\ln r)\nabla(r^2) + r^2\nabla(\ln r) = (\ln r)2r\vec{r}_0 + r^2\frac{1}{r}\vec{r}_0 \\ &= (\ln r)2r\frac{\vec{r}}{r} + r\frac{\vec{r}}{r} = (2\ln r + 1)\vec{r}.\end{aligned}$$

7. Izračunajte  $\frac{\partial [r(\vec{a} \cdot \vec{r})]}{\partial \vec{a}}$  ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor, a  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [r(\vec{a} \cdot \vec{r})]}{\partial \vec{a}} &= \vec{a}_0 \cdot \text{grad} (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) \\
 &= \vec{a}_0 \cdot \nabla (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) \\
 &= \vec{a}_0 \cdot \nabla (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) + \vec{a}_0 \cdot \nabla (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) \\
 &= \vec{a}_0 (\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla r + \vec{a}_0 r \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) \\
 &= \vec{a}_0 (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}_0 + \vec{a}_0 r \vec{a} \\
 &= \vec{a}_0 \cdot \vec{r}_0 (\vec{a} \cdot \vec{r}) + r (\vec{a}_0 \cdot \vec{a}) \\
 &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{ar} \vec{a} \cdot \vec{r} + r \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{a} \right) \\
 &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{ar} \vec{a} \cdot \vec{r} + ar
 \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili

$$\begin{aligned}
 \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) &= \vec{r} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{r} + r \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{r}} + a \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{a}} \\
 &= \vec{r} \times \vec{0} + \vec{a} \times \vec{0} + r \vec{0} + a \vec{a}_0 \\
 &= \vec{a}.
 \end{aligned}$$

8. Izračunajte  $\nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})]$  ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor, a  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ .

Primijetimo da nabla djeluje na vektorsko polje, što znači da računamo divergenciju polja  $(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})] &= \nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})] + \nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})] \\
 &= (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla (\vec{a} \times \vec{r}) \\
 &= (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{r}) \\
 &= 0 + (\vec{r} \cdot \vec{0} - \vec{a} \cdot \vec{0}) = 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

9. Izračunajte  $\nabla [r \nabla (r \vec{r})]$  ako je  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ ,  $r = |\vec{r}|$ .

Izračunajmo prvo:  $\nabla (r \vec{r}) = \nabla (r \vec{r}) + \nabla (r \vec{r}) = \vec{r} \cdot \nabla r + r \nabla \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}_0 + 3r = 4r$ .

$$\nabla [r \nabla (r \vec{r})] = \nabla (4r^2) = 8r \vec{r}_0 = 8\vec{r}.$$

10. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja  $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$  u točki  $T(\sqrt{3}, 0, 1)$  u smjeru vektora  $\vec{k}$ .

Usmjerenu derivaciju vektorskog polja u smjeru jedničnog vektora  $\vec{k}$  računamo korištenjem novog operatora  $\vec{s}_0 \cdot \nabla$ . Ovdje je  $\vec{s}_0 = \vec{k}$ . U 6. zadatku smo izračunali da je  $\vec{v} = (2 \ln r + 1) \vec{r}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{k}} &= (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{k} \cdot \nabla) (2 \ln r + 1) \vec{r} \\ &= (\vec{k} \cdot \nabla) (2 \ln r + 1) \vec{r} + (\vec{k} \cdot \nabla) (2 \ln r + 1) \vec{r} \\ &= \vec{r} \left[ \vec{k} \cdot \nabla (2 \ln r + 1) \right] + (2 \ln r + 1) (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{r} \\ &= \vec{r} \left[ \vec{k} \cdot \left( \frac{2}{r} \vec{r}_0 \right) \right] + (2 \ln r + 1) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{k}} \\ &= \vec{r} \left( \vec{k} \cdot \vec{r} \frac{2}{r^2} \right) + (2 \ln r + 1) \vec{k}. \end{aligned}$$

U ovom postupku je jako važno paziti na to da ne vrijedi svojstvo asocijativnosti za skalarno množenje vektora. Prema tome vektor  $\vec{r}$  u četvrtoj liniji ne množi vektor  $\vec{r}_0$ . Prvo se mora izvršiti skalarno množenje unutar uglate zagrade  $\vec{r}_0 \cdot \vec{k}$ , a zatim vektor  $\vec{r}$  pomnožiti tako dobivenim skalarom.

Radij-vektor točke  $T$  je  $\vec{r}_T = \vec{r} = \sqrt{3} \vec{i} + \vec{k}$  duljine  $r = 2$ . Stoga imamo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{k}} (\sqrt{3}, 0, 1) = \frac{\sqrt{3} \vec{i} + \vec{k}}{2} + (2 \ln 2 + 1) \vec{k}.$$

11. Izračunajte

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial \vec{s}}$$

ako je  $\vec{a} = 2x^2 y \vec{i} + 5xy \vec{j} + xy^2 \vec{k}$  i  $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

Budući da je  $\vec{a}$  vektorsko polje primijenit ćemo:

$$\Delta \vec{a} = \nabla \nabla \vec{a} - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}).$$

Imamo da je  $\nabla \vec{a} = 4xy + 5x$ , a  $\nabla \times \vec{a} = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + (5y - 2x^2) \vec{k}$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{a} &= \nabla (4xy + 5x) - \nabla \times (2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + (5y - 2x^2) \vec{k}) \\ &= (4y + 5) \vec{i} + 4x \vec{j} - (5 \vec{i} + 4x \vec{j} - 2x \vec{k}) \\ &= 4y \vec{i} + 2x \vec{k} = \vec{a}'. \end{aligned}$$

Za računanje usmjerene derivacije vektorskog polja  $\Delta \vec{a} = \vec{a}'$  odredimo:

$$\text{grad}(a'_x) = \text{grad}(4y) = 4 \vec{j},$$

$$\text{grad}(a'_y) = \text{grad} 0 = \vec{0},$$

$$\text{grad}(a'_z) = \text{grad}(2x) = 2 \vec{i}.$$

Jedinični vektor u smjeru vektora  $\vec{s}$  je  $\vec{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$  i konačno je

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial s} = (\vec{s}_0 4\vec{j})\vec{i} + (\vec{s}_0 \cdot \vec{0})\vec{j} + (\vec{s}_0 2\vec{i})\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{14}} (8\vec{i} + 2\vec{k}).$$

12. Izračunajte

$$\nabla \left( \frac{r^2 \vec{r}}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right)$$

ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor, a  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ .

Nabla djeluje na vektorsko polje i kao rezultat moramo dobiti skalarno polje. Izraz unutar zagrade ćemo drugačije zapisati tako da odvojimo skalarna od vektorskih polja radi preglednijeg zapisa. Koristit ćemo  $\nabla \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$ .

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{r^2 \vec{r}}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right) &= \nabla \left( \frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \vec{r} \right) = \nabla \left( \frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right) \vec{r} + \nabla \left( \frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \vec{r} \right) \\ &= \vec{r} \cdot \nabla \left( \frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right) + \frac{r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} \nabla \vec{r} \\ &= \vec{r} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla r^2 - r^2 \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{a} \cdot \vec{r})^2} + \frac{r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} 3 \\ &= \vec{r} \cdot \frac{2\vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{a}}{(\vec{a} \cdot \vec{r})^2} + \frac{3r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} \\ &= \frac{2r^2 (\vec{a} \cdot \vec{r}) - r^2 (\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{a} \cdot \vec{r})^2} + \frac{3r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} \\ &= \frac{r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} + \frac{3r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} = \frac{4r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})}. \end{aligned}$$

13. Izračunajte  $\Delta r \vec{r}$  ako je  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ ,  $r = |\vec{r}|$ .

Koristit ćemo rezultate iz 9. zadatka.

$$\begin{aligned} \Delta r \vec{r} &= \nabla \nabla r \vec{r} - \nabla \times (\nabla \times r \vec{r}) \\ &= \nabla (4r) - \nabla \times [\nabla r \times \vec{r} + r (\nabla \times \vec{r})] \\ &= 4\vec{r}_0 - \nabla \times (\vec{r}_0 \times \vec{r} + r \vec{0}) = 4\vec{r}_0 - \nabla \times \vec{0} \\ &= 4\vec{r}_0 - \vec{0} = 4\vec{r}_0. \end{aligned}$$

14. Izračunajte

$$\nabla \ln \{ r e^r + \nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})] \}$$

ako je  $\vec{a}$  konstantan vektor,  $\vec{r}$  radij-vektor točke  $T(x, y, z)$ , a  $r$  njegova duljina.

Izračunajmo prvo  $\nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})]$ , pri čemu ćemo koristiti rezultate iz 8. zadatka.

$$\begin{aligned} \nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})] &= (\vec{a} \times \vec{r}) \nabla r + r \nabla (\vec{a} \times \vec{r}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{r}) \vec{r}_0 + r \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\nabla \ln \{ r e^r + \nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})] \} = \nabla \ln (r e^r) = \frac{1}{r e^r} (e^r + r e^r) \vec{r}_0 = \frac{1+r}{r^2} \vec{r}.$$

15. Izračunajte

$$\frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}}$$

u točki  $T(1, 1, 1)$  ako je  $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ .

Vektor  $\vec{s}$  je jedinični vektor.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}} &= (\vec{s} \cdot \nabla) (\sin r \vec{r}) = (\vec{s} \cdot \nabla) (\sin r \vec{r}) + (\vec{s} \cdot \nabla) (\underline{\sin r \vec{r}}) \\ &= \vec{r} [\vec{s} (\nabla \sin r)] + \sin r \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{s}} = \vec{r} (\vec{s} (\cos r \vec{r}_0)) + \sin r \vec{s}. \end{aligned}$$

Radij-vektor točke  $T$  je  $\vec{r}_T = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Uočimo

$$(\vec{r}_0)_T = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{s} = \vec{s}_0$$

i  $\vec{s}_0 \cdot \vec{r}_0 = 1$  iz čega slijedi  $\frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}} = \vec{r} \cos r + \vec{s}_0 \sin r$ .

Konačno je

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}}(1, 1, 1) &= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cos \sqrt{3} + \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3} \\ &= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \left( \cos \sqrt{3} + \frac{\sin \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

### 3 KRIVULJNI INTEGRAL

#### 3.1 Osnovni pojmovi

##### Krivuljni integral prve vrste

Neka je  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$  vektorska funkcija i neka je krivulja  $\Gamma = \{T(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$  njen graf.

Uređeni par  $([a, b], \vec{r}(t))$  zove se **parametrizacija krivulje**  $\Gamma$ .

Za krivulju  $\Gamma \dots \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , kažemo da je **jednostavna glatka krivulja** ili **Jordanov luk** ako vrijedi:

1.  $\vec{r}$  je neprekidna injekcija na  $[a, b]$ ,
2. derivacija  $\vec{r}'(t)$  postoji za svako  $t \in [a, b]$  i neprekidna je,
3.  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$  za svako  $t \in [a, b]$ .

Ako je  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ , onda krivulju zovemo zatvorenom krivuljom.

Neka je Jordanov luk  $\Gamma$  zadan parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

i neka je na njemu zadano skalarno polje  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $\Gamma \subset \Omega$ ). Ako je funkcija

$$t \mapsto f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad t \in [a, b],$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt$$

nazivamo **integralom skalarnoga polja  $f$  po krivulji  $\Gamma$**  (ili **krivuljnim integralom prve vrste**) i označavamo sa

$$\int_{\Gamma} f ds.$$

- Krivuljni integral prve vrste ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje.
- U slučaju kada je  $\Gamma$  po dijelovima Jordanov luk ( $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ ) vrijedi

$$\int_{\Gamma} f ds \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\Gamma_1} f ds + \dots + \int_{\Gamma_n} f ds.$$

### Krivuljni integral druge vrste

Neka je dano vektorsko polje  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , te neka je orijentirani Jordanov luk  $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B} \subset \Omega$  zadan parametrizacijom  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ . Ako je funkcija

$$t \mapsto a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t),$$

$t \in [a, b]$  integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\begin{aligned} \int_a^b a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt \\ = \int_a^b [\vec{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t)] dt \end{aligned}$$

nazivamo **integralom vektorskoga polja  $\vec{a}$  po orijentiranoj krivulji  $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}$**  (ili **krivuljnim integralom druge vrste**) i označavamo sa

$$\int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

- $\int_{\hat{B}\hat{A}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = - \int_{\hat{A}\hat{B}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ ;
- $\int_{\hat{\Gamma}} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot d\vec{r} = \lambda \int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \mu \int_{\hat{\Gamma}} \vec{b} \cdot d\vec{r}$

gdje su  $\vec{a}, \vec{b}$  integrabilna vektorska polja,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}$  orijentirana po dijelovima glatka krivulja.

Vektorsko polje  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$  je **potencijalno** ili **konzervativno** ako postoji skalarno polje  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  takvo da je  $\vec{a} = \text{grad } f$ . Polje  $f$  je potencijal polja  $\vec{a}$ .

- Krivuljni integral vektorskog polja  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$  ne ovisi o putu integracije već samo o početnoj i krajnjoj točki ako i samo ako je  $\vec{a}$  potencijalno polje.
- Na konveksnom skupu  $\Omega$  vrijedi

$$\vec{a} = \text{grad } f \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \vec{a} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\hat{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \forall \hat{\Gamma}.$$

Neka su  $P, Q : X \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  te neka je  $\hat{\Gamma} \subset X$  pozitivno orijentirani zatvoreni po dijelovima Jordanov luk. Tada vrijedi tzv. **Greenova formula**

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\hat{\Gamma}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

pri čemu je  $D \subseteq X$  područje omeđeno krivuljom  $\Gamma$ , tj.  $\partial D = \Gamma$ . ( $\partial D$  je oznaka za rub skupa  $D$ ).



### 3.2 Zadaci

1. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x - y) ds$$

ako je krivulja  $K$  kružnica  $x^2 + y^2 = 3x$ .

2. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x + y) ds$$

ako je krivulja  $K$  trokut s vrhovima  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$  i  $C(0, 0)$ .

3. Izračunajte

$$I = \int_K \left( x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$$

ako je krivulja  $K$  astroida dana jednadžbama  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

4. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) ds$$

ako je krivulja  $K$  presjek ploha  $x^2 + 2y^2 = 4$  i  $z = y$ ,  $y \geq 1$ .

5. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (y - 1) dx$$

ako je  $K$  dio krivulje  $x^2 + y^2 = 2x + 2y$  koja se nalazi u prvom kvadrantu, prijeđena u pozitivnom smjeru.

6. Izračunajte

$$I = \int_K ye^{xy} dx + (x + xe^{xy}) dy$$

ako je  $K$  pozitivno orijentirana gornja polukružnica  $x^2 + y^2 = 1$ .

7. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (2a - y) dx + x dy$$

ako je krivulja  $K$  cikloida dana jednadžbama  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

8. Pokažite da je polje

$$\vec{a} = \frac{yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$$

potencijalno i odredite potencijal. Izračunajte  $\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ .

9. Odredite konstante  $a$ ,  $b$  i  $c$  tako da vektorsko polje

$$\vec{a} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

bude potencijalno.

10. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K y \operatorname{tg}^2 x \, dx + \operatorname{tg} x \, dy$$

ako je  $K$  kružnica  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$  prijeđena u pozitivnom smjeru.

