

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I  
BRODOGRADNJE**

**POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ  
ELEKTROTEHNIKA I INFORMACIJSKA TEHNOLOGIJA**

**KVALIFIKACIJSKI ISPIT**

**DINAMIKA ROBOTSKIH MANIPULATORA S  
VELIKIM BROJEM STUPNJEVA SLOBODE**

Ognjen Huskić

Split, svibanj 2020.

# SADRŽAJ

<b>1 UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2 KLASIFIKACIJA ROBOTSKIH SUSTAVA</b> .....	<b>3</b>
<b>3 PRIMJENE HDOF ROBOTSKIH SUSTAVA</b> .....	<b>6</b>
<b>3.1 Manipulatori HDOF tipa</b> .....	<b>6</b>
<b>3.2 HDOF sustavi u medicinskoj praksi</b> .....	<b>8</b>
<b>4 POGONI U HDOF SUSTAVIMA</b> .....	<b>11</b>
<b>4.1 Stabilnost pogonskih sustava</b> .....	<b>11</b>
<b>5 PARAMETARSKA STABILNOST</b> .....	<b>17</b>
<b>5.1 Autoparametarske oscilacije</b> .....	<b>18</b>
<b>5.2 Veliki luk za HDOF ruke</b> .....	<b>22</b>
<b>6 STABILNOST HDOF SUSTAVA</b> .....	<b>29</b>
<b>6.1 Stabilnost po Ljapunovu</b> .....	<b>29</b>
<b>6.2 Granice stabilnosti</b> .....	<b>32</b>
<b>6.3 Krutost i prigušenje HDOF sustava</b> .....	<b>34</b>
<b>7 KAŠNJENJA U HDOF MODELIMA</b> .....	<b>38</b>
<b>7.1 Aproximirani HDOF sustav s kašnjenjem</b> .....	<b>39</b>
<b>8 FLEKSIBILNI HDOF SUSTAVI</b> .....	<b>43</b>
<b>8.1 Hiper-redundantni i fleksibilni roboti</b> .....	<b>43</b>
<b>8.2 Fleksibilni model za robote</b> .....	<b>46</b>
8.2.1 Stabilnost modela .....	51
8.2.2 Rješenja za model.....	53
<b>9 DODIR HDOF I OKOLINE</b> .....	<b>56</b>
<b>9.1 Fleksibilni robot između prepreka</b> .....	<b>57</b>
<b>10 FLEKSIBILNI ROBOTSKI SUSTAVI I NJIHANJE ENERGIJE</b> .....	<b>60</b>
<b>11 ZAKLJUČAK</b> .....	<b>65</b>
<b>12 LITERATURA</b> .....	<b>66</b>
<b>13 SAŽETAK</b> .....	<b>70</b>
<b>14 DODATAK</b> .....	<b>71</b>
<b>14.1 Demonstracija rada HDOF sustava u MATLAB-u</b> .....	<b>71</b>

# 1 UVOD

U ovom radu je predstavljen pristup analizi dinamičkih svojstava fleksibilnih robotskih struktura koje su dizajnirane po uzoru na tjelesnu građu brojnih bioloških vrsta (engl. biological counterparts). Ovaj pravac razvoja redundantnih i hiper-redundantnih verzija robota je rezultat nastojanja istraživača u robotici da se industrijskim robotima poveća broj zglobova i mogućih konfiguracija, te da se tako učine radno učinkovitijim i u neorganiziranom okruženju.

Industrijski roboti su moderni, vrlo učinkoviti strojevi za masovnu automatiziranu proizvodnju u industriji. U organiziranoj okolini djeluju na temelju željenog gibanja masivne mehaničke ruke (engl. serial link robotics, rigid robots) sa  $n \leq 6$  stupnjeva slobode, koja na vrhu ima specijalne radne podsustave (alate) za određene zadatke. Dinamika se ostvaruje programiranim djelovanjem pogonskih podsustava (aktuatora) u zglobovima (engl. joint space, dim.  $n$ ) robotske mehaničke konstrukcije, a pri čemu se moraju zadovoljavati uvjeti i zahtjevi posla za koji su opremljeni i programirani u vanjskom radnom prostoru (engl. task space, dim.  $m$ ,  $m \leq n$ ).

Poslije industrijskih manipulatora, kao novi koncept u dizajnu robota razvijala se od početka 70-tih godina dvadesetog stoljeća jedna posebna grana robotike fokusirana na veći ( $n > 6$ ) i veliki broj stupnjeva slobode robotske ruke ( $n \gg 6$ ), a u vidu kinematički redundantnih i hiper-redundantnih robotskih sustava (engl. HDOF, high-degree-of-freedom).

Roboti diskretizirane forme po uzoru na fleksibilne kralježnice (engl. flexible backbones) ili kompaktne i kontinualne građe (engl. lightweight flexible manipulators), su složene HDOF i druge slične robotske strukture koncipirane kao mehaničke replike surle slona, krakova hobotnice, tijela zmije, jezika žirafe i mravojeda, repa majmuna, tijela jegulje, gusjenice, crva, itd. Ove ideje o robotskim rukama kao dugim gibljivim krakovima koje se mogu provlačiti kroz razne otvore (engl. compliant nature), vijugati između različitih prepreka u prostoru, te ulaziti u zatvorene sustave kao što su cjevovodi (engl. niche applications), pružiti pomoć unesrećenim u ruševinama (engl. rescue operations) itd., su pokrenule vrlo ozbiljna i opsežna istraživanja u robotici.

Ova oblast redundantne robotike, a posebice kad su u pitanju HDOF i drugi fleksibilni robotski sustavi, je primjer raskoraka između teorije i prakse. Ta neuravnoteženost se ogleda u velikom broju matematičkih teorija i modela na jednoj strani, te neuspješnosti inženjerske prakse na drugoj [1]. Dinamika redundantnih mehanizama, hiper-redundantnih (HDOF) i drugih fleksibilnih robotskih struktura, nema svojstva determinizma ni egzaktnosti, već nestabilnosti, probabilizma i neodređenosti. Ideje o redundantnim robotima su vodile nekvadratnim matricama Jacobiana, što znači (uglavnom) nerješivim inverznim problemima i nekonzistentnim algoritmima upravljanja. To je uz neizbježne dizajnerske probleme i nestabilnost ovakvih radnih struktura (ruku) značilo prelazak iz klasične mehanike u sferu nelinearne, pa i kaotične dinamike.

U ovom radu je pružen prikaz istraživačkih preokupacija usmjerenih na dominantne dinamičke manifestacije kod fleksibilnih robotskih sustava. Temeljni je stav rada da su svi fleksibilni robotski manipulatori, bez obzira da li im je to neželjeni efekt (HDOF sustavi), konstruktivni zahtjev (engl. flexible manipulators) ili prirodno svojstvo (engl. soft manipulators), nelinearne i izrazito nestabilne konstrukcije u svakom pogledu. Zato se istraživački postupci za ove nekonvencionalne robote neizbježno moraju odvijati u okvirima

nelinearne dinamike, što znači u kvalitativnim analizama, prikazima portreta u faznim ravninama, upravljanju nelinearnim pobudama, u primjeni modalnih tehnika, u analizi višestrukih ravnotežnih točaka, te u graničnim ciklusima, bifurkacijskim fenomenima, kašnjenjima, kaosom, itd.

Ovaj rad sadrži 10 tematskih poglavlja, te još 4 dopunska. Poglavlja kao tematske cjeline su mozaički koncipirana i organizirana, tako da sadrže razne pristupe stabilnosti HDOF sustava i drugih fleksibilnih robota.

Navedenih 10 poglavlja sadrži sljedeće:

1. Uvod kao uputu za potpunije praćenje i razmišljanje daljnjeg izlaganja u radu.
2. Predstavljene su osnovni istraživački motivi i razvojni pravci u robotici prema dizajnu i izvedbama inspiriranim bio-uzorima u prirodi.
3. Dizajn robotskih ruku inspiriran gibljivim tijelima i/ili organima u građi brojnih jedinki iz životinjskog svijeta, rezultirao je u raznim varijantama redundancije i hiper-redundancije. Navedene su u ovom poglavlju neke ideje za primjenu ovako koncipiranih robotskih sustava u svojstvu manipulatora, te su istaknute uspješne primjene mikro-verzija HDOF sustava u medicinskoj praksi.
4. Predstavljen je sustav tetiva (antagoniziranih struna) za upravljanje prostornim makro-oblicima HDOF robotske ruke, a čiji su pokretački uređaji (aktuatori) smješteni u nepokretnoj bazi, te tako svojom težinom i gabaritima ne opterećuju mehaničku strukturu ruke.
5. Kod HDOF robota čije su mehaničke strukture (ruke) neizbježno i fleksibilne, najbitniji parametri nisu konstantni (engl. time invariant systems). Analiziran je slučaj velike lučne konture robotske ruke, koja pokazuju izrazito složene vibracije.
6. Teorija stabilnosti po Ljapunovu je važna u raznim primjenama za robotske sustave, a posebno je predstavljena Direktna metoda, jer je primjenjiva i na nelinearne sustave.
7. Kašnjenje presudno utječe na stabilnost svih sustava, pa je prikazan jednostavan primjer povratne veze s kašnjenjem. Predstavljen je i Mackey-Glass model za fiziološka kašnjenja, kao i logistički model, koji se mogu koristiti za istraživanje globalne stabilnosti fleksibilnih robotskih sustava svih vrsta.
8. Moguće je korištenjem modela elastične grede (štapa) zasnovanoj na metodi Euler-Bernoulli, a uz Lagrange-ovu jednadžbu i Ljapunovljev postupak za stabilnost, analizirati stabilnost i HDOF robota.
9. Poglavlje sadrži prikaz dugog kraka (ruka) HDOF robota koji neizbježno u zatvorenim prostorima (npr. pri pregledu unutrašnjosti kotlova u termoelektrani) mora imati potpuni ili djelomični dodir s okolinom.
10. U ovom je poglavlju istaknuta opravdanost istraživanja stabilnosti HDOF sustava po analogiji na elektroenergetske sustave (EES).

Poglavlja 11, 12, 13 i 14 sadrže respektivno: Zaključak, Literatura, Sažetak, te Dodatak (HDOF u Matlabu).

## 2 KLASIFIKACIJA ROBOTSKIH SUSTAVA

Kao i sve drugo u tehnici i tehnologiji, tako je pojava i razvoj „klasičnih“ robota, pa zatim i redundantnih robota, dio spektakularnog zamaha svih aspekata civilizacijskog napretka, posebice tehničko-tehnološkog. Industrijski manipulatori su upravljani višenamjenski strojevi dizajnirani po uzoru na ljudsku ruku, a njihov radni ambijent je u većini primjena zatvorena i uređena tehnološka sredina.

Kod neredundantnih robota industrijskog tipa je definiran omeđeni oblik radnog prostora, a u zavisnosti od njihovog osnovnog dizajna, gabarita i primjene. S druge strane, koncept redundantnih robotskih ruku sa brojnim stupnjevima slobode ( $n > 6$ ) je nastao s ciljem da zaobilaze prepreke u neuređenom radnom prostoru, te za ulazak i rad u uskim i zatvorenim prostorima gdje čovjek ne može doprijeti.

Zamah istraživanja hiper-redundantnih robotskih ruku je u robotici je proistekao iz nastojanja da se usavrše mehaničke strukture industrijskih manipulatora povećanjem njihove gibljivosti, a imajući i u biljnom i u životinjskom svijetu brojne primjere tjelesne građe i dijelova tijela visokog stupnja učinkovitosti.

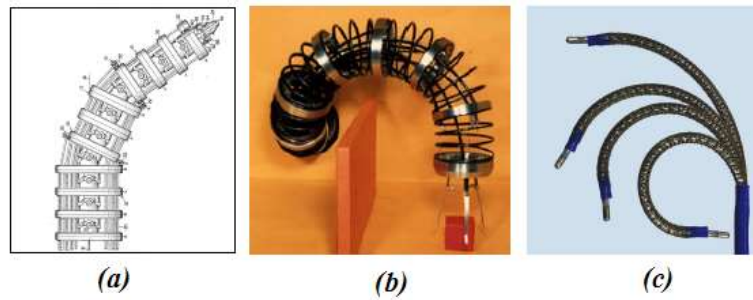
Na Slici 2.1 prikazani su neki primjeri bioloških organizama koji su najviše inspirirali istraživače u području redundantne robotike [1], [2].



*Slika 2.1 Neki primjeri za bio-inspiracije za dizajn fleksibilnih robotskih sustava*

U pokrenutom razvoju robotskih replika gibljivih bioloških struktura stvorena je vrlo bogata teorijska podloga [2], [3], te su realizirani brojni eksperimentalni modeli takvih sustava. Tri poznata modela su prikazana na Slici 2.2. [4]:

- (a) Tenzorska ruka, prvi hiper-redundantni robot, prototip Andersona i Horna (1967.);
- (b) Model hiper-redundantne robotske ruke Shigeo Hirose-a iz 1970-tih;
- (c) Moderni kontinuum robotski uređaj za medicinske primjene po rješenjima Camarilla i Solsbury-ja, (2008.).

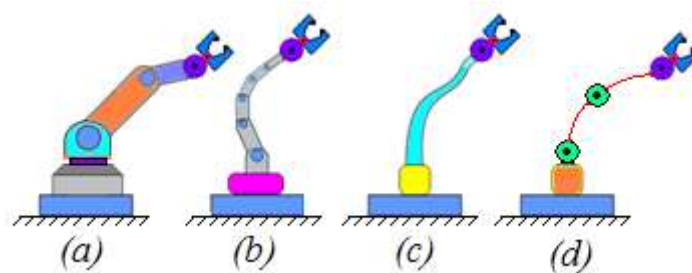


Slika 2.2 Neki razvojni modeli HDOF sustava

Odvajanjem razvojnih putova u robotici od „klasičnih“ neredundantnih industrijskih manipulatora prema redundantnim, hiper-redundantnim i fleksibilnim robotskim radnim strukturama (ruke, krakovi), promijenio se i matematički okvir za njihovo modeliranje i analizu. Simbolički se to može ilustrirati na način da su Newtonovska mehanika, D-H tehnika i kvadratna matrica Jacobian područja „klasične“ robotike. Energijske metode Lagrangea i Hamiltona, prilagođenih oblika Jacobiana, metoda prostora stanja, Euler- Bernoullijeva jednačina, modalne tehnike, stabilnost po Ljapunovu, te cijeli spektar metoda iz nelinearne dinamike – u tim okvirima su analitičke i numeričke metode za nekonvencionalne robote koje karakteriziraju fleksibilni mehanizmi za fizički rad u okolini.

Pomjeranje matematičkih metoda za modeliranje „neklasičnih“ robota i kreiranje upravljačkih algoritama uz suzbijanje vibracija je značilo i pomjeranje ove cijele kategorije elastičnih robota dalje od mogućnosti uspješnog dizajna i korisne upotrebe.

Na Slici 2.3 su dani idealizirani prikazi četiri temeljne kategorije robota [5], gdje su (a) i (b) diskretne mehaničke strukture u vidu serijskog lanca (engl. serial chain) elemenata i zglobova za neredundantne i redundantne manipulatore [6], (c) je kontinuum izvedba tipa HDOF (engl. high-degree-of-freedom) [7], a (d) konstruktivno fleksibilni manipulator. Sukladno ciljevima ovoga rada, u hiper-redundantne robote se ubrajaju roboti označeni sa (b), (planski dizajnirani fleksibilni roboti) [8], [9].



Slika 2.3 Robotski manipulatori: (a) neredundantni, (b) redundantni - diskretna morfologija, (c) kontinuum-hiper-redundantni, (d) fleksibilni

Osnovna svojstva ove četiri temeljne grupe robotskih manipulatora se mogu prikazati na sljedeći način:

- (a) Industrijski manipulatori su ne-redundantne mehaničke strukture s malim brojem osnovnih krutih mehaničkih elemenata (najčešće dva elementa/grede, uz postolje i mehanizam „šake“) s odgovarajućim alatom na vrhu, ali su najuspjeliji i najvažniji robotski sustavi u industrijskoj i uslužnoj praksi [5].