11. Izračunajte

$$I = \int_K (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - z) \, dz$$

ako je krivulja  $K$  dio pravca od točke  $A(1, -1, 2)$  do  $B(2, 0, 1)$ .

12. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$$

ako je  $K$  dio krivulje  $y = 1 - |1 - x|$ , za  $0 \leq x \leq 2$ .

13. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$I = \int_K y^3 \, dx + xy^2 \, dy,$$

gdje je  $K$  pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama  $y = x^2$  i  $x = y^2$ .

**Rješenja:**

1. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x - y) ds$$

ako je krivulja  $K$  kružnica  $x^2 + y^2 = 3x$ .

Krivulja  $K$  je kružnica  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$  čija parametrizacija je dana sa:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \\ y &= \frac{3}{2} \sin t. \end{aligned}$$

Računamo:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{-3}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{3}{2} \cos t\right)^2} dt = \frac{3}{2} dt,$$

$$I = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} (1 + \cos t - \sin t) dt = \frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}.$$

2. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x + y) ds$$

ako je krivulja  $K$  trokut s vrhovima  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$  i  $C(0, 0)$ .

Integral je potrebno rastaviti na tri integrala tako da integriramo po svakoj stranici trokuta.

Stranica  $K_{CA}$  je dio  $x$  osi za  $x \in [0, 1]$ . Ovdje je  $x = x$ ,  $y = 0$ ,  $ds = dx$ .

Stranica  $K_{CB}$  je dio  $y$  osi za  $y \in [0, 1]$ . Ovdje je  $x = 0$ ,  $y = y$ ,  $ds = dy$ .

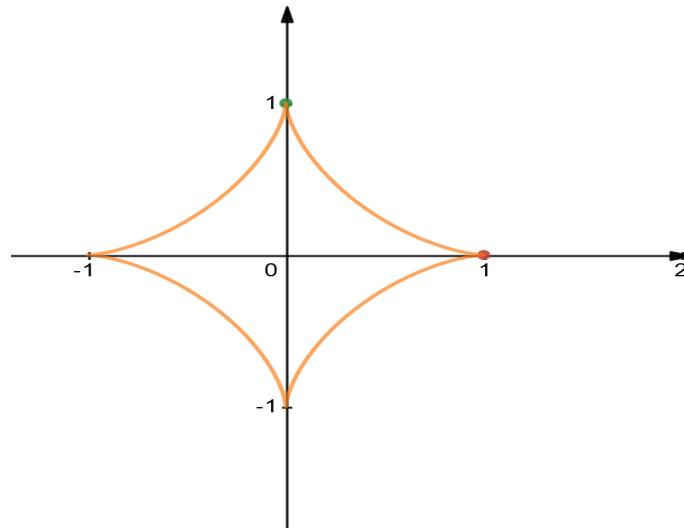
Stranica  $K_{AB}$  je dio pravca  $y = 1 - x$  za  $x \in [0, 1]$ . Ovdje je  $x = x$ ,  $y = 1 - x$ ,  $ds = \sqrt{2} dx$ .

$$\begin{aligned} I &= I_{K_{CA}} + I_{K_{CB}} + I_{K_{AB}} = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy + \int_0^1 \sqrt{2} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. Izračunajte

$$I = \int_K \left( x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$$

ako je krivulja  $K$  astroida dana jednačbama  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .



Slika 1: Astroida ( $a = 1$ )

Prvo izračunajmo derivacije funkcija  $x$  i  $y$ :

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

a zatim je

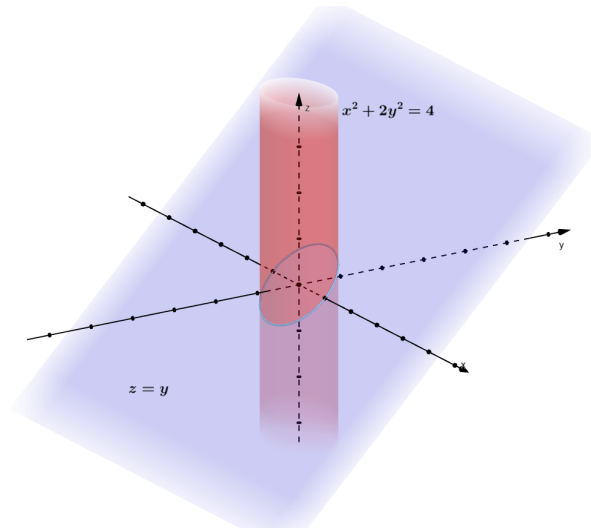
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= 3a \sin t \cos t, \quad t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a \sin t \cos t dt \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos t dt \right] = \dots = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

4. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) \, ds$$

ako je krivulja  $K$  presjek ploha  $x^2 + 2y^2 = 4$  i  $z = y, y \geq 1$ .



Slika 2: Presjek cilindra i ravnine

Projekcija prostorne krivulje  $K$  na  $xy$  ravninu je dio elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Parametrizirajmo projekciju i izrazimo  $z$  preko novih funkcija  $x$  i  $y$ :

$$x = 2 \cos t,$$

$$y = \sqrt{2} \sin t,$$

$$z = \sqrt{2} \sin t,$$

$$ds = \sqrt{4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t} \, dt = 2 \, dt.$$

Kako bismo pronašli granice za parametar  $t$  iskoristimo  $y \geq 1$ . Prema tome je  $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , odnosno  $t \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ . Sada je

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (4 \cos^2 t + 2 \sin^2 t) 2 \, dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (2 + 2 \cos^2 t) \, dt = \dots = 3\pi - 2.$$

5. Izračunajte vrijednost integrala

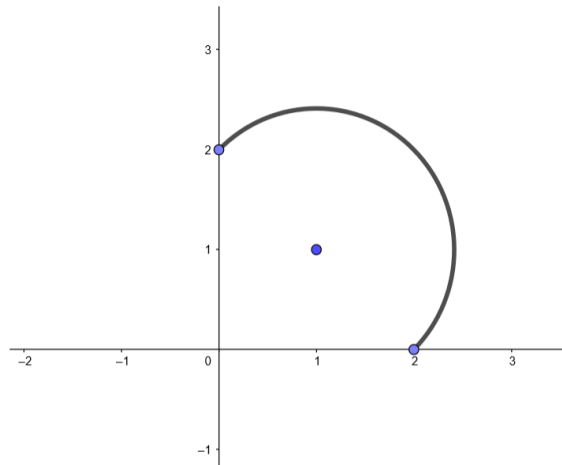
$$I = \int_K (y - 1) \, dx$$

ako je  $K$  dio krivulje  $x^2 + y^2 = 2x + 2y$  koja se nalazi u prvom kvadrantu, prijeđena u pozitivnom smjeru.

Jednadžbu  $x^2 + y^2 = 2x + 2y$  trebamo zapisati u standardnom obliku, tj. dopuniti izraze  $x^2 - 2x$  i  $y^2 - 2y$  do kvadrata binoma:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Ovo je jednadžba kružnice sa središtem u točki  $(1, 1)$  radijusa  $\sqrt{2}$ .



Slika 3: Dio kružnice u prvom kvadrantu

Promatramo samo dio kružnice koji se nalazi u prvom kvadrantu. Parametrizirajmo ga:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \sqrt{2} \cos t, & dx &= -\sqrt{2} \sin t \, dt, \\ y - 1 &= \sqrt{2} \sin t, & dy &= \sqrt{2} \cos t \, dt. \end{aligned}$$

Potrebno je još odrediti granice za parametar  $t$  iz čega će biti jasno da se radi o dijelu kružnice u prvom kvadrantu. Za točku u kojoj kružnica presijeca  $x$ -os vrijedi da je  $y = 0$ . Uvrstimo  $y = 0$  u parametrizaciju i dobijemo  $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  pa je  $t = \frac{-\pi}{4}$ . Slično, za točku u kojoj kružnica presijeca  $y$ -os vrijedi da je  $x = 0$  i  $\cos t = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ , a iz čega slijedi  $t = \frac{3\pi}{4}$ . Sada možemo računati vrijednost integrala  $I$ :

$$I = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2} \sin t \left( -\sqrt{2} \sin t \right) dt = -2 \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 t \, dt = - \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos 2t) \, dt = \dots = -\pi.$$

6. Izračunajte

$$I = \int_K ye^{xy} \, dx + (x + xe^{xy}) \, dy$$

ako je  $K$  pozitivno orijentirana gornja polukružnica  $x^2 + y^2 = 1$ .

Parametrizacija pozitivno orijentirane jedinične centralne gornje polukružnice je dana sa:

$$\begin{aligned}x &= \cos t, & dx &= -\sin t dt, \\y &= \sin t, & dy &= \cos t dt, \quad t \in [0, \pi].\end{aligned}$$

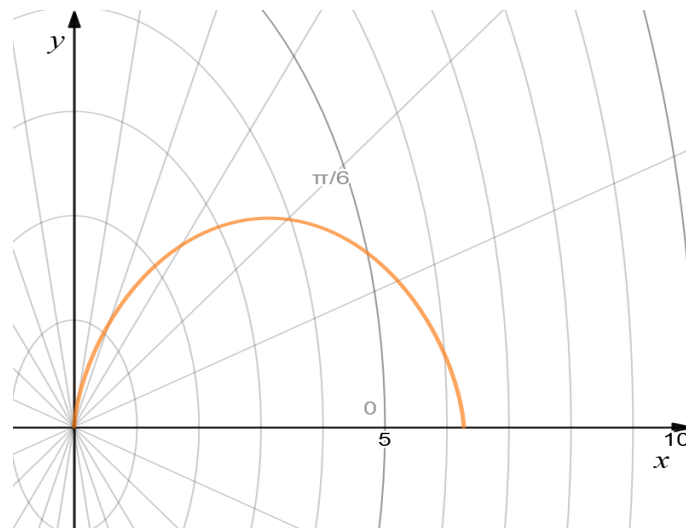
Sve uvrstimo u integral i računamo:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi} \sin t e^{\sin t \cos t} (-\sin t) dt + \int_0^{\pi} \cos t \cos t dt + \int_0^{\pi} \cos t e^{\sin t \cos t} \cos t dt \\&= \left\{ \text{u prvom i zadnjem integralu izlučimo eksponencijalnu funkciju} \right\} \\&= \int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt + \int_0^{\pi} \cos^2 t dt \\&= \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{2} \sin 2t} \cos 2t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) dt \\&= \left\{ \text{ uvedemo supstituciju } \frac{1}{2} \sin 2t = z \right\} = \dots = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

7. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (2a - y) dx + x dy$$

ako je krivulja  $K$  cikloida dana jednačbama  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .



Slika 4: Cikloida ( $a = 1$ )

Budući da je jednačba krivulje već dana u parametarskom obliku kao i granice za  $t$  možemo odmah računati vrijednost integrala:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a \cos t) a (1 - \cos t) + a(t - \sin t) a \sin t] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [a^2 (1 + \cos t) (1 - \cos t) + a^2 (t \sin t - \sin^2 t)] dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t) dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \left\{ \text{parcijalna integracija} \right\} = \dots = -2a^2\pi.
 \end{aligned}$$

8. Pokažite da je polje

$$\vec{a} = \frac{yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$$

potencijalno i odredite potencijal. Izračunajte  $\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ .

Vidimo da je

$$P = \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}, \quad Q = \frac{zx}{1 + x^2y^2z^2}, \quad R = \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2}.$$

Provjerimo jesu li parcijalne derivacije u parovima jednake:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{z(1 + x^2y^2z^2) - yz2yx^2z^2}{(1 + x^2y^2z^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y(1 + x^2y^2z^2) - yz2zx^2y^2}{(1 + x^2y^2z^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x(1 + x^2y^2z^2) - zx2zx^2y^2}{(1 + x^2y^2z^2)^2}.$$

Zaključujemo da je polje potencijalno. Stoga integral polja  $\vec{a}$  ne ovisi o putu integracije. Potencijal  $u(x, y, z)$  računamo prema

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, u, z) du + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, v) dv + C$$



pa je

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \int_0^x \frac{yz}{1+t^2y^2z^2} dt + \int_0^y \frac{z \cdot 0}{1+0^2u^2z^2} du + \int_0^z \frac{0 \cdot 0}{1+0^20^2v^2} dv + C \\
 &= \int_0^x \frac{yz}{1+t^2y^2z^2} dt + C = \left\{ \begin{array}{l} \text{supst. } tyz = k \\ yz dt = dk, t \rightarrow 0, k \rightarrow 0, t \rightarrow x, k \rightarrow xyz \end{array} \right\} \\
 &= \int_0^{xyz} \frac{dk}{1+k^2} + C = \arctg k \Big|_0^{xyz} = \arctg xyz + C
 \end{aligned}$$

i

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} d\vec{r} = u(1, 1, 1) - u(0, 1, 1) = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Odredite konstante  $a$ ,  $b$  i  $c$  tako da vektorsko polje

$$\vec{a} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

bude potencijalno.

Možemo izračunati  $\text{rot } \vec{a}$  i izjednačiti s  $\vec{0}$  ili napraviti kao u prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = b, \quad \text{pa je } b = 2, \\
 \frac{\partial P}{\partial z} = a, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 4, \quad \text{pa je } a = 4, \\
 \frac{\partial Q}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = c, \quad \text{pa je } c = -1.
 \end{aligned}$$

10. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K y \text{tg}^2 x dx + \text{tg} x dy$$

ako je  $K$  kružnica  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$  prijeđena u pozitivnom smjeru.

Budući da je  $K$  zatvorena, ravninska krivulja koja omeđuje područje  $D$  može se primjeniti Greenova formula.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 x} - \text{tg}^2 x = 1,$$

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy.$$

Ovaj dvostruki integral računa površinu područja  $D$ , u ovom slučaju površinu kruga radijusa 1. Dakle,

$$I = \pi.$$

11. Izračunajte

$$I = \int_{\vec{K}} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz$$

ako je krivulja  $K$  dio pravca od točke  $A(1, -1, 2)$  do  $B(2, 0, 1)$ .

Jednadžba pravca koji prolazi točkama  $A$  i  $B$  glasi:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y + 1}{0 - (-1)} = \frac{z - 2}{1 - 2},$$

odnosno

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

U parametarskom obliku za  $t \in [0, 1]$  je:

$$\begin{aligned} x &= t + 1, & dx &= dt, \\ y &= t - 1, & dy &= dt, \\ z &= -t + 2, & dz &= -dt. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(t - 1 + t - 2) + (-t + 2 - t - 1) + (t + 1 + t - 2)(-1)] dt \\ &= \int_0^1 (-2t - 1) dt = -2. \end{aligned}$$

12. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$$

ako je krivulja  $K$  ...  $y = 1 - |1 - x|$ , za  $0 \leq x \leq 2$ .

Prvo zapišimo jednadžbu krivulje  $K$  prikladnije:

$$y = \begin{cases} x, & \text{ako je } 1 - x \geq 0 \\ 2 - x, & \text{ako je } 1 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

Sada je očito da moramo integral rastaviti u dva dijela; integral po dijelu pravca  $y = x$  (označimo taj dio pravca  $K_1$ ), za  $x \in [0, 1]$  i integral po dijelu pravca  $y = 2 - x$  ( $K_2$ ), za  $x \in [1, 2]$ .