- (b) Diskretne zmijolike morfologije redundantnih robotskih mehanizama (engl. snake-like robots) [2], [7], imaju velik broj veznih elemenata (članaka) između zglobova (engl. serially linked segments), pa su izrazito komplicirani mehanički sustavi [8]. Oni zbog težine same mehaničke strukture (ruke) ne mogu imati aktuatore u zglobovima za 3D primjene, pa općenito kao manipulatori nisu primjenjivi [9]. U ovu vrstu robota se ubrajaju i VGT morfologije (engl. variable geometry truss structure) iako su modularne građe. Jedino su mikro izvedbe na razne načine artikuliranih i podartikuliranih (engl. underactuated robots) sustava ove vrste (engl. discrete jointed) uspješno zastupljene u medicinskoj instrumentaciji [12].
- (c) Moguća je tehnička realizacija ovih kontinuum robotskih sustava u makro-verziji [6], što znači kao HDOF manipulatora, ali su u svakom pogledu neprihvatljivi za industrijske i druge primjene. Ipak i dalje se istražuju brojni eksperimentalni modeli kontinuum tipa (engl. trunk-like prototypes), s ciljem da se za njih ipak omogući neka perspektiva. Od 1980-tih i 1990-tih su ta istraživanja intenzivirana, a inače prvi HDOF robot namijenjen industriji je konstruirao Larson 1982.
- (d) Ideja da veze robota (engl. links) budu „štapovi“ od elastičnih materijala malog poprečnog presjeka dovele su do koncepta ciljano građenih fleksibilnih robota. Za razliku od HDOF sustava koji imaju neželjenu elastičnost radne strukture (ruke) i imaju aktuatore za cijelu strukturu smještene u nepokretnoj bazi, ciljano (engl. intentionally) građeni fleksibilni roboti moraju imati pokretače (aktuatore) za svaki „štap“ (link) zasebno.

Generalno su dinamički modeli za robotske ruke temeljeni na strukturi lanca krutih veza i diskretnih verzija zglobova, a sastoje se od nelinearnih običnih diferencijalnih jednadžbi. Dinamički modeli za kontinuum morfologije koriste nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Fleksibilni manipulatori su krute strukture sa distribuiranim parametrima kod kojih se manifestiraju elastični otkloni, pa je zbog distribuirane prirode njihovih matematičkih modela upravljanje vrlo složen postupak. Njihovi dinamički modeli imaju tostruku namjenu: za direktni dinamički problem, za inverzna rješenja i za dizajn regulatora. Dinamički modeli za fleksibilne robotske sustave izražene parcijalnim diferencijalnim jednadžbama se rješavaju pojednostavljenjem kroz razdvajanje varijabli, pa se prelazi na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (ODE). Također, modeliranje fleksibilnih manipulatora u vremenskoj domeni je moguće temeljem matrice prijenosa i Euler-Bernoulli jednadžbe za elastičnu gredu. U odnosu na približnu točnost analitičkim metoda, koriste se numerička rješenja i simulacijski pristupi kao što je metoda konačnih elemenata (FEM), metoda konačnih razlika (FDM) i metoda simboličke manipulacije (SMM).

Istraživanje ponašanja fleksibilnih robotskih struktura svih kategorija prije svega znači razvoj metoda djelovanja prema minimiziranju i eliminiranju njihovih vibracija, pa se ta vrsta upravljanja generalno dijeli na pasivne i aktivne metode. U pasivne se može ubrojati njihova specijalna konstrukcija sa kompenzacijskim materijalima, kao i njihov fizički kontakt sa predmetima u radnom okruženju. Aktivno upravljanje vibracijama je na principu interferencije valova, kao što je na primjer generiranje antivibracijskih signala (engl. shaped command) za sustav, a na temelju otvorene (engl. open-loop control, feedforward) i zatvorene petlje (engl. closed-loop control, feedback). Posebna kategorija upravljanja fleksibilnim robotskim mehanizmima je inteligentno upravljanje (engl. artificial intelligence control).

### 3 PRIMJENE HDOF ROBOTSKIH SUSTAVA

Bez obzira na niz vrlo poželjnih svojstava za rad u 3D prostoru, HDOF sustavi zbog nepostojanja preferencijalnih svojstava za bilo koje radove nisu traženi na tržištu robotskih strojeva. Također, zbog nepouzdanih matematičkih modela, slabe nosivosti, izrazite nestabilnosti ruke, problematične preciznosti vrha (alata), malih radnih brzina, kompliciranog dizajna te vrlo zahtjevnog upravljanja, ne mogu biti zamjena industrijskim manipulatorima ni u kojem pogledu. U ovom poglavlju su navedene neke moguće primjene HDOF sustava na specifičnim poslovima u makro i mikro verzijama. Polazu se nade da bi mogli u makro-izvedbama biti upotrebljivi za ulazak u duge i uske objekte (cijevi, kanale, zatvorene i opasne tehnološke prostore, itd.), a radi vizualnog utvrđivanja stanja i eventualnih radova. Specijalni HDOF sustavi u mikro-izvedbama su vrlo afirmirani u medicinskoj instrumentaciji.

#### 3.1 Manipulatori HDOF tipa

Hiper - redundantni manipulacijski roboti (HDOF) su zamišljena mehanička replika zmija, slonove surle, kraka hobotnice i slično (engl. bio-inspired robotics) [8], [9]. Dakle, radi se o dugim, gibljivim, aktivnim strukturama (engl. active cord mechanism), koje mogu imati razne dužine i konfiguracije kako bi doprli radnim vrhom (engl. end-effector) do ciljnih točaka u nesređenom prostoru (engl. unstructured environment) ili kontaminiranim sredinama. Koncipirani su, znači, za one primjene gdje se trebaju izbjegavati prepreke u radnom prostoru, provlačiti kroz cijevi i uske otvore, odnosno za sve one manipulacijske zadatke koje ne mogu obavljati ni čovjek, ni „klasični“ (industrijski) roboti (engl. conventional robot arms).

Ovi bi se roboti tako mogli koristiti u raznim primjenama [9], kao što su snimanja u sklopu revizijskih poslova u nuklearnim postrojenjima i naftovodima, za istraživanja ruševina nakon zemljotresa (engl. snake-like robot for rescue applications), itd. [10], [11].

HDOF roboti makro- manipulatori za izvršenje namijenjenih poslova moraju imati:

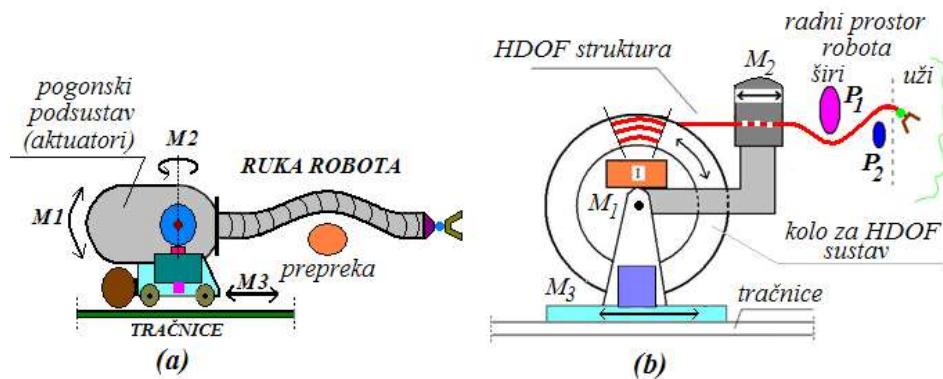
- kinematičku redundantnost (engl. kinematic redundancy) visokog stupnja (HDOF),
- upravljanje u realnom vremenu (engl. real-time control),
- nepokretne ciljne točke i radno okruženje (engl. dynamically stable environments),
- kontinuum-morfologiju ruke velike dužine (eng. continuous manipulator model),
- fleksibilnost i stabilnost (engl. flexibility and stability).

Za moguće primjene HDOF sustava u makro izvedbama, njihov poprečni presjek ruke i dužina su važan uvjet za korištenje u praksi, a sukladno osnovnoj ideji za njihov dizajn. To onda znači da tako duge i gibljive, artikulirane i upravljive tubusne strukture moraju imati i specijalne noseće podsustave na kojima se transportiraju, te kao baza služe da se sa njih usmjeravaju u širi i užu radni prostor [11]. Moraju se zato ti pomoćni noseći uređaji konstruirati kao specijalne vrste transportnih podsustava sa važnom aktivnom ulogom u radu robotske ruke na svakom konkretnom poslu. Ovdje se navode dva moguća koncepta, dva idejna rješenja za konstrukciju pomoćnih uređaja za HDOF sustave koji omogućuju mobilnost, te služe kao dopunski aktivni sustav za njihov rad:

- model s tračnicama, Slika 3.1 (a),
- model s kolom, Slika 3.1 (b).

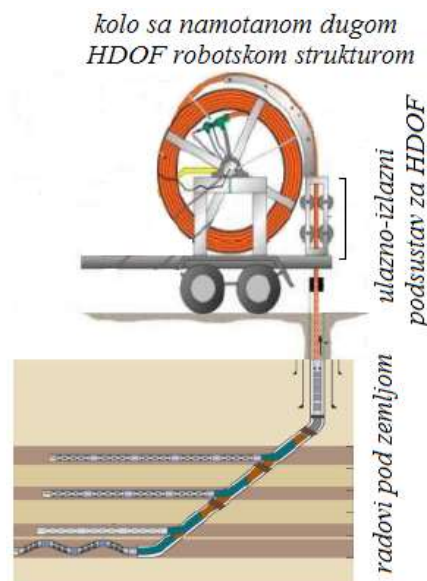


Model HDOF sustava na tračnicama 3.1 (a) je težak, ali moguć inženjerski projekt, pod uvjetom ograničene dužine ruke robota (max. 2 m) i uz vrlo upitno područje korisne, isplative primjene. Model 3.1 (b) s kolom podrazumijeva dugu (više metara), i u pogledu pogona pasivnu robotsku ruku, ali tada joj konfiguracije u prostoru mora određivati radno okruženje, kao što je to slučaj sa kateterima i endoskopima bez aktorskog upravljanja u medicinskim primjenama [15].



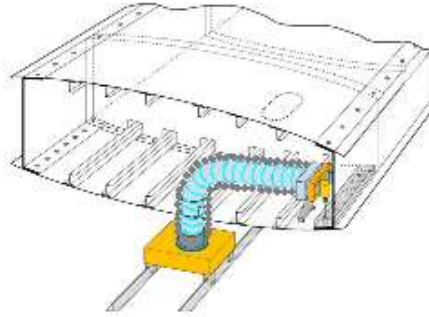
Slika 3.1 HDOF sustav na tračnicama (a) i na kolu (b)

Postoje brojna idejna rješenja u pogledu korištenja HDOF sustava u određenim praktičnim primjenama. Na Slici 3.2 je prikazan koncept po kojem bi se duga HDOF ruka namotana na kolo mogla koristiti u istraživanju crpilišta nafte u slojevima duboko pod zemljom.



Slika 3.2 Idejno rješenje za HDOF sustav u istraživanju slojeva zemlje radi eksploatacije nafte

Općenito velike i male tvrtke u svijetu za svoje potrebe nastoje istražiti, pa iskoristiti obećavajuće kapacitete HDOF sustava. Zato one, osim brojnih radova, studija i prototipova u raznim znanstveno-istraživačkim centrima, također prave i vlastite studije za moguću praktičnu upotrebu ovih nekonvencionalnih robota, kao što je prikazano na Slici 3.2. Na Slici 3.3 je EE koncept za automatizaciju na temelju HDOF sustava u avio-industriji (engl. aircraft automation), a na poslovima spajanja dijelova avionskog trupa i krila zakovicama.



*Slika 3.3 Idejno rješenje za rad HDOF sustava u avioindustriji (Boeing)*

Svi napori istraživača u području redundantnih robota da se modeliraju i grade HDOF sustavi u rangu radnih svojstava industrijskih robota nisu urodili plodom. Zato se pažnja preusmjerila na sustave koji eventualno mogu biti korisni u specijalnim inspekcijskim radnjama u opasnim tehnoloških sustava kao što su nuklearne elektrane, zatim u potrazi za unesrećenima poslije zemljotresa, itd. Uglavnom se računa na primjene gdje bi se ruke HDOF robota mogle zmijoliko gibati i dopirati do dijelova postrojenja ili drugih čovjeku nedostupnih prostora.

Također, nema do sada ni u tom alternativnom korištenju HDOF sustava (engl. niche applications) komercijalnog uspjeha, jer su to po pravilu unikatni i skupi roboti s vrlo kompliciranim upravljanjem, malim dosegom i malom nosivošću. Za snimanja unutrašnjosti dijelova nekog tehnološkog kompleksa, npr. u sustavima za naftu, su djelotvorniji, jeftiniji i jednostavniji za upravljanje mobilni roboti na kotačima ili gusjenicama, te minijaturne varijante dronova. Na Slici 3.4 je dana fotografija za prototip mobilnog robota s ugrađenom HDOF rukom (engl. trunkbot) kao radnim podsustavom – što je također mogućnost da se HDOF koriste kao manipulatori ugrađeni na raznim robotskim mobilnim podlogama.



*Slika 3.4 Prototip mobilnog robota sa HDOF robotskom rukom*

Općenito su dva glavna problema kod šire upotrebe mobilnih robota: ograničenost energije (baterija), te smanjena pokretljivost na neravnim podlogama. Ali to nisu veliki problemi ako su namijenjeni za snimanja unutar tehnoloških instalacija (transportno-cijevni sustavi većeg promjera, kotlovi, izmjenjivači topline, peći, itd.), jer su moguće energetske i upravljačke kablovske veze.

### **3.2 HDOF sustavi u medicinskoj praksi**

Uspješna primjena uređaja tipa HDOF u medicini se ogleda u postojanju brojnih specijalnih instrumenata za dijagnostičke, operativne, postoperativne i druge tretmane pacijenata. Tek su gibljivi instrumenti tipa HDOF omogućili učinkovit ulazak i rad u ljudskom organizmu bez klasičnih kirurških postupaka [12], [13].

Endoskopi i kateteri su osim igala i noževa su bili prvi medicinski instrumenti u ljudskoj upotrebi. Od Hipokrita potječe prvi endoskop (engl. rectal speculum), a u drevnoj Siriji se trska koristila za kateterizaciju. Od 1806. kada je Nijemac Philipp Bozzini 1806. prezentirao prvi endoskop sa svjetlom (njem. Lichtleiter, engl. light conductor) započela je era razvoja endoskopa koji su omogućavali ulazak u ljudsko tijelo i razgledanje organa primjenom neinvazivnih metoda. Posebno su kateteri kao gibljive cijevi raznih vrsta i namjena, te vrlo širok izbor sonde za unos u ljudsko tijelo ili odvod iz njega tečnih materija, vrlo zastupljeni alati u modernoj medicini.

Ulazak u ljudsko tijelo radi pregleda i drugih dijagnostičkih postupaka je otvorilo put i kirurškim zahvatima temeljenim na tim principima. Tako je 1920. američki radiolog Orndoff predložio laparoskopsku metodu (engl. laparoscopic trocar) i krenuo je razvoj takozvane „kirurgije bez ožiljaka“ (engl. toward surgery without scars), a što je 1987. britanski urolog Wickham nazvao minimalno invazivnom kirurgijom (engl. minimally invasive surgery, MIS).

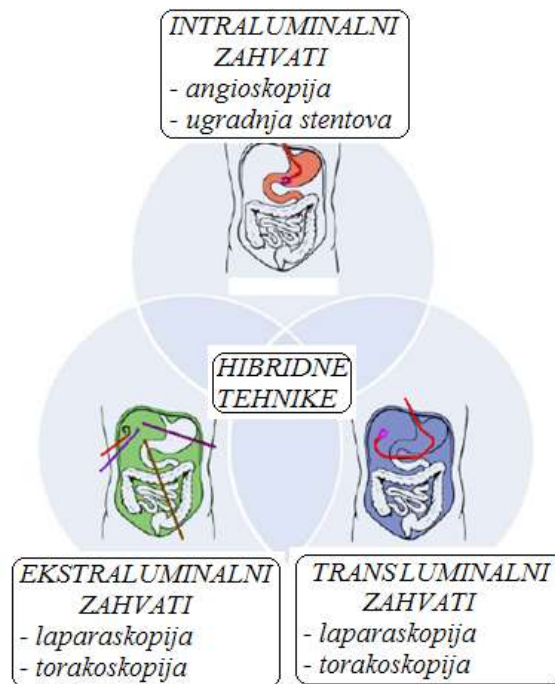
Specijalne minijaturne varijante HDOF robota pokretane ljudskom rukom ili nekim robotiziranim uređajem su zastupljene posebno u neinvazivnoj kirurgiji, kao što je snimanje krvnih žila (koronarografija), te za razne druge kirurške zahvate (engl. surgical applications), itd [13].