Parametrizacija za  $K_1$  je dana sa:

$$\begin{aligned}x &= x, & dx &= dx, \\y &= x, & dy &= dx, \quad x \in [0, 1],\end{aligned}$$

a za  $K_2$ :

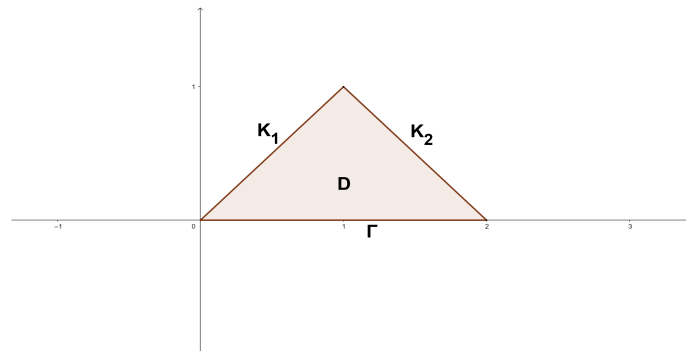
$$\begin{aligned}x &= x, & dx &= dx, \\y &= 2 - x, & dy &= -dx, \quad x \in [1, 2].\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}I &= \int_{K_1} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy + \int_{K_2} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\&= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 [(x^2 + 4 - 4x + x^2) - (x^2 - 4 + 4x - x^2)] dx \\&= \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 (2x^2 - 8x + 8) dx \\&= \frac{2}{3} + \left( \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Primjetimo da u zadatku orijentacija krivulje nije posebno naglašena. Mi smo ga riješili orijentirajući krivulju negativno (u smjeru gibanja kazaljke na satu).

Zadatak smo mogli riješiti i pomoću Greenove formule iako krivulja nije zatvorena, tako da primijenimo Greenovu formulu na područje  $D$  koje je trokut iznad  $x$  osi i od dobivenog rezultata oduzmemo  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , gdje je  $\Gamma$  dio  $x$  osi za  $x \in [0, 2]$ .



Slika 5: Područje  $D$

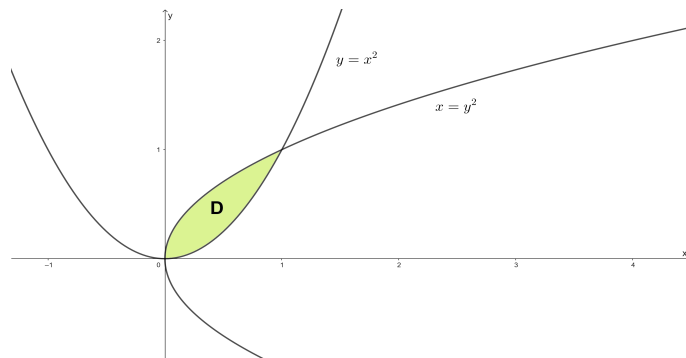
$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (2x - 2y) \, dx \, dy - \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^x (2x - 2y) \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (2x - 2y) \, dy - \int_0^2 x^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{3} + 1 - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Na ovaj način je konačni rezultat negativan jer je krivulja, prema pretpostavci Greenovog teorema, pozitivno orijentirana.

13. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$I = \int_K y^3 \, dx + xy^2 \, dy,$$

gdje je  $K$  pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama  $y = x^2$  i  $x = y^2$ .



Slika 6: Područje D

Budući da je

$$P(x, y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$$

$$Q(x, y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

prema Greenovoj formuli vrijedi

$$\begin{aligned}
 I &= \int_K y^3 \, dx + xy^2 \, dy = \iint_D (y^2 - 3y^2) \, dx \, dy \\
 &= \iint_D (-2y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2y^2) \, dy \\
 &= -\frac{2}{3} \int_0^1 y^3 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^6) \, dx = -\frac{6}{35}.
 \end{aligned}$$

## 4 PLOŠNI INTEGRAL

### 4.1 Osnovni pojmovi

#### Plošni integral prve vrste

Neka je  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  područje (otvoren i povezan skup) u  $xOy$  ravnini i  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija klase  $C^1$  na  $D$  ( $f$  ima neprekidne parcijalne derivacije na  $D$ ). Tada je skup

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

**glatka ploha** u prostoru  $\mathbb{R}^3$  ( $z = f(x, y)$ ) je njena eksplicitna jednačba).

Ako je  $S$  glatka ploha zadana eksplicitnom jednačbom  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , onda je njezina **površina**

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Neka je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , neprekidno skalarno polje, a  $S \subset \Omega$  glatka ploha zadana jednačbom  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , na zatvorenom području  $D$  omeđenom po dijelovima glatkom zatvorenom krivuljom. Tada dvostruki integral

$$\iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

nazivamo **plošnim integralom skalarnoga polja  $f$  po plohi  $S$**  (ili **plošnim integralom prve vrste**) i označavamo sa

$$\iint_S f dS.$$

Ako je ploha  $S$  po dijelovima glatka i sastavljena od konačno mnogo glatkih ploha  $S_1, \dots, S_n$  onda se njezin plošni integral prve vrste definira kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS_1 + \dots + \iint_{S_n} f dS_n.$$

Plošni integral prve vrste je linearan:

$$\iint_S (\lambda f + \mu g) dS = \lambda \iint_S f dS + \mu \iint_S g dS.$$

gdje su  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^3$ , neprekidne funkcije,  $S \subseteq X$  po dijelovima glatka ploha i  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Plošni integral druge vrste

Neka je  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  neprekidno vektorsko polje, a  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , jednačba orijentirane glatke plohe  $S \subset \Omega$ , pri čemu je  $D$  zatvoreno područje čiji je rub po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Tada dvostruki integral

$$\iint_D \left( -a_x \frac{\partial g}{\partial x} - a_y \frac{\partial g}{\partial y} + a_z \right)_{(x,y,g(x,y))} dx dy$$

nazivamo **plošnim integralom vektorskoga polja  $\vec{a}$  po orijentiranoj plohi  $\hat{S}$**  (ili **plošnim integralom druge vrste**) i označavamo sa

$$\iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad \text{ili} \quad \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS.$$

Plošni integral druge vrste se još naziva **tokom vektorskoga polja  $\vec{a}$  kroz plohu  $S$** .

Neka su  $\vec{a}, \vec{b} : \Omega \rightarrow V_O^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  neprekidna vektorska polja,  $S \subset \Omega$  orijentirana po dijelovima glatka ploha i  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Tada je:

- 1)  $\iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S};$
- 2)  $\iint_{\hat{S}} (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot d\vec{S} = \lambda \iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} + \mu \iint_{\hat{S}} \vec{b} \cdot d\vec{S}.$

Zadamo li formalno jedinične vektore normale na  $S$  pomoću njihovih kosinusa smjera

$$\vec{n}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

pripadni plošni integral druge vrste ima zapis

$$\iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS.$$

Može se izvesti još jedan zapis plošnog integrala druge vrste. Neka su dani neprekidna skalarna polja  $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  i orijentirana glatka ploha  $S \subset \Omega$ , te neka je

$$\vec{n}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

jedinični vektor normale na odabranu stranu  $S^+$  plohe  $S$ . Tada je pripadni plošni integral druge vrste

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

**Teorem o divergenciji:** Neka je  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_0^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  vektorsko polje klase  $C^1$  na  $\Omega$ , a  $V \subseteq \Omega$  zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom zatvorenom plohom  $\hat{S} \equiv \partial V$  orijentiranom vanjskim normalama. Tada vrijedi Ostrogradski-Gaussova formula

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \iint_{\partial V} \vec{a} \cdot d\vec{S}.$$

Ostrogradski-Gaussovu formulu možemo zapisati i u skalarnoj formi. Neka su  $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalarna polja klase  $C^1$  na okolini  $\Omega$  zatvorenog područja  $V \subset \mathbb{R}^3$ , čiji je rub  $\partial V$  po dijelovima glatka zatvorena ploha. Tada je

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS,$$

gdje su  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  kosinusi smjerova vanjske normale na plohu  $\partial V$ .

Ova formula omogućuje pretvaranje plošnog integrala po zatvorenoj plohi u trostruki integral po području koje ta ploha omeđuje.

**Teorem o gradijentu:** Neka je skalarno polje  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  klase  $C^1$  na  $\Omega$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{grad} f \, dV &= \iint_{\partial V} f \vec{n}_0 \, dS \\ &= \vec{i} \iint_{\partial V} f \cos \alpha \, dS + \vec{j} \iint_{\partial V} f \cos \beta \, dS + \vec{k} \iint_{\partial V} f \cos \gamma \, dS. \end{aligned}$$

**Teorem o rotaciji:** Neka je vektorsko polje  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_0^3$  klase  $C^1$  na  $\Omega$ . Tada vrijedi

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{a} \, dV = \iint_{\partial V} \vec{n}_0 \times \vec{a} \, dS.$$

**Teorem o Laplaceovom operatoru:** Neka je skalarno polje  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  klase  $C^2$  na  $\Omega$ . Tada vrijedi

$$\iiint_V \Delta f \, dV = \iiint_V \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) \, dV = \iint_{\partial V} (\operatorname{grad} f \cdot \vec{n}_0) \, dS.$$

Stokesova formula je poopćenje Greenove formule na prostorno vektorsko polje  $\vec{a}$ , plohu  $S \subset \mathbb{R}^3$  i njezin rub  $\partial S$ .

Neka je dana orijentabilna ploha  $S$  čiji je rub po dijelovima glatka krivulja  $\partial S$ . Kažemo da su ploha i njezin rub koherentno orijentirani, ako, gledano s vrha vektora normale na plohu u nekoj

točki, orijentacija krivulje nalaže kretanje po krivulji u pozitivnom smjeru, tj. suprotno gibanju kazaljke na satu.

**Stokesov teorem:** Neka je  $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$  vektorsko polje klase  $C^1$  na  $\mathbb{R}^3$ ,  $\hat{S} \subset \Omega$  orijentirana po dijelovima glatka ploha, a  $\partial\hat{S}$  koherentno joj orijentirani rub koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Tada vrijedi **Stokesova formula**

$$\iint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, dS = \iint_{\hat{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

I za Stokesovu formulu često se koristi skalarni zapis. Neka su  $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalarna polja klase  $C^1$  na  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $S \subset \Omega$  po dijelovima glatka ploha s koherentno orijentiranim rubom  $\partial S$  koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja te  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  kosinusi smjerova vektora normale na plohu  $S$ . Tada je

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial S} P \, dx + Q \, dy + R \, dz \\ &= \iint_S \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS. \end{aligned}$$



## 4.2 Zadaci

1. Izračunajte

$$\iint_S y \, dS$$

gdje je  $S$  dio ravnine  $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1$  u prvom oktantu.

2. Izračunajte

$$\iint_S z \, dS$$

ako je  $S$  dio sfere  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$  za koji je  $z \leq 2$ .

3. Neka je  $S$  dio stošca  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  za koji je  $x \leq 2$ . Izračunajte

$$\iint_S y^2 \, dS.$$

4. Izračunajte

$$\iint_S (xy + z^2) \, dS$$

ako je  $S$  dio stošca  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  isječen cilindrom  $x^2 + y^2 = 2x$ .

5. Izračunajte

$$\iint_S (x + y + z) \, dS$$

ako je  $S$  dio plohe  $x^2 + y^2 = 1$  koji se nalazi između ravnina  $z = 0$  i  $z = 2$ .

6. Izračunajte površinu dijela plohe  $z = 5x^2 + 5y^2$  za koji je  $0 \leq z \leq 5$ .

7. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z^2\vec{k}$$

kroz vanjsku stranu ruba tijela koje je omeđeno plohama  $z = 2(x^2 + y^2)$  i  $z = 2$ .

8. Izračunajte

$$\iint_S (x - z) \, dydz + (2y + z) \, dx dz$$

ako je  $S$  gornji dio ravnine  $x - 2y - z + 2 = 0$  isječen koordinatnim ravninama.

9. Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{z} \, dydz$$

ako je  $S$  vanjska strana dijela plohe  $z = x^2 + y^2$  za koji je  $0 \leq z \leq 4$ .

10. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$$

kroz vanjski dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  odsječen ravninom  $z = 1$ , a za  $z \geq 1$ .

11. Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog nađite tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$$

po plohi koja omeđuje područje  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 1\}$ .

12. Izračunajte

$$\iint_S x \, dydz + y \, dx dz + z \, dx dy$$

ako je  $S$  vanjska strana ruba tijela zadanog nejednakostima  $z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  i  $z \geq x^2 + y^2$ .

13. Uz pomoć Stokesove formule izračunajte

$$I = \int_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

vektorskog polja  $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$  po zatvorenoj krivulji  $K$  zadanoj kao sjecište ploha  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  i  $x^2 + y^2 = z^2$ , za  $z \geq 0$ .

14. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja

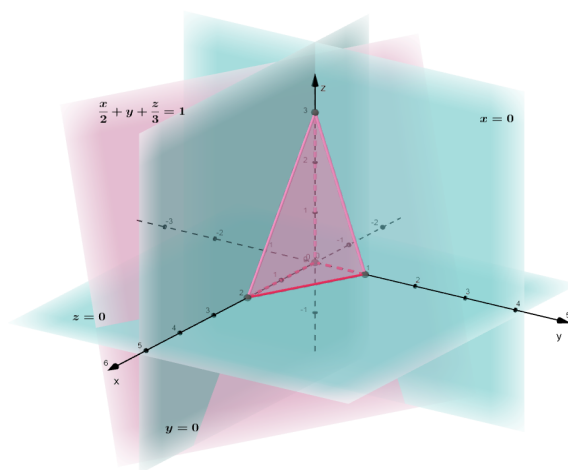
$$\vec{a} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$$

duž krivulje  $K \dots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 9 \end{cases}$ .

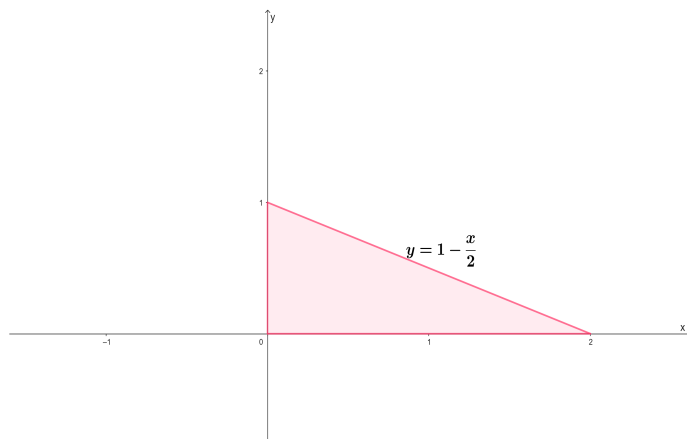
**Rješenja:**

1. Izračunajte

$$\iint_S y \, dS$$

gdje je  $S$  dio ravnine  $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1$  u prvom oktantu.

Slika 7: Dio ravnine isječen koordinatnim ravninama

Slika 8: Projekcija plohe  $S$  na  $xy$  ravninu

Jednadžbu plohe možemo zapisati eksplicitno kao  $z = g(x, y) = 3 - \frac{3}{2}x - 3y$  te odrediti njenu projekciju  $S_{xy}$  na  $xy$  ravninu. Tada su granice za  $x$  i  $y$ :

$$0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2} dx dy = \frac{7}{2} dx dy.$$

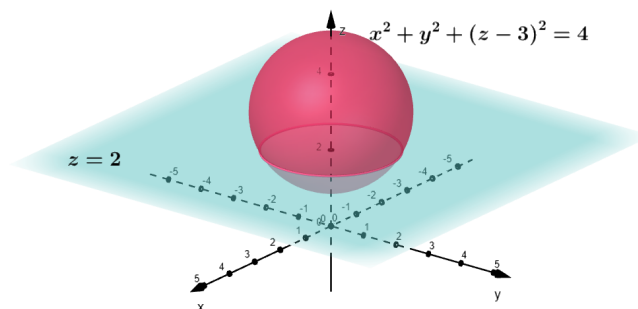
Sada je traženi integral

$$\iint_S y dS = \iint_{S_{xy}} y \cdot \frac{7}{2} dx dy = \frac{7}{2} \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} y dy = \frac{7}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{7}{6}.$$

2. Izračunajte

$$\iint_S z dS$$

ako je  $S$  dio sfere  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$  za koji je  $z \leq 2$ .



Slika 9: Presjek sfere i ravnine

Određimo projekciju  $S_{xy}$  plohe  $S$  na  $xy$  ravninu. Presjek sfere i ravnine  $z = 2$  je:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - 3)^2 &= 4 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

---


$$x^2 + y^2 = 3$$

iz čega slijedi da je projekcija dana sa  $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 3$ .

Sada još trebamo  $z$  izraziti pomoću  $x$  i  $y$ :

$$(z-3)^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$z = 3 \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Budući da je ploha dio donje polusfere biramo  $z = 3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ .

Nadalje, jednadžbu plohe možemo zapisati implicitno ( $F(x, y, z) = 0$ ) kao

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 - 4 = 0$$

pa računamo:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2(z-3))^2}}{|2(z-3)|} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2 + (z-3)^2)}}{2|z-3|} dx dy = \frac{\sqrt{4 \cdot 4}}{2|3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2} - 3|} dx dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \iint_S z dS = \iint_{S_{xy}} \left(3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Kako je  $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 3$  prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

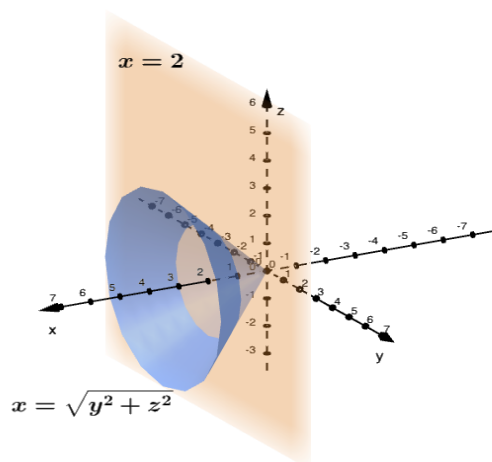
pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(3 - \sqrt{4 - r^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}} r dr = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{3r}{\sqrt{4 - r^2}} - r\right) dr \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(-3\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = 6\pi. \end{aligned}$$

3. Neka je  $S$  dio stošca  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$  za koji je  $x \leq 2$ . Izračunajte

$$\iint_S y^2 dS.$$

Jednadžbu plohe možemo zapisati eksplicitno kao  $x = g(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$  te odrediti njenu projekciju  $S_{yz}$  na  $yz$  ravninu:  $S_{yz} \dots y^2 + z^2 \leq 4$ .



Slika 10: Presjek stošca i ravnine

Element površine plohe je

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dydz \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{2z}{2\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^2} dydz = \sqrt{2} dydz. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \iint_S y^2 dS = \iint_{S_{yz}} y^2 \sqrt{2} dydz.$$

Kako je  $S_{yz} \dots y^2 + z^2 \leq 4$  prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} y &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 2 \\ z &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

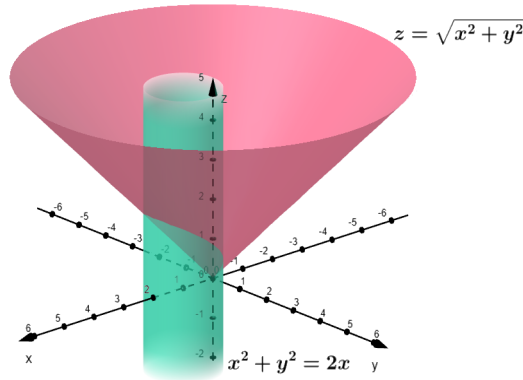
pa je

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r \cos \varphi)^2 r dr = 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

4. Izračunajte

$$\iint_S (xy + z^2) dS$$

ako je  $S$  dio stošca  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  isječen cilindrom  $x^2 + y^2 = 2x$ .



Slika 11: Dio stošca isječen cilindrom

Ploha je zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Računamo:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Možemo naći projekciju  $S_{xy}$  plohe  $S$  na  $xy$  ravninu tako da jednadžbu cilindra zapišemo u standardnom obliku (dopunimo izraze do kvadrata binoma):

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$

pa je projekcija dana sa  $S_{xy} \dots (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ . Sada je

$$I = \iint_S (xy + z^2) dS = \iint_{S_{xy}} \left( xy + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \right) \sqrt{2} dx dy.$$

Kako je  $S_{xy}$  pomaknuti krug prelazimo na pomaknute polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x - 1 &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

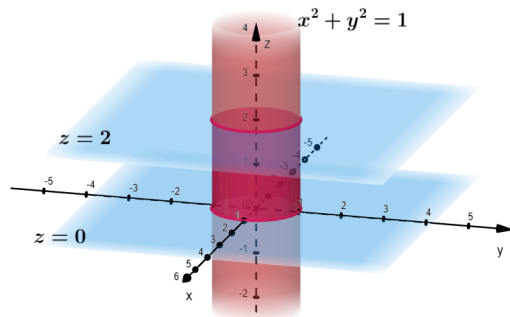
pa je

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ((1+r\cos\varphi)r\sin\varphi + (1+r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) r dr \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2\sin\varphi + r^3\cos\varphi\sin\varphi + r + 2r^2\cos\varphi + r^3) dr \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

5. Izračunajte

$$\iint_S (x + y + z) dS$$

ako je  $S$  dio plohe  $x^2 + y^2 = 1$  koji se nalazi između ravnina  $z = 0$  i  $z = 2$ .



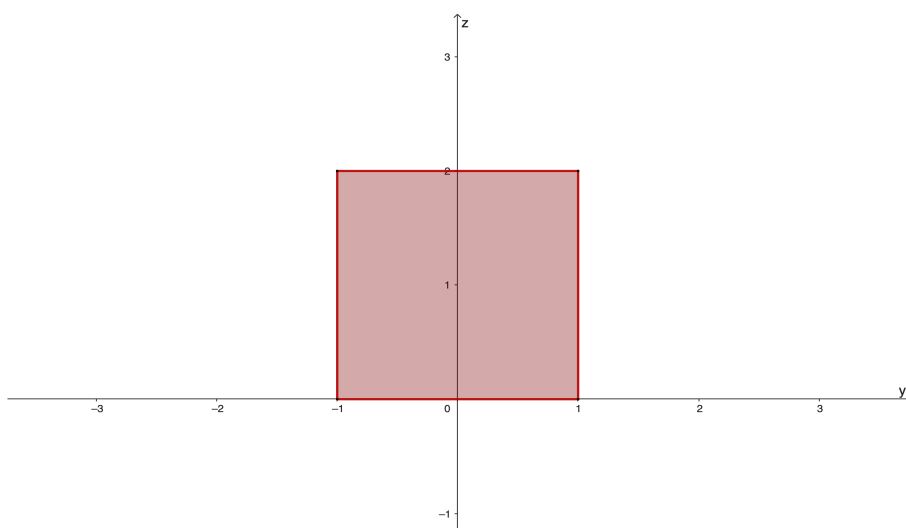
Slika 12: Dio cilindra između dvije ravnine

Projekcija plohe  $S$  na  $xy$  ravninu je krivulja. Stoga moramo odabrati projekciju na neku drugu koordinatnu ravninu.

Projekcija  $S_{yz}$  plohe  $S$  na  $yz$  ravninu je pravokutnik s vrhovima  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(-1, 2)$  i  $(-1, 0)$ . Uočimo, to je ujedno i projekcija plohe  $S_1$  dobivene od plohe  $S$  za  $x \geq 0$  i projekcija plohe  $S_2$  dobivene od plohe  $S$  za  $x \leq 0$ . Stoga ćemo integral  $I$  računati kao zbroj plošnih integrala po dvije plohe, tj.  $I = I_1 + I_2$ :

$$1) S_1 \dots x = +\sqrt{1 - y^2}$$



Slika 13: Projekcija plohe  $S$  na  $yz$  ravninu

Iz implicitne jednadžbe plohe  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  računamo element površine plohe kao

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{|2x|} dydz \\ &= \{x \geq 0\} = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}{2x} dydz = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dydz. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} (x + y + z) dS = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 \left(\sqrt{1 - y^2} + y + z\right) \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \left(z\sqrt{1 - y^2} + yz + \frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 \frac{2\sqrt{1 - y^2} + 2y + 2}{\sqrt{1 - y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(2 + \frac{2y}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}}\right) dy \\ &= \left(2y - \frac{2}{3}(1 - y^2)^{\frac{3}{2}} + 2 \arcsin y\right) \Big|_{-1}^1 = 4 + 2\pi. \end{aligned}$$

2)  $S_2 \dots x = -\sqrt{1 - y^2}$

Iz implicitne jednadžbe plohe  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  računamo element površine

plohe kao

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{|2x|} dydz \\ &= \{x \leq 0\} = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}{-2x} dydz = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}} dydz. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_2} (x + y + z) dS = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 \left(-\sqrt{1-y^2} + y + z\right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(-z\sqrt{1-y^2} + yz + \frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 \frac{-2\sqrt{1-y^2} + 2y + 2}{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(-2 + \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy \\ &= \left(-2y - \frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} + 2 \arcsin y\right) \Big|_{-1}^1 = -4 + 2\pi. \end{aligned}$$

Konačno,

$$I = I_1 + I_2 = 4 + 2\pi - 4 + 2\pi = 4\pi.$$

6. Izračunajte površinu dijela plohe  $z = 5x^2 + 5y^2$  za koji je  $0 \leq z \leq 5$ .

$$P(S) = \iint_S dS.$$

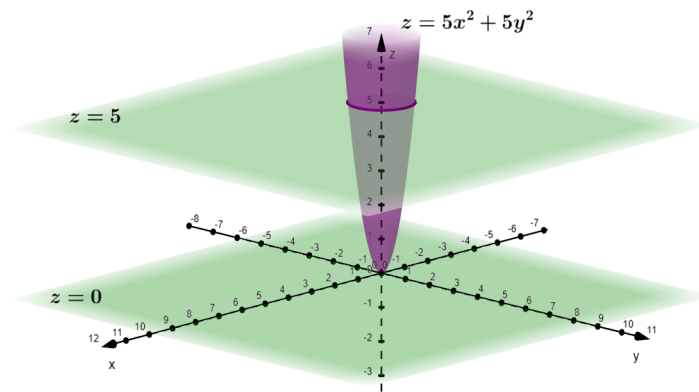
Ploha je zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = 5x^2 + 5y^2$ , a projekcija  $S_{xy}$  plohe  $S$  na  $xy$  ravninu je dana sa  $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 1$ .

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 100x^2 + 100y^2} dx dy.$$

Nakon uvođenja centralnih polarnih koordinata dobivamo:

$$P(S) = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1 + 100x^2 + 100y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 100r^2} r dr = \frac{\pi}{150} \left(101^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

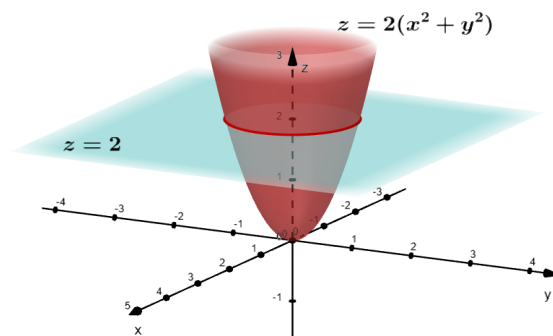


Slika 14: Dio paraboloida između dvije ravnine

7. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z^2\vec{k}$$

kroz vanjsku stranu ruba tijela koje je omeđeno plohami  $z = 2(x^2 + y^2)$  i  $z = 2$ .



Slika 15: Tijelo omeđeno paraboloidom i ravninom

Rub tijela je sastavljen od dvije plohe: dijela paraboloida i dijela ravnine. Zato ćemo traženi integral izračunati kao zbroj dva integrala:  $I_1$  za tok vektorskog polja kroz dio vanjske strane paraboloida i  $I_2$  za tok vektorskog polja kroz dio gornje strane ravnine  $z = 2$ .

- 1) Ploha (paraboloid) je zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = 2x^2 + 2y^2$ . Presijecanjem paraboloida s ravninom  $z = 2$  dobivamo projekciju  $S_{xy}$  plohe  $S$  na  $xy$  ravninu:  $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 1$ .

Normalu na plohu računamo prema izrazu

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

stoga je

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-4x \vec{i} - 4y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}.$$

S obzirom na to da normala s osi z zatvara tupi kut biramo predznak minus.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} dx dy.$$

Računamo integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS \\ &= - \iint_S \frac{-4x \vec{i} - 4y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}} (x \vec{i} + y \vec{j} + 2z^2 \vec{k}) dS \\ &= - \iint_{S_{xy}} \left( \frac{-4x^2 - 4y^2 + 2z^2}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}} \right) \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} dx dy \\ &= \iint_{S_{xy}} (4(x^2 + y^2) - 2(2x^2 + 2y^2)^2) dx dy. \end{aligned}$$

Kako je  $S_{xy}$  krug prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (4r^2 - 8r^4) r dr = 2\pi \left( r^4 - \frac{8}{6} r^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{-2\pi}{3}.$$

- 2) Ravnina je zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = 2$  i orijentirana je normalom  $\vec{n}_0 = \vec{k}$ . Projekcija na  $xy$  ravninu je ista kao u prvom slučaju, a element površine plohe je  $dS = dx dy$ . Ovdje je skalarni produkt  $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 2z^2$  pa je integral  $I_2$  jednak

$$I_2 = \iint_S 2z^2 dS = \iint_{S_{xy}} 8 dx dy.$$

Budući da  $\iint_{S_{xy}} dx dy$  računa površinu ravninskog lika jednostavno vidimo da je

$$I_2 = 8 \cdot P_{kruga} = 8\pi.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{-2\pi}{3} + 8\pi = \frac{22}{3}\pi.$$

Napomena: zadatak se može riješiti i primjenom Teorema o divergenciji (formule Gauss-Ostrogradskog).

8. Izračunajte

$$\iint_S (x - z) \, dydz + (2y + z) \, dx dz$$

ako je  $S$  gornji dio ravnine  $x - 2y - z + 2 = 0$  isječen koordinatnim ravninama.

Ploha je zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = x - 2y + 2$ . Projekcija na  $xy$  ravninu je trokut omeđen koordinatnim osima i pravcem  $x - 2y + 2 = 0$ .