Za vođenje kroz ljudsko tijelo dijelova medicinskih uređaja dizajniranih po mikro-HDOF principu u osnovi postoje tri metode [14]:

- manuelno doziranje ulazne sile (utiskivanja) i djelovanje upravljačkim tetivama unutar te strukture radi prilagođavanja njene makro-geometrije anatomskim zahtjevima duž željene putanje u tijelu pacijenta;
- strojno, robotizirano upravljanje HDOF gibljivom mikro-strukturom radi njenog prodiranja u dijelovima ljudskog tijela;
- kombinirano upravljanje kirurga i stroja / robota HDOF strukturom tijekom kirurških operacija na pacijentu, te tokom drugih vrsta medicinskih tretmana.

U svim varijantama ulaska i rada gibljivih kirurških alata u tijelu pacijenta su iznimno važna vizualna i druga on-line praćenja stanja i efekata kirurške intervencije [15]. S obzirom na anatomiju ljudskog tijela, razvoj endoskopskog uređaja u medicini je podrazumijevao težnju prema njegovoj gibljivost. Tako je Hopkins, britanski fizičar 1954. konstruirao fleksibilni endoskop, ali je tek fiberoptička tehnologija koju je prvi primijenio na endoskopu američki gastroenterolog 1957. bio uvod u novu eru medicinske instrumentacije. Na Slici 3.5 je prikazan princip MIS u tri glavne varijante s obzirom na trajektoriju sustava kroz tijelo pacijenta:

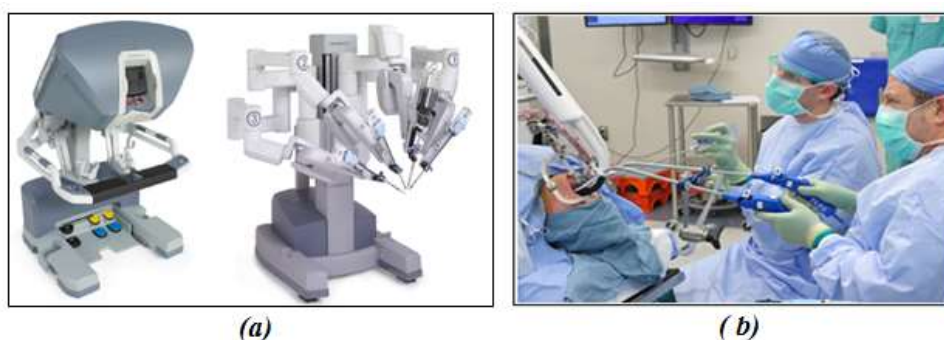
- Ekstraluminalni, koji znači kirurški prodor u ljudsko tijelo ne prateći njegove prirodne unutarnje puteve kao što su krvni sudovi, dišni putevi, putevi za hranu, itd.
- Intraluminalni kirurški pristup je manje invazivan pošto se HDOF instrumenti kreću i intervencije odvijaju kroz i unutar prirodnih tjelesnih kanala (engl. natural orifice).
- Transluminalni kirurški zahvati se odvijaju u dvije faze: u prvoj se koriste koridori kroz prirodne tjelesne kanale (npr. ždrijelo), a onda se na najpogodnijem mjestu kroz tkivo ide prema ciljanom dijelu organizma radi kirurškog ili nekog drugog zahvata.



*Slika 3.5 Tri oblika neinvazivne kirurgije (MIS) i njihova kombinacija u vidu hibridnih tehnika*

Medicinski instrumenti HDOF kategorije su naročite, vrlo specifične izvedbe s obzirom na namjenu, odnosno na cilj i svrhu, te ostale uvjete. Po manualnim radnjama operatera ili odgovarajućeg robotizirano sustava, a prema anatomskih specifičnosti u tijelu pacijenta do ciljnog područja, mijenja im se prostorna makro-geometriju (engl. robot varying shape).

Na Slici 3.6 (a) je dana slika robotskog sustava da Vinci sa konzolom (lijevo) i setom instrumenata za laparoskopske operacije (desno), a 3.6 (b) je slika manualnog upravljanja fleksibilnim kirurškim uređajem u tijelu pacijenta.



*Slika 3.6 da Vinci kirurška konzola i instrumentacija (a) i manualno upravljanje (b)*

Fleksibilne strukture u medicinskoj instrumentaciji su specijalno građeni noseći (engl. flexible shell) za neke grupe podsustava određene kirurške namijenjene, kao na primjer elektrokauteza, odvodnih (usisnih) i dopremajućih (irigacijskih) cijevi, itd.

## 4 POGONI U HDOF SUSTAVIMA

Glavni uvjet stabilnosti robotske ruke svakog HDOF sustava s lociranim aktuatorima u nepokretnoj bazi i snopom tetiva kojima se odatle diktiraju geometrijski oblici te strukture u prostoru kao na Slici 4.1, je vremenski promjenljiva zategnutost/napetost svih tetiva, ovisno o svakoj trenutnoj konfiguraciji i njihovoj općoj dinamici [15]. Te napetosti odgovaraju pomacima tetiva dobivenim od rješenja inverzne kinematike za zadanu konfiguraciju, a za svaku konfiguraciju su ti pomaci i opterećenja tetiva različiti [16]. Posebni uvjeti za stabilan rad HDOF sustava s tetivama je usklađenost njihovih pokreta kao binarnih (antagoniziranih) podsustava, uspostavljanje optimalnog odnosa između pomaka i napetosti u svakoj tetivi, te eliminiranje pretjeranih napetosti. Dobro sinkronizirana dinamika tetiva HDOF robotskog sustava je vrlo važan faktor opće stabilnosti robotske ruke.

Pokretačke tetive (engl. tendon-driven) stvaraju distribuirano višepogonsko djelovanje na geometrijske oblike robotske ruke po njenoj dužini (engl. distributed multi-drive actuation), te u praksi najučinkovitiji. Također, ovaj oblik djelovanja na zakrivljenost (engl. lateral deflection of a robot segment) je uvijek i velik dodatni uzrok nestabilnosti robotske ruke. Zato je nužno upoznati algoritam za optimizaciju zategnutosti u sustavu tetiva (engl. tensioning the tendons) kao načina harmonizacije tog podsustava, a što je ovdje prezentirano na temelju reference [17].

### 4.1 Stabilnost pogonskih sustava

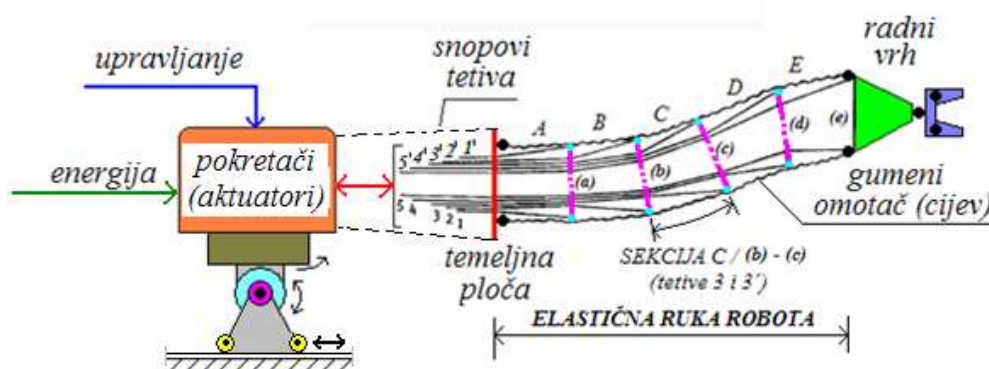
Tetive su čelične ili sintetičke niti/užad koji prenose sile stvorene u pokretačima u bazi robota (elektromotori ili hidraulični cilindri) za određene sekcije duž strukture robotske ruke na principu antagoniziranih parova, a radi njenog ciljanog savijanja u konture. Tetiva po pravilu ima onoliko koliko i pokretača (aktuatora), jer je svaki posebni podsustav za sinkronizirano djelovanje s ostalim takvim podsustavima za postizanje vremenski promjenljivih makrogeometrijskih oblika robotske ruke (engl. shape correspondence algorithm).