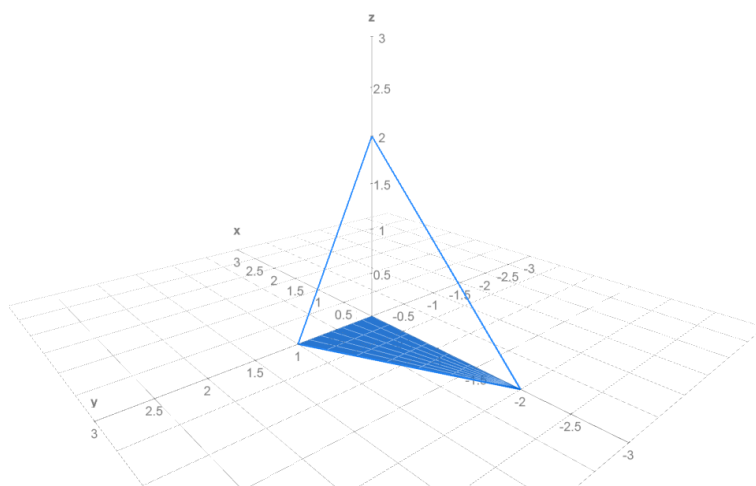
Normala na plohu glasi

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}.$$

S obzirom na to da normala s osi  $z$  zatvara šiljasti kut biramo predznak plus.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + 4 + 1} \, dx dy = \sqrt{6} \, dx dy.$$



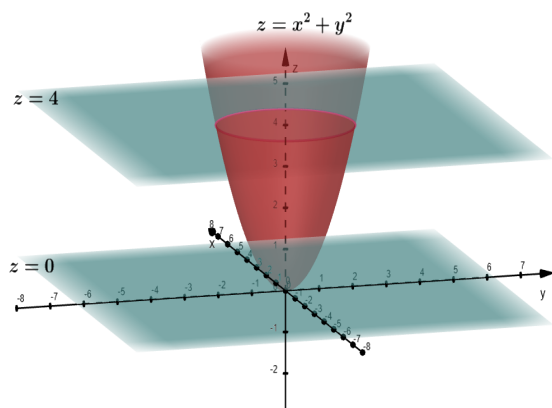
Slika 16: Dio ravnine isječen koordinatnim ravninama

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, dS = \iint_S \left( (x-z)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} \right) \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}} \, dS \\
 &= \iint_S (z-x+4y+2z) \frac{1}{\sqrt{6}} \, dS = \iint_{S_{xy}} (3(x-2y+2) - x + 4y) \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{6} \, dx \, dy \\
 &= \iint_{S_{xy}} (2x - 2y + 6) \, dx \, dy = \int_{-2}^0 dx \int_0^{1+\frac{x}{2}} (2x - 2y + 6) \, dy \\
 &= \int_{-2}^0 \left( 2x \left( 1 + \frac{x}{2} \right) - \left( 1 + \frac{x}{2} \right)^2 + 6 \left( 1 + \frac{x}{2} \right) \right) dx = 4.
 \end{aligned}$$

9. Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{z} \, dy \, dz$$

ako je  $S$  vanjska strana dijela plohe  $z = x^2 + y^2$  za koji je  $0 \leq z \leq 4$ .



Slika 17: Dio paraboloida između dvije ravnine

Zadatak ćemo riješiti na dva načina: po projekcijama i kao tok vektorskog polja.

### 1. način

$$I = \iint_{\vec{S}} \sqrt{z} \, dy \, dz = \pm \iint_{S_{yz}} \sqrt{z} \, dy \, dz.$$

Prvo odredimo projekciju plohe  $S$  na  $yz$ -ravninu, zatim  $x$  izrazimo pomoću  $y$  i  $z$ .

$x = +\sqrt{z - y^2}$  i  $x = -\sqrt{z - y^2}$  su dvije plohe koje čine  $S$  i koje će imati istu projekciju na  $yz$  ravninu. Stoga ćemo integral riješiti kao  $I = I_1 + I_2$ , gdje ćemo integral  $I_1$  izračunati u odnosu na plohu  $x = +\sqrt{z - y^2}$ , a integral  $I_2$  u odnosu na plohu  $x = -\sqrt{z - y^2}$ .

Projekcija na  $yz$ -ravninu za obe plohe je dana sa:  $S_{yz} \dots \begin{cases} -2 \leq y \leq 2, \\ y^2 \leq z \leq 4. \end{cases}$

Za računanje  $I_1$  biramo predznak  $+$  jer normala plohe  $x = +\sqrt{z - y^2}$  zatvara šiljasti kut sa vektorom  $\vec{i}$ .

$$I_1 = + \iint_{S_{yz}} \sqrt{z} \, dydz = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 \sqrt{z} \, dz = \frac{2}{3} \int_{-2}^2 (8 - y^3) \, dy = \frac{64}{3}.$$

Za računanje  $I_2$  biramo predznak  $-$  jer normala plohe  $x = -\sqrt{z - y^2}$  zatvara tupi kut sa vektorom  $\vec{i}$ .

$$I_2 = - \iint_{S_{yz}} \sqrt{z} \, dydz = - \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 \sqrt{z} \, dz = -\frac{2}{3} \int_{-2}^2 (8 - y^3) \, dy = -\frac{64}{3}.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{64}{3} - \frac{64}{3} = 0.$$

## 2. način

Integral  $I$  možemo izračunati kao tok vektorskog polja  $\vec{w} = \sqrt{z}\vec{i}$ .

$$I = \iint_{\vec{S}} \sqrt{z} \, dydz = \iint_{\vec{S}} \vec{w} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{w} \cdot \vec{n}_0 \, dS.$$

Ploha je zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = x^2 + y^2$  i za normalu vrijedi  $\vec{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$ .

Izabrat ćemo predznak  $-$  jer  $\vec{n}_0$  zatvara tupi kut sa vektorom  $\vec{k}$ .

$$\vec{n}_0 = -\frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4z}}$$

$$I = \iint_S \sqrt{z}\vec{i} \cdot \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4z}} \, dS = \iint_S \frac{2x\sqrt{z}}{\sqrt{1 + 4z}} \, dS$$

Dakle, preostaje riješiti plošni integral prve vrste.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Računamo integral

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \frac{2x\sqrt{z}}{\sqrt{1+4z}} dS = \iint_{S_{xy}} \frac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{S_{xy}} 2x\sqrt{x^2+y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Projekcija plohe  $S$  na  $xy$  ravninu je krug  $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 4$ . Zato ćemo integral izračunati prelaskom na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 2 \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 2r \cos \varphi \sqrt{r^2} r dr = 2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 0.$$

10. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$$

kroz vanjski dio sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  odsječene ravninom  $z = 1$ , a za  $z \geq 1$ .

Vrijedi:

$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS.$$

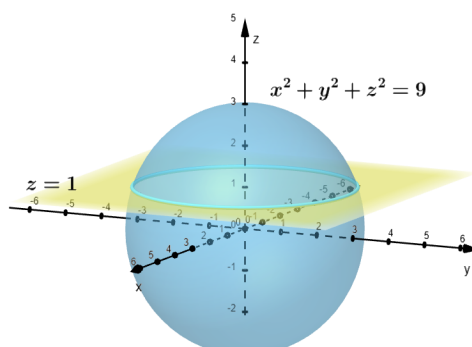
Ploha je zadana implicitno s  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  pa  $\vec{n}_0$  računamo kao

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}.$$

Kut kojeg zatvaraju  $\vec{n}_0$  i  $\vec{k}$  za  $z \geq 1$  je šiljasti. Stoga biramo predznak  $+$  i imamo

$$\vec{n}_0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3}.$$





Slika 18: Sfera presječena ravninom

Računamo integral:

$$I = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, dS = \iint_S (xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}) \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3} \, dS = \iint_S \frac{1}{3} (x^2z + y^2z + z^3) \, dS.$$

Preostaje riješiti plošni integral prve vrste. Odredimo projekciju plohe  $S$  na  $xy$  ravninu:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

---


$$x^2 + y^2 = 8.$$

Nadalje, ploha je zadana implicitno pa  $dS$  računamo kao

$$dS = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}}{|2z|} \, dx \, dy.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} z^2 &= 9 - x^2 - y^2 \\ z &= \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \end{aligned}$$

a biramo  $z = +\sqrt{9 - x^2 - y^2}$  jer je ploha  $S$  dio gornje polusfere. Iz čega slijedi

$$dS = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy,$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \frac{1}{3} (x^2 z + y^2 z + z^3) \, dS \\
 &= \iint_S \frac{1}{3} \left( x^2 \sqrt{9 - x^2 - y^2} + y^2 \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \left( \sqrt{9 - x^2 - y^2} \right)^3 \right) \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \, dx dy.
 \end{aligned}$$

Kako je projekcija plohe  $S$  na  $xy$  ravninu krug  $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 8$  koristit ćemo polarne koordinate za računanje integrala  $I$ :

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 2\sqrt{2} \\
 y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
 J &= r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \left( (r^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{9 - r^2} + (r^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{9 - r^2} + \left( \sqrt{9 - r^2} \right)^3 \right) \frac{r}{\sqrt{9 - r^2}} \, dr \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (r^3 + r(9 - r^2)) \, dr = 72\pi.
 \end{aligned}$$

11. Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog nađite tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$$

po plohi koja omeđuje područje  $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 1\}$ .

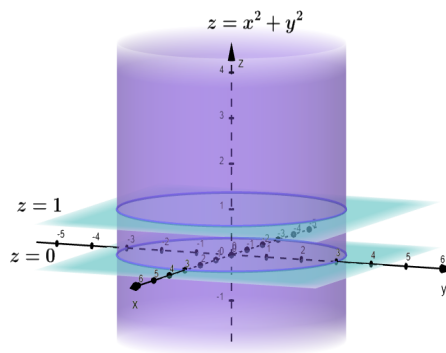
Vrijedi:

$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 4y + 6z.$$

Ploha  $S$  je dio kružnog cilindra, stoga ćemo za računanje integrala koristiti cilindrične koordinate:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 3 \\
 y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
 z &= z & 0 \leq z \leq 1 \\
 J &= r
 \end{aligned}$$



Slika 19: Dio cilindra između dvije ravnine

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr \int_0^1 (1 + 4r \sin \varphi + 6z) r \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r + 4r^2 \sin \varphi + 3r) \, dr = \int_0^{2\pi} (18 + 36 \sin \varphi) \, d\varphi = 36\pi.
 \end{aligned}$$

12. Izračunajte

$$\iint_S x \, dydz + y \, dx dz + z \, dx dy$$

ako je  $S$  vanjska strana ruba tijela  $V$  zadanog nejednakostima  $z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  i  $z \geq x^2 + y^2$ .

Vrijedi

$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV,$$

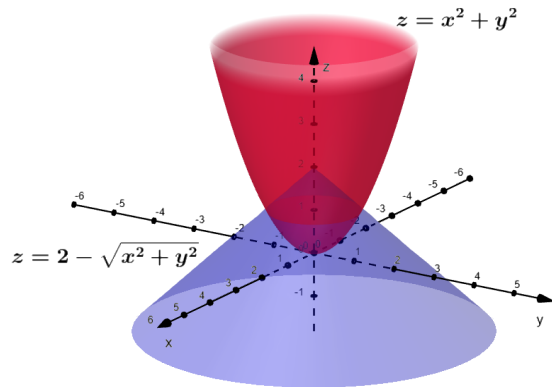
pri čemu je

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ i } \operatorname{div} \vec{a} = 3.$$

Sada je

$$I = \iiint_V 3 \, dV = 3 \iiint_V dV.$$

Ovaj trostruki integral računa tri puta volumen tijela  $V$  i za njegovo računanje koristimo cilindrične koordinate.



Slika 20: Tijelo sastavljeno od paraboloida i stošca

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\
 y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
 z &= z & x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ tj.} \\
 J &= r & r^2 \leq z \leq 2 - r
 \end{aligned}$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r} r dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(2-r-r^2) dr = \frac{5}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$

13. Uz pomoć Stokesove formule izračunajte

$$I = \int_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

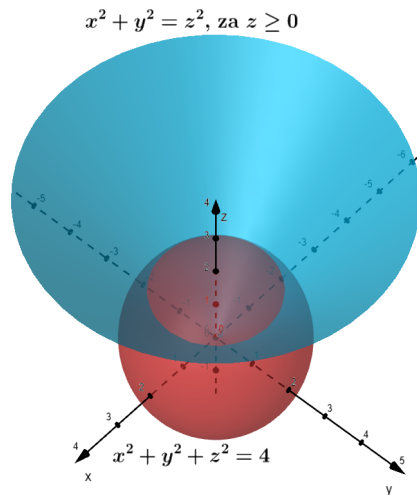
vektorskog polja  $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$  po zatvorenoj krivulji  $K$  zadanoj kao sjecište ploha  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  i  $x^2 + y^2 = z^2$ , za  $z \geq 0$ .

Krivulju  $K$  dobivamo iz  $2z^2 = 4$ , tj.  $z = \sqrt{2}$  i  $x^2 + y^2 = 2$ .

Stokesova formula glasi:  $\oint_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\vec{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}$ . Dakle, računamo tok vektorskog polja

$\text{rot } \vec{a}$  kroz plohu  $S$ , gdje za plohu  $S$  možemo uzeti dio ravnine  $z = \sqrt{2}$  za koji je  $x^2 + y^2 \leq 2$ . Uočimo, za plohu  $S$  možemo uzeti sferu ili stožac, ali tada bi račun bio nešto složeniji.

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2\vec{k}.$$



Slika 21: Presjek sfere i stošca

Sada je

$$I = \iint_{\vec{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS$$

pri čemu je

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} = \pm \vec{k},$$

jer je ploha  $S$  zadana eksplicitno s  $z = g(x, y) = \sqrt{2}$ .

Kada gledamo s vrha vektora normale (na plohu u nekoj točki) prema krivulji, orijentaciju plohe, odnosno predznak za normalu moramo izabrati tako da kretanje po krivulji bude u pozitivnom smjeru. Stoga biramo predznak  $+$  i tada je

$$I = \iint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS = \iint_S (-2) dS.$$

Nadalje,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = dx dy.$$

Projekcija plohe  $S$  na  $xy$  ravninu je dana s  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

$$I = \iint_{\vec{S}} (-2) dS = -2 \iint_{\vec{S}_{xy}} dx dy.$$

Provedimo još prelazak na polarne koordinate:

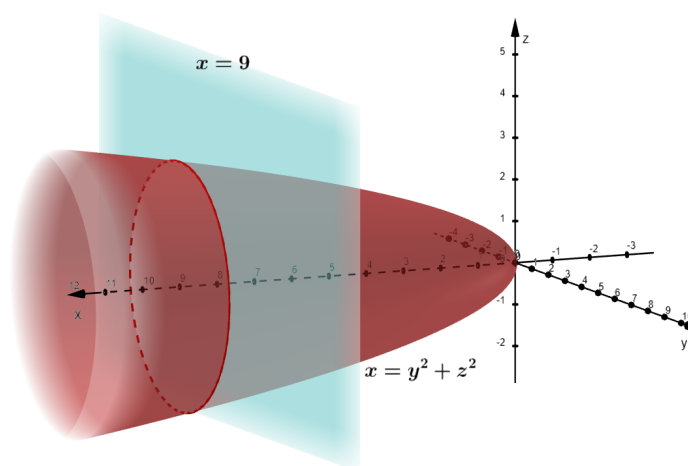
$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\J &= r\end{aligned}$$

$$I = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr = -4\pi.$$

14. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja

$$\vec{a} = zy^2 \vec{i} + xz^2 \vec{j} + yx^2 \vec{k}$$

$$\text{duž krivulje } K \dots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 9 \end{cases}.$$



Slika 22: Presjek paraboloida i ravnine

Koristit ćemo Stokesovu formulu  $\oint_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\vec{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}$ . Dakle, trebamo odrediti tok vektorskog polja  $\text{rot } \vec{a}$  kroz plohu

$$S \dots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ 0 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

kojoj je  $K$  rub.