Ruke HDOF sustava su po pravilu građene u kontinuum verziji (engl. continous body structure), pa su to duge gibljive strukture s odgovarajućim radnim uređajem/alatom na vrhu. Ovakav jedinstveni dizajn artikuliranih robotskih ruku tipa HDOF ima sljedeća opća svojstva:

- To su mehanizmi s manjim brojem pokretača (aktuatora) u odnosu na stupnjeve slobode (engl. underactuated robots).
- Teorijski imaju beskonačan broj stupnjeva slobode i neograničenu pokretljivost u 3D prostoru u pogledu položaja i orijentacije (engl. infinite mobility), te bezbroj mogućih konfiguracija i mogućnosti s obzirom na prilagođavanje u nesređenim ambijentima (engl. cluttered areas).
- Algoritmi upravljanja za ove robote ne mogu adekvatno obuhvatiti sve specifičnosti ovih robota, kao što je nekonvencionalni dizajn, teorijski bezbroj parametara, te visok stupanj neodređenosti u dinamičkom modelu.
- Inverzni kinematički problem se svodi na postizanje vremenski sekvenciranih makrogeometrijskih oblika u 3D prostoru, a u vidu vremenski ovisne geometrije lanca zakrivljenih dijelova njegove centralne krivulje (engl. backbone curve).
- HDOF roboti za rad ruke u 3D prostoru mogu teorijski u manipulatorskoj varijanti imati tri vrste pokretača (aktuatora): električni motori, hidraulični i pneumatski cilindri.

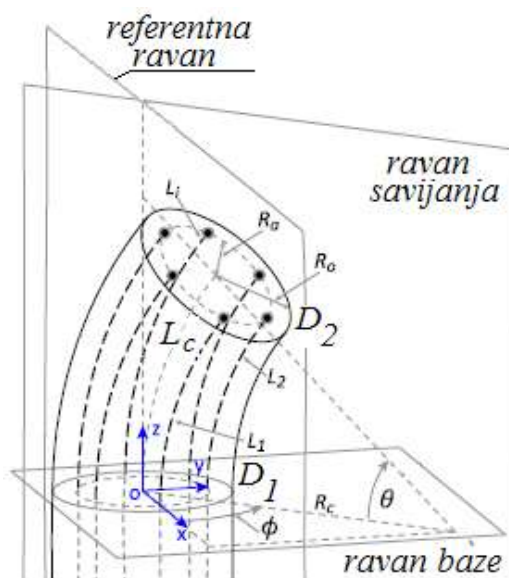
- Kako je smještanje pokretača u samoj ruci robota tehnički neizvodljivo, oni se grupiraju u nepokretnoj bazi, te najčešće preko tetiva (užadi, kablova) se sile njihovog djelovanja prenose do dijelova (sekcija) te ekstra-gibljive ruke stvarajući na njoj željene konture.
- Sustav antagoniziranih tetiva, a najmanje tri su potrebne za 3D prostor, sinhronizirano djeluje na geometrijske oblike ruke, povlačeći ili popuštajući (engl. push-pull) svaka na odgovarajući način potrebnom pojedinačnom silom na sekcije strukture stvarajući tako potrebne momente savijanja na određenom dijelu strukture robotske ruke.
- S obzirom na osovinu pokretača (npr. koračnih motora), tetive mogu biti aksijalno ili radijalno ugrađene (potezanje – popuštanje ili namatanje na osovinu).

Na Slici 4.1 je prikazan princip artikulacije HDOF robotske ruke pomoću sustava tetiva, gdje svaka grupa tetiva djeluje na jednu određenu sekciju strukture (A – E na slici), [16]:



Slika 4.1 Robotska HDOF ruka tipa kontinuum sa sustavom tetiva po sekcijama A-E

Pošto HDOF strukture zbog statičkih opterećenja i inercijskih efekata ne mogu imati ugrađene diskretne zglobove s pogonima, grupe pokretača su smještene u nepokretnoj bazi, pa se princip tetiva afirmirao kao dobro rješenje. Kako za rad ove gibljive robotske ruke moraju tetive prenositi relativno velike sile u kratkim vremenskim sekvencama, sustav tetiva je izrazito opterećen efektima trenja i habanja, te složenim vibracijama [17].



Slika 4.2 Jedna sekcija elastične robotske ruke sa sustavom tetiva

Na Slici 4.2 je dan shematski prikaz jedne sekcije HDOF fleksibilne robotske ruke tipa kontinuum (engl. cable-driven continuum robot) sa šest pokretačkih tetiva u ekvidistantnom rasporedu po obimu unutarnjeg dijela strukture (engl. periferan tendon routing) [17]. Sa učinkovitijim djelovanjem je sustav tetiva vođen centralnim dijelom robotske ruke (eng. centrally routed tendon), ali uz gubljenje nekih drugih prednosti.

U baznoj ravnini na Slici 4.2 je dan referentni koordinatni sustav xyz. Kut savijanja ove sekcije omeđene tvrdim diskovima  $D_1$  i  $D_2$  (engl. cable-guide disks, spacer disks) je  $\theta$ , a kut između referentne ravni i ravni u kojoj leži savijena konture je  $\emptyset$ . Dužina centralne linije ove sekcije robotske ruke je označena s  $L_c$ , a to je ujedno i rastojanje između graničnih diskova  $D_1$  i  $D_2$ . Dužina tetiva unutar analiziranog segmenta je  $L_i$ , računajući da ih u općem slučaju može biti  $n$ .

Kvazi-statički model opterećenja za HDOF robote s  $n$ -tetiva je izveden na temelju Euler-Lagrange-ove jednadžbe za generalizirane koordinate  $q$  polazeći od izraza:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i; i = 1,2,3 \quad (4.1)$$

gdje je  $V$  potencijalna energija, a  $Q_i$  generalizirana sila za glavne koordinate sustav  $q = [\theta \ \emptyset \ L_c]^T$ . Potencijalna energija ovog robotskog sustava, uz zanemarivanje djelovanja gravitacije, ima tri komponente:

- a)  $V_b$  je energija savijene strukture,
- b)  $V_a$  je energija usljed aksijalnog kompresionog (zbijajućeg) djelovanja tetiva na strukturu,
- c)  $V_t$  je energija u tetivama usljed njihove napetosti (ekstenzije).

Ova elastična struktura je pod djelovanjem tri komponente potencijalne energije koje se formiraju na temelju Euler-Bernoulli modela za elastičnu gredu/štap [29]:

- energija savijene strukture usljed djelovanja tetiva:

$$V_b = \frac{1}{2} \frac{EI}{L_0} \theta^2 \quad (4.2a)$$

- energija usljed aksijalne sile kompresije u strukturi:

$$V_a = \frac{1}{2} \frac{EA}{L_0} (L_c - L_0)^2 \quad (4.2b)$$

- energija usljed opterećenja tetiva:

$$V_t = \frac{1}{2} \frac{E_t A_t}{L_{t0}} \sum_{i=0}^n (L_{ti} - L_{t0})^2 \quad (4.2c)$$

gdje su:

- $E, I$  Young-ov modul i moment inercije,
- $\theta_p$  kut savijanja za bilo koju točku  $p$  duž robotske ruke jednak  $s \left( \frac{\theta}{L_0} \right)$ ,
- $s$  dužina između točke  $p$  i baze mjerena po luku centralne linije,
- $A$  presjek strukture,
- $u_p$  aksijalno kompresiono djelovanje od  $p$  pa duž centralne linije,
- $A_t$  poprečni presjek tetive,
- $E_t$  Young-ov modul tetiva,
- $u_{t_p}$  kompresiono aksijalno naprezanje od neke točke  $p_t$  duž djelovanja aktuatora na tetivu.

Na temelju referentnih upravljačkih ulaza pomjeranje aktuatora kao djelovanje na tetive je:

$$L_{ai} = L_0 - L_c + R_a \theta \cos(\alpha_i) + \delta_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

gdje je:

- $L_0$  inicijalna dužina robotske ruke,
- $\delta_i$  izduženje tetive usljed napetosti,
- $\alpha_i = \varnothing - 2\pi \frac{i-1}{n}; i = 1, \dots, n$ .