Računamo

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zy^2 & xz^2 & yx^2 \end{vmatrix} = (x^2 - 2xz) \vec{i} + (y^2 - 2xy) \vec{j} + (z^2 - 2yz) \vec{k}$$

$$I = \iint_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS$$

pri čemu je

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1 + (2y)^2 + (2z)^2}},$$

jer je ploha  $S$  zadana eksplicitno s  $x = g(y, z) = y^2 + z^2$ .

Kada gledamo s vrha vektora normale (na plohu u nekoj točki) prema krivulji, orijentaciju plohe, odnosno predznak za normalu moramo izabrati tako da kretanje po krivulji bude u pozitivnom smjeru. Stoga nam treba unutrašnja orijentacija plohe te biramo predznak +:

$$\vec{n}_0 = + \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = \frac{x^2 - 2xz - 2y^3 + 4xy^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4x}}.$$

Sada je

$$I = \iint_S \frac{x^2 - 2xz - 2y^3 + 4xy^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4x}} dS.$$

Još trebamo izračunati plošni integral 1. vrste. Projekcija plohe  $S$  na  $yz$  ravninu je dana sa  $S_{yz} \dots y^2 + z^2 \leq 9$ . Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dydz = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz$$

čijim uvrštavanjem u gornji integral dobivamo:

$$\iint_{S_{yz}} \frac{y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2y^2z - 2z^3 - 2y^3 + 4y^4 + 4z^2y^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}} \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz$$

$$= \iint_{S_{yz}} (y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2y^2z - 2z^3 - 2y^3 + 4y^4 + 4z^2y^2 - 2z^3 + 4z^2y) dydz.$$

Prijeći ćemo na polarne koordinate:

$$y = r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq 3$$

$$z = r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$J = r$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (5r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi - 2r^3 \cos^3 \varphi - 4r^3 \sin^3 \varphi \\
 &\quad + 6r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) r dr \\
 &= \frac{5 \cdot 3^6}{6} \frac{3\pi}{4} + \frac{3^6}{6} \frac{3\pi}{4} + 3^6 \frac{\pi}{4} = 3^6 \pi = 729\pi.
 \end{aligned}$$

Napomena:

Ako za plohu  $S$  umjesto paraboloida izaberemo dio ravnine  $x = 9$ , onda je račun bitno jednostavniji jer je  $\vec{n}_0 = \vec{i}$  i  $\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = x^2 - 2xz$ . Integral je tada

$$I = \iint_S (x^2 - 2xz) dS = \iint_S (9^2 - 18z) dS.$$

Projekcija je ista kao i u prehodnom pa je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (81 - 18r \sin \varphi) r dr = 729\pi.$$



## 5 FOURIEROV RED

### 5.1 Osnovni pojmovi

Kažemo da je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **periodična funkcija** ako postoji  $T > 0$  takav da za svaki  $x$  iz domene funkcije  $f$  vrijedi  $f(x) = f(x + T)$ . Broj  $T$  nazivamo periodom od  $f$ . Najmanji period (ako postoji) nazivamo osnovnim (ili temeljnim) periodom.

**Trigonometrijski Fourierov red** zadane periodične funkcije  $f$  s periodom  $2\pi$  je red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kojemu su koeficijenti

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Koeficijente  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  nazivamo **Fourierovim koeficijentima** funkcije  $f$ . Pišemo  $f(x) \sim S(x)$ .

**Trigonometrijski Fourierov red** zadane periodične funkcije  $f$  s periodom  $T = b - a$  je

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

kojemu su koeficijenti

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

Kažemo da funkcija  $f$  zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu  $[a, b]$  ako vrijedi:

- 1)  $f$  je po dijelovima neprekidna i njezini su prekidi prve vrste,
- 2)  $f$  je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

**Teorem (konvergencija po točkama)** Neka je  $f$  po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom  $2\pi$  koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergira u svakoj točki  $x \in [-\pi, \pi]$  i za sumu  $S(x)$  reda vrijedi:

- (i)  $S(x) = f(x)$ , ako je  $f$  neprekidna u točki  $x$ ,
- (ii)  $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ , ako je  $x$  točka prekida za  $f$ .

Ako je funkcija  $f$  definirana i parna na simetričnom intervalu  $[-L, L]$ , onda je  $b_n = 0$  za svaki  $n \geq 1$ , tj. njezin Fourierov red sadrži samo kosinus članove i glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Pri tome za  $a_n$  vrijedi

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0.$$

Kažemo da smo funkciju  $f$  razvili u **Fourierov red po kosinus funkcijama**.

Ako je funkcija  $f$  definirana i neparna na simetričnom intervalu  $[-L, L]$ , onda je  $a_n = 0$  za svaki  $n \geq 0$ , tj. njezin Fourierov red sadrži samo sinus članove i glasi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Pri tome za  $b_n$  vrijedi

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Kažemo da smo funkciju  $f$  razvili u **Fourierov red po sinus funkcijama**.

Za Fourierove koeficijente vrijedi **Parsevalova jednakost**

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T} \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

## 5.2 Zadaci

1. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle \frac{-\pi}{2}, 0 \rangle \\ \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

2. Razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama (neparno proširenje) funkciju  $f(x) = x$  na intervalu  $\langle 0, 2 \rangle$ .
3. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama (parno proširenje) funkciju  $f(x) = \sin x$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .
4. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 - |x|$$

na intervalu  $[-1, 1]$  te pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

5. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 \operatorname{sgn}(e^x - 1), \quad x \in [-3, 3],$$

a potom, koristeći taj razvoj izračunajte  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

6. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama funkciju  $f(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 1)$ ,  $x \in [0, 2]$ . Pomoću tog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .
7. Parno proširenje funkcije  $f(x) = 1 - x$  zadane na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  razvijte u Fourierov red. Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ .
8. Funkcija  $f(x) = x + \pi$  definirana je na intervalu  $\langle -\pi, 0 \rangle$ . Razvijte funkciju  $f$  u Fourierov red po sinus funkcijama te izračunajte sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Rješenja:**

1. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle \\ \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Funkcija  $f$  nije ni parna ni neparna. Računamo koeficijente  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ :

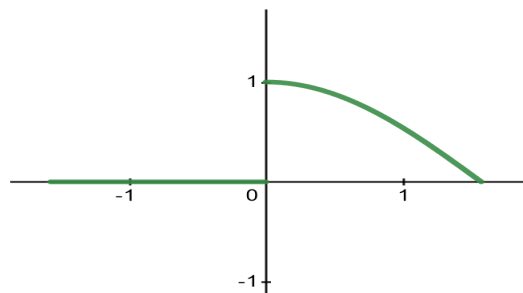
$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx}_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{2}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \cos \frac{2k\pi x}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 \cdot \cos(2kx) dx}_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos(2kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos(x - 2kx) + \cos(x + 2kx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k - 1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k + 1)x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k - 1} \sin(2k - 1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + 1} \sin(2k + 1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k - 1} \sin(k\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + 1} \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2k - 1} \left( \sin k\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos k\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2k + 1} \left( \sin k\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos k\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2k - 1} (-\cos k\pi) + \frac{1}{2k + 1} (\cos k\pi) \right] \\ &= \frac{\cos k\pi}{\pi} \left( -\frac{1}{2k - 1} + \frac{1}{2k + 1} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{-2k - 1 + 2k - 1}{4k^2 - 1} \\ &= \frac{-2(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)} \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2 - 1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 \cdot \sin(2kx) dx}_{0} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin(2kx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(2kx - x) + \sin(2kx + x)) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k-1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{2k-1} \cos(2k-1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1} \cos(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{2k-1} \left[ \cos(2k-1) \frac{\pi}{2} - 1 \right] - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1} \left[ \cos(2k+1) \frac{\pi}{2} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2k+1+2k-1}{4k^2-1} \\
&= \frac{4k}{\pi(4k^2-1)}.
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx) + \frac{4k}{\pi(4k^2-1)} \sin(2kx) \right).$$

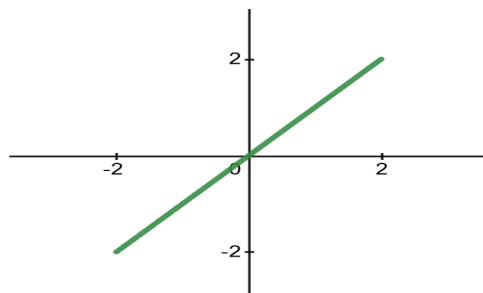


Slika 23: Graf funkcije (zadatak 1.)

2. Razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama (neparno proširenje) funkciju  $f(x) = x$  na intervalu  $\langle 0, 2 \rangle$ .

Potrebno je definirati proširenje na intervalu  $\langle -2, 0 \rangle$ , a kako želimo dobiti neparnu funkciju koristimo  $f(x) = -f(-x)$ . Što je u ovom slučaju  $f(x) = -f(-x) = -(-x) = x$  pa je proširenje funkcije  $f$  dano s

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ x, & x \in \langle -2, 0 \rangle \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



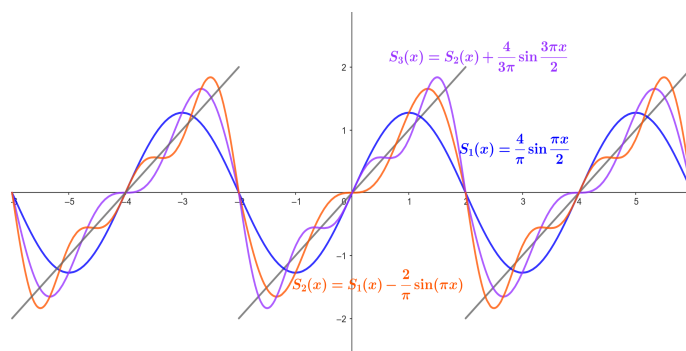
Slika 24: Graf neparnog proširenja funkcije (zadatak 2.)

Proširenje je neparno iz čega slijedi  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}$ , a koeficijente  $b_k$  računamo:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2+2} \int_{-2}^2 \underbrace{f(x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{2+2}}_{\text{parna}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^2 x \cdot \sin \frac{k\pi x}{2} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin \frac{k\pi x}{2} dx \\ du = dx \quad v = \frac{-2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right\} \\ &= \frac{-2x}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx \\ &= \frac{-4}{k\pi} \cos k\pi + \frac{2 \cdot 0}{k\pi} \cos 0 + \frac{4}{k^2 \pi^2} \underbrace{\sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2}_0 \\ &= \frac{-4}{k\pi} \cdot (-1)^k \\ &= \frac{4}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi x}{2}.$$

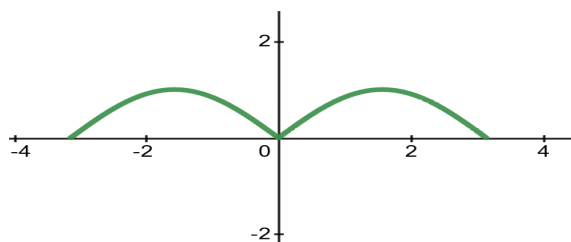


Slika 25: Prve tri aproksimacije funkcije preko njezinog Fourierovog reda (zadatak 2.)

3. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama (parno proširenje) funkciju  $f(x) = \sin x$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

Potrebno je definirati proširenje na intervalu  $\langle -\pi, 0 \rangle$ , a kako želimo dobiti parnu funkciju koristimo  $f(x) = f(-x)$ . Što je u ovom slučaju  $f(x) = f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$  pa je proširenje funkcije  $f$  dano s

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ -\sin x, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Slika 26: Graf parnog proširenja funkcije (zadatak 3.)

Proširenje je parno iz čega slijedi  $b_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}$ , a koeficijente  $a_0$  i  $a_k$  računamo:

$$a_0 = \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{-2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \cos \frac{2k\pi x}{\pi + \pi}}_{\text{parna}} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos kx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(x + kx) + \sin(x - kx)) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(k+1)x dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(k-1)x dx \\
&\stackrel{k \neq 1}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{k+1} \cos(k+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} \cos(k-1)x \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{k+1} [\cos(k+1)\pi - 1] + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} [\cos(k-1)\pi - 1] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-1}{k+1} (\cos k\pi \cdot \cos \pi - \sin k\pi \cdot \sin \pi - 1) + \frac{1}{k-1} (\cos k\pi \cdot \cos \pi + \sin k\pi \cdot \sin \pi - 1) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-1}{k+1} (-\cos k\pi - 1) + \frac{1}{k-1} (-\cos k\pi - 1) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k+1} (\cos k\pi + 1) - \frac{1}{k-1} (\cos k\pi + 1) \right] \\
&= \frac{\cos k\pi + 1}{\pi} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) \\
&= \frac{(-1)^k + 1}{\pi} \cdot \frac{k-1-k-1}{k^2-1} \\
&= \frac{-2[(-1)^k + 1]}{\pi(k^2-1)} \\
&= \begin{cases} \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pri računanju koeficijenata  $a_k$  javlja se razlomak nazivnika  $k-1$ . Stoga su gornjim računom obuhvaćeni koeficijenti za koje je  $k \neq 1$  pa je koeficijent  $a_1$  potrebno izračunati zasebno:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot x}{\pi + \pi}}_{\text{parna}} dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{2\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0.
\end{aligned}$$



Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}}_{a_{2n}} \cos 2nx.$$

4. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 - |x|$$

na intervalu  $[-1, 1]$  te pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

Funkcija  $f$  je parna iz čega slijedi  $b_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}$ , a koeficijente  $a_0$  i  $a_k$  računamo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} dx = 1 \cdot 2 \int_0^1 (2-x) dx = 3, \\ a_k &= \frac{2}{2} \cdot 2 \int_0^1 (2-x) \cos \frac{(2k\pi x)}{2} dx \\ &= 2 \int_0^1 (2-x) \cos k\pi x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2-x \quad dv = \cos k\pi x dx \\ du = -dx \quad v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right\} \\ &= 2 \frac{2-x}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \sin(k\pi x) dx \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} \cdot [(-1)^k - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x.$$

Primijetimo, u gornjem izrazu smo pomakli indeks sume. Nadalje, kako bismo izračunali traženu sumu zadanog reda moramo u dobiveni Fourierov razvoj funkcije  $f$  uvrstiti točku iz intervala  $[-1, 1]$  takvu da red dobiven iz razvoja i zadani red budu jednaki do na konstantu.

Također je potrebno odrediti i funkcijsku vrijednost od  $f$  u toj točki. Odabirom  $x = 0$  dobivamo  $f(0) = 2$  i

$$f(0) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

odnosno

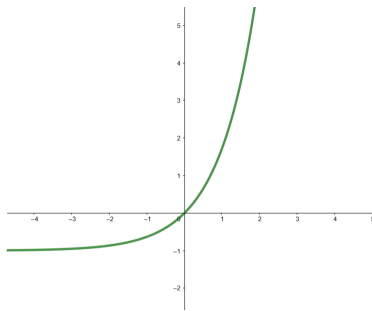
$$2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 \operatorname{sgn}(e^x - 1), \quad x \in [-3, 3],$$

a potom, koristeći taj razvoj izračunajte  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .



(a) Graf funkcije  $g(x) = e^x - 1$



(b) Graf funkcije  $h(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)$

Slika 27: Grafovi pomoćnih funkcija (zadatak 5.)

Funkcija *predznak* ili *signum* definirana je na sljedeći način:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Funkcija  $f$  je neparna iz čega slijedi da je  $a_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}_0$ , a koeficijente  $b_k$

računamo:

$$\begin{aligned}
 b_k &= 2 \cdot \frac{2}{6} \int_0^3 2 \cdot \sin \frac{2k\pi x}{6} dx \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{3} dx \\
 &= \frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 \\
 &= \frac{-4}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \\
 &= \frac{-4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \\
 &= \begin{cases} \frac{8}{\pi(2n-1)}, & k = 2n - 1, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{3} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{3} x.$$

Specijalno, za  $x = \frac{3}{2}$  dobivamo

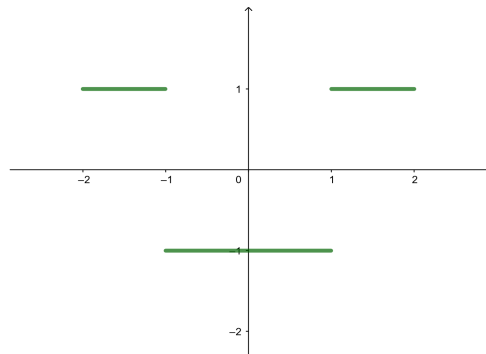
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

odnosno

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

6. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama funkciju  $f(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 1)$ ,  $x \in [0, 2]$ .

Pomoću tog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .



Slika 28: Graf parnog proširenja funkcije (zadatak 6.)

Za neparno proširenje funkcije  $f$  je  $b_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}$ , pa računamo:

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} dx = 2 \cdot \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-1) dx + \int_1^2 1 dx = 0,$$

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \cdot \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) \cos \frac{2k\pi x}{4} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\cos \frac{k\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx \\ &= \frac{-2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_1^2 = \frac{-4}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{-4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{-4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Iz Parsevalove jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} \int_{-2}^2 (f(x))^2 dx &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \\ 2 &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

7. Parno proširenje funkcije  $f(x) = 1 - x$  zadane na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  razvijte u Fourierov red.

Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ .

Za parno proširenje funkcije  $f$  je  $b_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}$ , pa računamo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) dx = 1, \\ a_k &= \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{2k\pi x}{1 - (-1)} dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(k\pi x) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = 1 - x \quad dv = \cos(k\pi x) dx \\ du = -dx \quad v = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) \end{array} \right\} \\ &= 2 \left[ \frac{1-x}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{k\pi} \sin(k\pi x) dx \right] \\ &= 2 \left[ \frac{1-1}{k\pi} \sin(k\pi) - \frac{1-0}{k\pi} \sin 0 + \frac{1}{k\pi} \frac{-1}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} (\cos(k\pi) - \cos 0) \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) \cos(k\pi x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos((2n-1)\pi x).$$

Kako bi izračunali sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$  primijenit ćemo Parsevalovu jednakost

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx &= \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \right)^2 \\ 2 \int_0^1 (1-x)^2 dx &= \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \\ \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}. \end{aligned}$$

8. Funkcija  $f(x) = x + \pi$  definirana je na intervalu  $(-\pi, 0)$ . Razvijte funkciju  $f$  u Fourierov red po sinus funkcijama te izračunajte sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Za neparno proširenje funkcije  $f$  je  $a_k = 0$ , za svaki  $k \in \mathbb{N}_0$ , pa računamo:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\pi - (-\pi)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \\ &= \frac{1}{\pi} 2 \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \sin(kx) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x + \pi \quad dv = \sin(kx) dx \\ du = dx \quad v = \frac{-1}{k} \cos(kx) \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-(x + \pi)}{k} \cos(kx) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{-1}{k} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\pi}{k} \cos 0 - 0 + \frac{1}{k} \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= \frac{-2}{k}. \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin(kx).$$

Kako bi izračunali sumu reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  koristit ćemo Parsevalovu jednakost

$$\frac{2}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{k}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi} 2 \int_{-\pi}^0 (x + \pi)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 6 FOURIEROV INTEGRAL

### 6.1 Osnovni pojmovi

**Teorem** Ako je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, onda postoji njezin Fourierov integral i vrijedi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Neka funkcija  $f$  zadovoljava uvjete prethodnog Teorema i neka je  $\tilde{f}$  funkcija definirana sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Tada za svaki  $x$  vrijedi

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda.$$

Ovaj integral nazivamo **Fourierovim integralom** funkcije  $f$ .

Funkcije

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \quad \text{i} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi$$

nazivamo **kosinusnim** i **sinusnim spektrom**, redom, funkcije  $f$ .

Parna funkcija nema sinusnog spektra, tj.  $B(\lambda) = 0$  i

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi.$$

Neparna funkcija nema kosinusnog spektra, tj.  $A(\lambda) = 0$  i

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad B(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$



Funkciju  $\hat{f}$  definiranu sa

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi$$

nazivamo **Fourierovim transformatom** funkcije  $f$ , a obrnuta veza je dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) d\lambda.$$

Preslikavanje koje funkciji  $f$  pridružuje funkciju  $\hat{f}$  nazivamo **Fourierovom transformacijom**, a inverzno preslikavanje **inverznom Fourierovom transformacijom**.

## 6.2 Zadaci

1. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ 0, & x \notin \langle -2, 2 \rangle. \end{cases}$$

2. Prikažite Fourierovim integralom neparno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0, & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin^2 2t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{t} - \frac{\sin 4t}{2t} \right) dt.$$

3. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{9} - x^2 \right), & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left( -\frac{\sin t}{t} + \frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} \right) dt.$$

4. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t}{1 - 4t^2} dt.$$

5. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

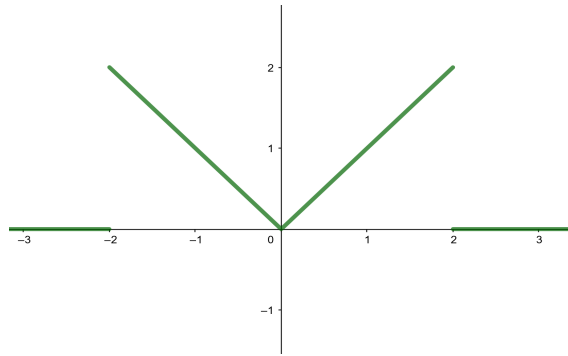
te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) dt.$$

**Rješenja:**

1. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ 0, & x \notin \langle -2, 2 \rangle. \end{cases}$$



Slika 29: Graf funkcije (zadatak 1.)

Funkcija  $f$  je parna iz čega slijedi da je  $B(\omega) = 0$ . Potrebno je odrediti kosinusni spektar  $A(\omega)$ :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 x \cdot \cos \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x \, dx}_0 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos \omega x \, dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{\omega} \sin \omega x \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{x}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^2 - \frac{1}{\omega} \int_0^2 \sin \omega x \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x \Big|_0^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega - 1}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije  $f$  glasi:

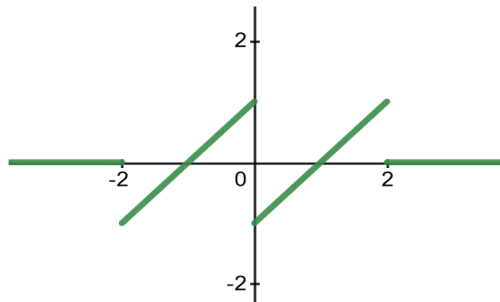
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega - 1}{\omega^2} \cos \omega x \, d\omega.$$

2. Prikažite Fourierovim integralom neparno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0, & x \in [2, \infty), \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin^2 2t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{t} - \frac{\sin 4t}{2t} \right) dt.$$



Slika 30: Graf neparnog proširenja funkcije (zadatak 2.)

Kako bi dobili neparno proširenje funkcije  $f$  koristimo  $f(x) = -f(-x)$ . U ovom slučaju je  $f(x) = -f(-x) = -(-x - 1) = x + 1$  pa je proširenje funkcije  $f$  dano s

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ x + 1, & x \in \langle -2, 0 \rangle \\ 0, & x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup [2, \infty). \end{cases}$$

Proširenje je neparno iz čega slijedi da je  $A(\omega) = 0$ , a sinusni spektar  $B(\omega)$  računamo:

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 (x - 1) \cdot \sin \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \sin \omega x \, dx}_0 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x - 1 \quad dv = \sin \omega x \, dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x-1}{\omega} \cos \omega x \Big|_0^2 + \frac{1}{\omega} \int_0^2 \cos \omega x \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{\omega} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega} \cos 0 + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega x \Big|_0^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{\omega} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \sin 2\omega \right). \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( -\frac{\cos 2\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} \right) \sin \omega x \, d\omega.$$

Sada treba odrediti integral  $I$ . Uočimo da za  $x = 2$  dobivamo traženi integral

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( -\frac{\cos 2\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} \right) \sin 2\omega \, d\omega \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( -\frac{\cos 2t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{\sin 2t}{t^2} \right) \sin 2t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( -\frac{\cos 2t \sin 2t}{t} - \frac{\sin 2t}{t} + \frac{\sin^2 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( -\frac{\sin 4t}{2t} - \frac{\sin 2t}{t} + \frac{\sin^2 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} I \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je  $I = \frac{\pi}{2} \cdot f(2)$ .

Konačno, odredimo  $f(2)$ . Funkcija  $f$  ima prekid u točki  $x = 2$ ,  $f(2)$  računamo na sljedeći način:

$$f(2) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

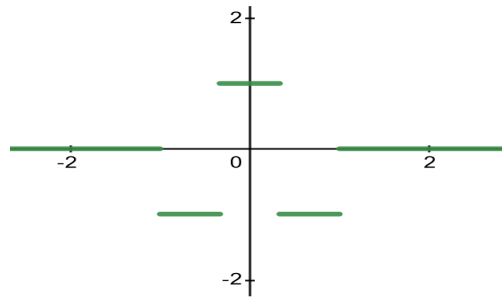
Sada je  $I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$ .

3. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{9} - x^2\right), & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left( -\frac{\sin t}{t} + \frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} \right) dt.$$



Slika 31: Graf funkcije (zadatak 3.)

$$\text{Kako je } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

to je na segmentu  $[-1, 1]$

$$\operatorname{sgn} \left( \frac{1}{9} - x^2 \right) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle, \text{ jer tada je } \frac{1}{9} - x^2 > 0 \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1], \text{ jer tada je } \frac{1}{9} - x^2 < 0 \\ 0, & x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sada zadanu funkciju  $f$  možemo zapisati u sljedećem obliku

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija  $f$  je parna iz čega slijedi da je  $B(\omega) = 0$ , a  $A(\omega)$  računamo:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \cos \omega x \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{3}}^1 \cos \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x \, dx}_0 \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_{\frac{1}{3}}^1 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\omega} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right) \cos \omega x \, d\omega.$$

Preostaje odrediti integral  $I$ . Specijalno, za  $x = 0$  dobivamo traženi integral

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right) d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} - \frac{\sin t}{t} \right) dt = \frac{2}{\pi} I,$$

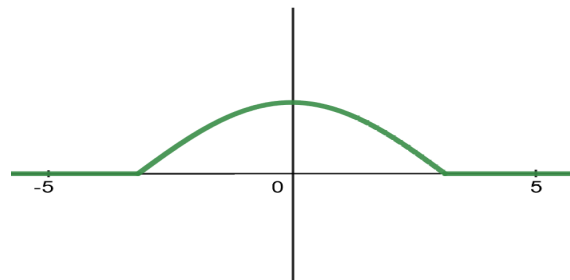
odnosno  $I = \frac{\pi}{2} \cdot f(0)$ . Kako je  $0 \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$  i  $f(0) = 1$  konačno je  $I = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$ .

4. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t}{1 - 4t^2} dt.$$



Slika 32: Graf funkcije (zadatak 4.)

Funkcija  $f$  je parna iz čega slijedi da je  $B(\omega) = 0$ , a  $A(\omega)$  računamo:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x \, dx}_0 \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \cos \left( \omega + \frac{1}{2} \right) x + \cos \left( \omega - \frac{1}{2} \right) x \right] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\omega + \frac{1}{2}} \sin \left( \omega + \frac{1}{2} \right) x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\omega - \frac{1}{2}} \sin \left( \omega - \frac{1}{2} \right) x \Big|_0^{\pi} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\omega + \frac{1}{2}} \sin \left( \omega \pi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\omega - \frac{1}{2}} \sin \left( \omega \pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos \omega \pi}{\omega + \frac{1}{2}} - \frac{\cos \omega \pi}{\omega - \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega \cos \omega \pi - \frac{1}{2} \cos \omega \pi - \omega \cos \omega \pi - \frac{1}{2} \cos \omega \pi}{\omega^2 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos \omega \pi}{\frac{1}{4} - \omega^2} \\
 &= \frac{8 \cos \omega \pi}{\pi (1 - 4\omega^2)}.
 \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{8 \cos \pi \omega}{\pi (1 - 4\omega^2)} \cos \omega x \, d\omega.$$

Preostaje odrediti integral  $I$ . Specijalno, za  $x = 0$  dobivamo traženi integral

$$f(0) = \int_0^{\infty} \frac{8 \cos \pi \omega}{\pi (1 - 4\omega^2)} d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{8 \cos \pi t}{\pi (1 - 4t^2)} dt = \frac{8}{\pi} I,$$

odnosno  $I = \frac{\pi}{8} \cdot f(0)$ . Kako je  $0 \in [-\pi, \pi]$  i  $f(0) = 2 \cos \frac{0}{2} = 2 \cdot 1 = 2$  konačno je  $I = \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi}{4}$ .

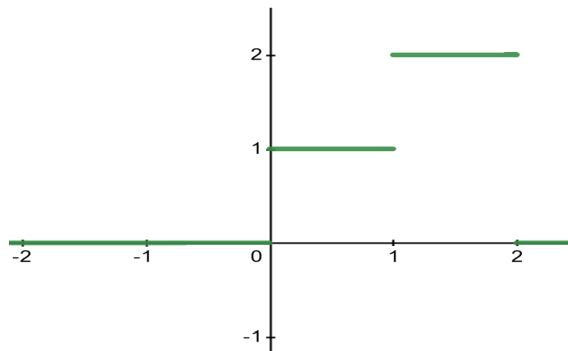


5. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) dt.$$



Slika 33: Graf funkcije (zadatak 5.)