Kako bi ovaj segment robotske ruke bio aktivan s obzirom na generalizirane koordinate  $q = [\theta \quad \varnothing \quad L_c]^T$ , tri generalizirane sile u sustavu  $n$  – tetiva robota su:

$$Q_\theta = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{\partial L_{ai}}{\partial \theta} \right) \quad (4.4a)$$

$$Q_\varnothing = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{\partial L_{ai}}{\partial \varnothing} \right) \quad (4.4b)$$

$$Q_{L_c} = \sum_{i=1}^n \left( F_i \frac{\partial L_{ai}}{\partial L_c} \right) \quad (4.4c)$$

Kvazi-statični model za ovu robotsku ruku poketanu u općem slučaju s  $n$ - tetiva za tri stupnja slobode iz jednadžbi 4.4 a,b,c je:

- za kut savijanja:

$$\frac{EI}{L_0} \theta = Q_0 \quad (4.5a)$$

- za kut ravni savijanja:

$$0 = Q_\varnothing \quad (4.5b)$$

- za dužinu centralne linije strukture:



$$\frac{EA}{L_0} (L_c - L_0) = Q_{Lc} \quad (4.5c)$$

Ova grupa jednadžbi (4.5) daje vezu između reakcije robotske ruke u vidu savijanja i napetosti u tetivama u stanju kvazi-statičke ravnoteže.

Uspješan dizajn robotske HDOF ruke pokretane tetivama podrazumijeva iznalaženje kompromisnog rješenja između namjene robota i svih zahtijevanih performansi, te broja tetiva. Veći broj tetiva od 3, npr. 4 ili 6, za gibanje robotske ruke u 3D prostoru su pretpostavke za pouzdaniju stabilnost, bolju pokretljivost, veću preciznost i povoljniji raspored opterećenja, ali su to kompliciranije i neekonomičnije konstrukcije i za gradnju i za upravljanje.

U slučaju dizajna s tri tetive, tada tri stupnja slobode robota  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $L_c$  imaju nezavisno upravljanje, pa je sustav potpuno određen. U tom je slučaju opterećenost tetiva zavisna samo od konfiguracijskih parametara ruke:

$$F_i = \frac{EA}{3L_0} (L_c - L_0) - \frac{2EI}{3L_0 R_a} \theta \cos \alpha_i; i = 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

Za  $n$  tetiva u pogonskom snopu robotske ruke ( $n \geq 3$ ) uvodi se parametar  $k$  koji predstavlja aktivne, kontrolabilne stupnjeve slobode sustava, pa se na temelju jednadžbe (4.6) formira jedinstvena jednadžba:

$$F_i = \frac{E}{nR_a L_0} (AR_a (L_c - L_0) - (k - 1)\theta \cos \alpha_i) \quad (4.7)$$

gdje  $k$  ima vrijednosti:

$$k = \begin{cases} n, & n = 1, 2 \\ 3, & n \geq 3 \end{cases}$$

Kao što je prevelika zategnutost tetiva višestruko štetna, također je njihova slaba zategnutost (engl. slack tetive) razlog za nepreciznost i nestabilnost HDOF robotske ruke, kako slijedi iz jednadžbe (4.8):

$$F_{NS} = \frac{EI\theta}{L_0 R_a n} (k - 1)(1 - \cos \alpha_i); k \geq 2; i = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

Na temelju provedene analize se može formirati matrica Jacobian u zatvorenom obliku, što može biti korisno za upravljanje položajem kontinuiranog robota na temelju napetosti u tetivama.

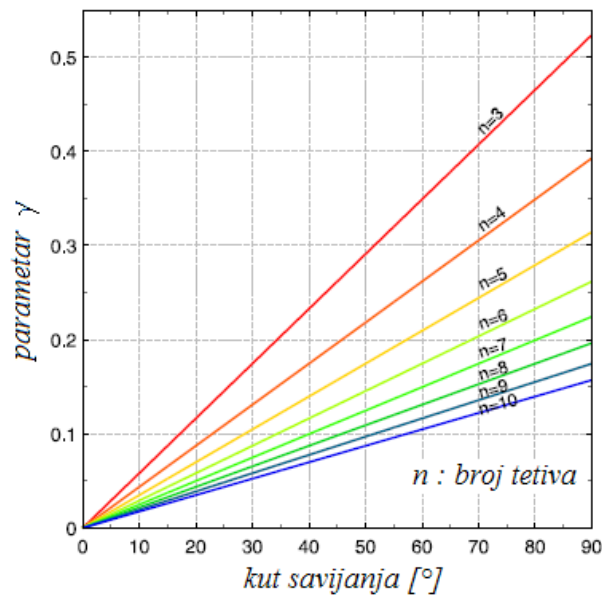
$$J_{F_i}(\theta, \phi, L_c) = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial(\theta, \phi, L_c)} \right]_{n \times 3} = \frac{E}{nL_0} \left[ \frac{-2I}{R_a} \cos \alpha_i \quad \frac{-2I}{R_a} \theta \sin \alpha_i \quad A \right]_{n \times 3}; i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

Maksimum opterećenje  $i$ -tetive u robotu sa  $n$ -tetiva ( $n \geq 2$ ) na ravni savijanja  $\phi_{F_{max}}$  za bilo koju vrijednost kuta savijanja  $\theta$  je:

$$F_{i_{max}} = -\frac{2EI}{L_0 R_a} \left( \frac{k-1}{n} \right) \theta = C_F \gamma \quad (4.10)$$

U jednadžbi (4.10) je parametar  $C_F$  konstanta koja obuhvata glavna konstruktivna svojstva robotske ruke, a varijabla  $\gamma$  je bezdimenzionalni parametar. On povezuje kut savijanja i broj tetiva s maksimalnim naprežanjem u slučajevima bez labavosti bilo koje tetive. To znači da taj parametar predstavlja efekt koji broj tetiva u robotskoj ruci stvara zavisno od njihova opterećenja.

Na Slici 4.3 je dan prikaz varijable  $\gamma$  iz jednadžbe (4.10) za kuteve savijanja  $\theta$  u rasponu od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  za robote s tri i više tetiva [23].



Slika 4.3 Zavisnost parametra  $\gamma$  od kuta savijanja i broja tetiva

Ovaj dijagram na Slici 4.3 ilustrira kvantitativni odnos broja tetiva ( $n$ ) i njihove napetosti bez labavosti u snopu, a za HDOF robotske strukture u funkciji kuta savijanja i neovisno o geometriji i materijalnim svojstvima robota. Sa Slike 4.3 se također može razumjeti da je manje opterećenje u tetivama ako ih ima više u sustavu, pa su vrijednosti  $\gamma$  niže za iste kuteve savijanja. Ali, u pogledu stabilnosti HDOF sustava više tetiva znači više negativnih efekata u vidu autoparametarskih oscilacija, te općenito slabiju stabilnost cijelog robota.

## 5 PARAMETARSKA STABILNOST

Svaka je redundantna robotska ruka jednostruki lanac brojnih elemenata (engl. serial robots), bilo da se radi o segmentiranoj strukturi na principu povezanih zglobova (engl. series of snake-like robots), bilo kontinuum verziji čije su sekcije građene bez diskretnih zglobova i veza (engl. backbone). Nije moguće u ovakvim konstrukcijama izbjeći elastičnost, jer su to nelinearne, nehomogene, duge i kompleksne strukture relativno malog poprečnog presjeka. Robotske HDOF ruke kontinuum tipa (engl. trunk-like robots) su u svim slučajevima tipični fleksibilni mehanizmi kojima se to neželjeno elastično svojstvo nastoji izbjeći pogodnim dizajnom i drugim mjerama, ali su to uvijek mehanički sustavi s manifestacijama prostornih fizičkih njihala.

Glavni uzroci oscilacija kod HDOF robotskih struktura su:

- elastičnost pokretačkog podsustava s tetivama, što znači lanca, pokretači (aktuatori), tetive, diskovi, ciljana sekcija robotske ruke, u svakom njegovom dijelu,
- elastičnost svih elemenata u konstrukciji (tetive, veze s diskovima, prolazak kroz diskove, itd.),
- postojanje labavosti u svim vezama (npr. povezanost distantnih diskova i gumenog omotača cijele ruke),
- postojanje mrtve zone u djelovanju tetiva (neizbježna labavost tetiva),
- autoparametrijske pojave (vibracije sustava tetive – distantni diskovi se prenose na gumenu omotač koji obuhvata u cjelinu sve unutrašnje komponente,
- promjena dužine robotske ruke u radnom prostoru mijenja sve bitne parametre: masu, krutost, prigušenje, itd.

Kod HDOF robota kao i kod drugih kompleksnih tehničkih sustava se mogu definirati sljedeće vrste parametara [18]:

- parametri koji se odnose na fizičke konstante ili zadane tehničke specifikacije, pa se zato smatraju fiksnim tijekom dinamičkih promjena u sustavu,
- upravljački parametri, koji se mogu precizno definirati i njima se može djelovati na sustav, npr. podešavanje visine napona za napajanje električnih uređaja,
- parametri koji se reguliranjem održavaju fiksnim, kao što je temperatura unutar omotača (gumene cijevi) ruke robota, jer promjena temperature mijenja napetost tetiva i prigušna svojstva gumene obloge.