Funkcija  $f$  nije ni parna ni neparna stoga računamo i kosinusni i sinusni spektar:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 0 \cdot \cos \omega x dx}_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \omega x dx + \frac{2}{\pi} \int_1^2 \cos \omega x dx + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x dx}_0 \\ &= \frac{1}{\pi \omega} \sin \omega x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi \omega} \sin \omega x \Big|_1^2 \\ &= \frac{\sin \omega}{\pi \omega} + \frac{2 \sin 2\omega}{\pi \omega} - \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \\ &= \frac{-\sin \omega + 2 \sin 2\omega}{\pi \omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 0 \cdot \sin \omega x \, dx}_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \omega x \, dx + \frac{2}{\pi} \int_1^2 \sin \omega x \, dx + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \sin \omega x \, dx}_0 \\
&= -\frac{1}{\pi\omega} \cos \omega x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi\omega} \cos \omega x \Big|_1^2 \\
&= -\frac{\cos \omega}{\pi\omega} + \frac{1}{\pi\omega} - \frac{2 \cos 2\omega}{\pi\omega} + \frac{2 \cos \omega}{\pi\omega} \\
&= \frac{1 + \cos \omega - 2 \cos 2\omega}{\pi\omega}.
\end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije  $f$  glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} ((-\sin \omega + 2 \sin 2\omega) \cos \omega x + (1 + \cos \omega - 2 \cos 2\omega) \sin \omega x) \, d\omega.$$

Preostaje odrediti integral  $I$ . Specijalno, za  $x = 0$  dobivamo traženi integral

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} (-\sin \omega + 2 \sin 2\omega) \, d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} (-\sin t + 2 \sin 2t) \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} (-\sin t + 4 \sin t \cos t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) \, dt = \frac{1}{\pi} I,
\end{aligned}$$

odnosno  $I = \pi \cdot f(0)$ . Funkcija  $f$  ima prekid u točki  $x = 0$  pa  $f(0)$  računamo na sljedeći način:

$$f(0) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Konačno je  $I = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ .

## 7 LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

### 7.1 Osnovni pojmovi

Neka je  $f$  funkcija realnog argumenta  $t$ , definirana za  $t > 0$  i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je  $s$  realni ili kompleksni parametar.

**Laplaceov transformat** funkcije  $f$  je funkcija  $F$  definirana sa

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

za svaki  $s$  za koji ovaj nepravi integral konvergira. Funkcija  $f$  se naziva **original** ili gornja funkcija, a  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$  **slika** ili donja funkcija.

Originale označavamo malim slovima  $f, g, h$  a njihove slike velikim slovima  $F, G, H$ .

Pridruživanje  $f \mapsto F$  nazivamo **Laplaceova transformacija** i označavamo ga s  $\mathcal{L}$ . Dakle,  $\mathcal{L}(f) = F$ . Obratna veza, koja slici pridružuje original, naziva se **inverzna Laplaceova transformacija** i označava s  $\mathcal{L}^{-1}$ . Dakle,  $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$ .

Da je originalu  $f$  pridružena slika  $F$  možemo zapisati i ovako:

$$f(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(s)$$

a obratnu vezu zapisujemo

$$F(s) \bullet\!\!\!\rightarrow f(t).$$

### Tablica osnovnih Laplaceovih transformata

| $f(t)$          | $F(s)$               |
|-----------------|----------------------|
| 1               | $\frac{1}{s}$        |
| $t$             | $\frac{1}{s^2}$      |
| $t^n$           | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$        | $\frac{1}{s-a}$      |
| $\sin(at)$      | $\frac{a}{s^2+a^2}$  |
| $\cos(at)$      | $\frac{s}{s^2+a^2}$  |
| $\text{sh}(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$  |
| $\text{ch}(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$  |

**Svojstva Laplaceove transformacije**

$$f(t) \circ \bullet F(s), a > 0, g(t) \circ \bullet G(s)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \text{ je step funkcija.}$$

|   |
|---|
| $\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \bullet \alpha F(s) + \beta G(s)$         |
| $f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$               |
| $e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s+a)$                                       |
| $f(t-a)u(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s)$                                 |
| $f'(t) \circ \bullet sF(s) - f(0)$  |
| $f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ |
| $t^n f(t) \circ \bullet (-1)^n F^{(n)}(s)$                                |
| $\frac{f(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty F(s) ds$                      |
| $\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$                     |

**Rješavanje diferencijalnih jednačbi**

Pomoću Laplaceove transformacije možemo rješavati početni problem koji se sastoji od linearne diferencijalne jednačbe (reda  $n$ ) s konstantnim koeficijentima

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t)$$

i početnih uvjeta

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Postavimo problem ekvivalentan početnom preslikavajući ga u donje područje.

Neka je  $x(t) \circ \bullet X(s)$  i  $f(t) \circ \bullet F(s)$ . Tada je

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ \bullet sX(s) - x(0) = sX(s) - x_0 \\ x''(t) &\circ \bullet s(sX(s) - x_0) - x'(0) = s^2X(s) - sx_0 - x_1 \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &\circ \bullet s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_1 - \dots - sx_{n-1} - x_n, \end{aligned}$$

pa (DJ) prelazi u

$$\begin{aligned} s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - \dots - x_n + a_{n-1} [s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \dots - x_{n-1}] \\ + \dots + a_1 [sX(s) - x_0] + a_0X(s) = F(s). \end{aligned}$$

Nakon sređivanja, ovu jednačbu možemo zapisati u obliku

$$P(s)X(s) + G(s) = F(s).$$

gdje je  $P(s)$  karakteristični polinom diferencijalne jednačbe (stupnja  $n$ ), a  $G(s)$  neki polinom stupnja  $n-1$ . Odavde dobivamo

$$X(s) = \frac{F(s) - G(s)}{P(s)},$$

kojeg trebamo vratiti u gornje područje.

## 7.2 Zadaci

1. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = t, t \geq 0$ .
2. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = (3 - 2t)e^{-5t}$ .
3. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = \cos^2 t$ .
4. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = e^{3t} t \sin^2 t$ .
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte  $\int_0^{\infty} e^{-7t} t \sin t dt$ .
6. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte  $\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 \cos t dt$ .
7. Izračunajte original funkcije  $F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$ .
8. Izračunajte original funkcije  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$ .
9. Izračunajte  $L^{-1}[F(s)](t)$  ako je  $F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s + 3)^2}$ .
10. Izračunajte  $L^{-1}[F(s)](t)$  ako je  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s - 1)}$ .
11. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

12. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - 3y' + 2y = te^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

13. Primjenom Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednačbi

$$\begin{aligned} y' + 3y + z &= 0 \\ z' - y + z &= 0, \end{aligned}$$

uz početne uvjete  $y(0) = 1, z(0) = 1$ .

**Rješenja:**

1. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = t, t \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \int_0^a e^{-st} t dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-st} dt \\ du = dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^a + \frac{1}{s} \int_0^a e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \underbrace{-\frac{a}{s} e^{-sa}}_0 + \frac{0}{s} e^0 - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^a \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{s^2} (e^{-sa} - e^0) \right) = -\frac{1}{s^2} (0 - 1) = \frac{1}{s^2}, s > 0 \end{aligned}$$

jer je

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{a}{s} e^{-sa} \right) = -\frac{1}{s} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{e^{sa}} \stackrel{L'H}{=} -\frac{1}{s^2} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{sa}} = 0.$$

2. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = (3 - 2t) e^{-5t}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[(3 - 2t) e^{-5t}](s) = \mathcal{L}[3e^{-5t} - 2te^{-5t}](s) \\ &\stackrel{1^\circ}{=} 3\mathcal{L}[e^{-5t}](s) - 2\mathcal{L}[te^{-5t}](s) \\ &\stackrel{2^\circ}{=} 3\mathcal{L}[1](s+5) - 2\mathcal{L}[t](s+5) \\ &= \frac{3}{s+5} - \frac{2}{(s+5)^2} = \frac{3s+13}{(s+5)^2}, s > 0. \end{aligned}$$

$$1^\circ \alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$2^\circ e^{-at} f(t) \leftrightarrow F(s+a)$$

3. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = \cos^2 t$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[\cos^2 t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1 + \cos 2t}{2}\right](s) \\ &\stackrel{1^\circ}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t](s) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right), s > 0. \end{aligned}$$

4. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije  $f(t) = e^{3t} t \sin^2 t$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[e^{3t} t \sin^2 t](s) \stackrel{2^\circ}{=} \mathcal{L}[t \sin^2 t](s-3) \\
 &= \mathcal{L}\left[t \frac{1 - \cos 2t}{2}\right](s-3) \\
 &\stackrel{1^\circ}{=} \frac{1}{2} (\mathcal{L}[t](s-3) - \mathcal{L}[t \cos 2t](s-3)) \\
 &\stackrel{3^\circ}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-3)^2} - (-1)^1 \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos 2t](s-3) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{d}{ds} \left( \frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{d}{ds} \left( \frac{s-3}{s^2 - 6s + 13} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{-s^2 + 6s - 5}{(s^2 - 6s + 13)^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$3^\circ t^n f(t) \rightsquigarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte  $\int_0^\infty e^{-7t} t \sin t dt$ .

Budući da je  $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  slijedi  $f(t) = t \sin t$  i  $s = 7$ . Dakle,

$$\int_0^\infty e^{-7t} t \sin t dt = \mathcal{L}[t \sin t](7).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t \sin t](s) &= (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t](s) \\
 &= (-1) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) \\
 &= (-1) \frac{d}{ds} ((s^2 + 1)^{-1}) \\
 &= (-1)(-1)(s^2 + 1)^{-2} 2s \\
 &= \frac{2s}{(s^2 + 1)^2},
 \end{aligned}$$

$$\text{pa je } \mathcal{L}[t \sin t](7) = \frac{2 \cdot 7}{(7^2 + 1)^2} = \frac{14}{2500}.$$

6. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte  $\int_0^\infty e^{-t} t^2 \cos t dt$ .

Kako je  $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  slijedi da je  $f(t) = t^2 \cos t$  i  $s = 1$ . Dakle,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 \cos t dt = \mathcal{L}[t^2 \cos t](1). \quad (1)$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 \cos t](s) &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\cos t](s) \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s}{s^2 + 1} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1 - s^2}{(s^2 + 1)^2} \right) \\ &= \frac{2s(s^2 - 3)}{(s^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{pa je } \mathcal{L}[t^2 \cos t](1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot (1^2 - 3)}{(1^2 + 1)^3} = -\frac{1}{2}.$$

7. Izračunajte original funkcije  $F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$ .

Nazivnik funkcije možemo faktorizirati  $s^2 - 2s - 3 = (s - 3)(s + 1)$  pa funkciju  $F(s)$  rastavljamo na parcijalne razlomke. Imamo:

$$\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 1}$$

iz čega slijedi da je  $A = 4$ ,  $B = -1$ , tj.  $F(s) = \frac{4}{s - 3} - \frac{1}{s + 1}$ . Original funkcije je:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4}{s - 3} - \frac{1}{s + 1} \right] (t) \\ &= 4\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - 3} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1} \right] (t) = 4e^{3t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

8. Izračunajte original funkcije  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$ .

Nazivnik funkcije se ne može faktorizirati, ali se može dopuniti do kvadrata binoma:  $s^2 + 6s + 13 = (s + 3)^2 + 4$ . Original funkcije je:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + 3)^2 + 4} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 3)^2 + 4} \right] (t) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s + 3)^2 + 4} \right] (t) = \frac{1}{2} e^{-3t} \sin 2t. \end{aligned}$$



9. Izračunajte  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$  ako je  $F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\right](t) \\ &\stackrel{4^\circ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right](t-2) \cdot u(t-2) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1!}{(s+3)^2}\right](t-2) \cdot u(t-2) \\ &= (t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2) = (t-2)e^{-3t+6}u(t-2).\end{aligned}$$

$$4^\circ f(t-a)u(t-a) \leftrightarrow e^{-as}F(s)$$

10. Izračunajte  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$  ako je  $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-1)}$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s-1)}\right](t) \\ &\stackrel{4^\circ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right](t-1) \cdot u(t-1) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}\right](t-1) \cdot u(t-1) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t-1) \cdot u(t-1) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t-1) \cdot u(t-1) \\ &= (-1 + e^{t-1})u(t-1).\end{aligned}$$

11. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''](s) - \mathcal{L}[y'](s) - 6\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ s^2\mathcal{L}[y](s) - s \cdot y(0) - y'(0) - s \cdot \mathcal{L}[y](s) + y(0) - 6\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ s^2\mathcal{L}[y](s) + 2s - 3 - s \cdot \mathcal{L}[y](s) - 2 - 6\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ \mathcal{L}[y](s)(s^2 - s - 6) &= -2s + 5 \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{-2s + 5}{s^2 - s - 6} \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{-2s + 5}{(s-3)(s+2)}\end{aligned}$$

$\mathcal{L}[y](s)$  rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$\frac{-2s + 5}{s^2 - s - 6} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 2}$$

iz čega slijedi da je  $A = \frac{-1}{5}$ ,  $B = \frac{-9}{5}$ , to jest

$$\mathcal{L}[y](s) = -\frac{1}{5(s-3)} - \frac{9}{5(s+2)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{1}{5(s-3)} - \frac{9}{5(s+2)} \right] (t) \\ &= -\frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-3} \right] (t) - \frac{9}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} \right] (t) \\ &= -\frac{1}{5} e^{3t} - \frac{9}{5} e^{-2t}. \end{aligned}$$

12. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - 3y' + 2y = te^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

$$\mathcal{L}[y''](s) - 3\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[te^t](s)$$

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - s \cdot y(0) - y'(0) - 3(s \cdot \mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 2\mathcal{L}[y](s) = \frac{1!}{(s-1)^2}$$

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - s + 2 - 3s \cdot \mathcal{L}[y](s) + 3 + 2\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}[y](s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{(s-1)^2} + s - 5$$

$$\mathcal{L}[y](s)((s-1)(s-2)) = \frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^3(s-2)}$$

$\mathcal{L}[y](s)$  rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$\frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^3(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s-2}$$

iz čega slijedi da je  $A = 3$ ,  $B = -1$ ,  $C = -1$ ,  $D = -2$ , to jest

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2} \right] (t) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-1} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-1)^2} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-1)^3} \right] (t) - 2\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-2} \right] (t) \\ &= 3e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

13. Primjenom Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}y' + 3y + z &= 0 \\z' - y + z &= 0,\end{aligned}$$

uz početne uvjete  $y(0) = 1, z(0) = 1$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'](s) + 3\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0 \\ \mathcal{L}[z'](s) - \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + 3\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0 \\ s\mathcal{L}[z](s) - z(0) - \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0\end{aligned}$$


---

$$(s + 3)\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 1 \tag{1}$$

$$(s + 1)\mathcal{L}[z](s) - \mathcal{L}[y](s) = 1 \tag{2}$$

Iz jednadžbe (1) je

$$\mathcal{L}[z](s) = 1 - (s + 3)\mathcal{L}[y](s). \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobivamo

$$(s + 1)(1 - (s + 3)\mathcal{L}[y](s)) - \mathcal{L}[y](s) = 1,$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{(s + 2)^2}. \tag{4}$$

Zatim, uvrštavanjem (4) u (3) dobivamo

$$\mathcal{L}[z](s) = \frac{s + 4}{(s + 2)^2}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s + 2)^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s + 2 - 2}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 2} \right] (t) - 2\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= e^{-2t} - 2te^{-2t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s + 4}{(s + 2)^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s + 2 + 2}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 2} \right] (t) + 2\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= e^{-2t} + 2te^{-2t}.\end{aligned}$$

## 8 LITERATURA

- [1] Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija, N. Elezović, Element, 2010.
- [2] Vektorska analiza, L. Korkut, M. Krnić, M. Pašić, Element, 2009.
- [3] <http://lavica.fesb.unist.hr/matematika3/predavanja/index.html>
- [4] Razni primjeri s kolokvija i ispita s FESB-a, FER-a, FSB-a.