Za sve dinamičke sustave, pa tako i za HDOF sustave, koji su izrazite kompleksnosti i dinamike ovisne o promjeni seta parametara, je važno istraživanje uloge promjenljivih parametara na temelju bifurkacijskih pojava [33], [34]. To je analitičko-grafički pristup, jer omogućuje definiranje asimptotskih stanja i njihove povezanosti, a ravnotežna stanja mogu biti u vidu točke, periodičke orbite ili kaotičnog atraktora – a što je posljedica promjena parametra definiranog kao kontrolni čije promjene vrijednosti mijenjaju i karakter dinamike sustava.

Ako je dinamički sustav opisan običnim diferencijalnim jednadžbama u obliku:

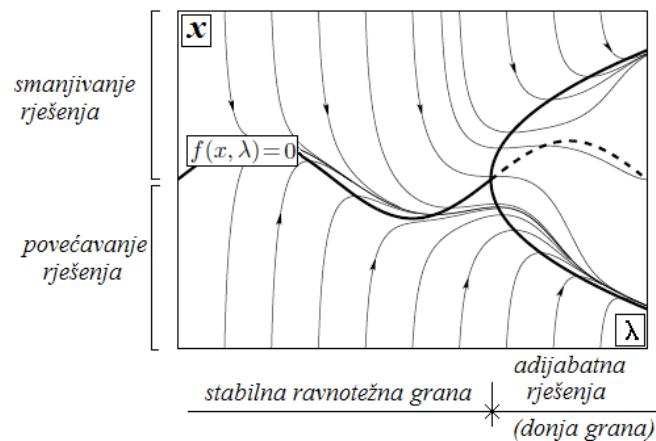
$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (5.1)$$

pri čemu je vektor dinamičkih varijabli  $x \in R^n$ , set parametara  $\lambda \in R^p$ , a funkcija  $f$  klase  $C^2$ . Spore promjene parametara sustava se mogu opisati funkcijom  $G(\varepsilon t)$ , pri čemu se  $\varepsilon$  označava kao adijabatski parametar (eng. adiabatic parameter), čija je vrijednost  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Uvođenjem funkcije  $G$  jednadžba (5.1) postaje:

$$\dot{x} = f(x, G(\varepsilon t)) \quad (5.2)$$

Od važnosti je za cijeli postupak da se za date funkcije  $f(x, \lambda)$  i  $G(\tau)$  sa uvedenim sporim vremenom  $\tau = \varepsilon t$ , odredi ponašanje (5.20) za adijabatsku granicu (engl. adiabatic limit)  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Na primjer, funkcija  $G(\varepsilon t) = \sin \varepsilon t$  opisuje periodičnu varijaciju parametra, s malom frekvencijom  $\varepsilon$ .

Elementi teorije Adijabatski invarijanti (eng. adiabatic invariants) se mogu uzeti radi analitičke prezentacije nužno sporog pomicanja robotske HDOF ruke u radnom prostoru. Na Slici 5.1 je ilustriran prikaz slučaja da u blizini ravnotežne grane bifurkacijskog dijagrama prema  $\varepsilon$  kretanje brze varijable postaje sporo, pa je to područje gdje mogu postojati adijabatska rješenja (eng. adiabatic solutions, slowly varying states).



Slika 5.1 Bifurkacijski dijagram za prikaz varijacija parametara

## 5.1 Autoparametarske oscilacije

Ako se iz nekog razloga jedan ili više parametara u diferencijalnim jednadžbama koje opisuju sustav pojavljuju kao koeficijenti ovisni o vremenu (engl. continuous time varying) takav je sustav podvrgnut parametarskom pobuđivanju. Mogu biti pri tome ti parametri kao promjenljive fizičke veličine biti masa, prigušivanje, krutost, temperatura itd., pa se tad javlja nestabilnost sustava u vidu parametarskih oscilacija, što znači onih koji nisu nastale vanjskim oscilatornim djelovanjima [19].

Dodatno, pojava rezonancije znači rast amplitude na temelju djelovanja oscilirajuće pobudne sile s frekvencijom  $\omega$ , i događa se pod ovim uvjetima:

$$\omega = \frac{2\omega_0}{n}, T = \frac{nT_0}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

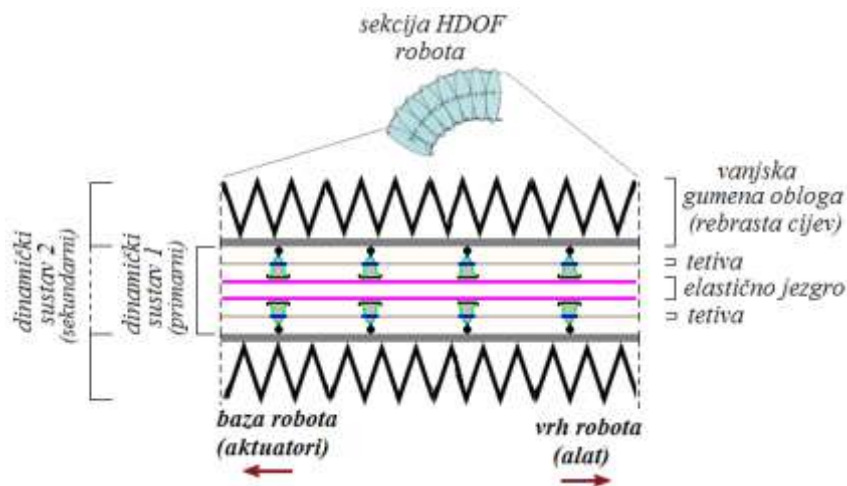
Ovo znači da parametarska rezonancija nastaje pri dvostrukoj promjeni parametra tijekom jednog perioda  $T$  prirodne frekvencije  $\omega_0$ , pa se tada ispoljava maksimalna energija u

oscilacijama sustava. Jednadžbe upravljanja za parametarsku pobudu su diferencijalne jednadžbe drugog reda s periodičnim koeficijentima, za koje nije moguće odrediti točna rješenja.

Parametarske oscilacije u HDOF sustavu su posljedica složene konstrukcije robotske ruke, pa se one u to cijelom sustavu (engl. compact robotic device) mogu modelirati tako da se cjelina strukture podijeli u dinamičkom smislu na dva dijela: pobudni (primarni, 1) podsustav, te pobuđeni (sekundarni, 2) dinamički podsustav [20].

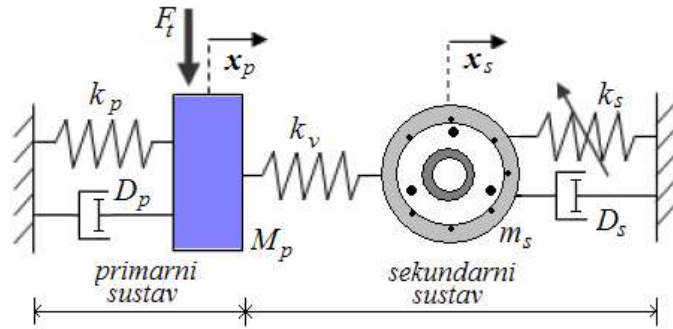
- Brzi, sinhronizirani rad sustava tetiva kojima se diktiraju lokalni i globalni geometrijski oblici robotske ruke u prostoru je aktivni uzbudni oscilatorni sustav  $F_t$  za ostale komponente u unutarnjem dijelu robotske ruke ( $M_p, D_p, k_p$ ), koji tako ima ulogu pobudnog (primarnog) sustava (1).
- Vibracije distantnih diskova (engl. cable-guide disks), centralne elastične cijevi u vidu dopunskog faktora krutosti (engl. mass backbone curve) i drugih elemenata unutrnje konstrukcije HDOF sustava kao primarnog sustava (1) se prenose na gumenu rebrastu cijev kao pobuđeni (sekundarni) sustav (2), ( $m_s, D_s, k_s$ ), koji taj cijeli sustav ruke fizički drži na okupu, daje mu glavna elastična svojstva i bitno određuje dinamiku cjeline (1) + (2).
- Između primarnog (1) i sekundarnog (2) je uvedena fiktivna vezna opruga  $k_v$  koja predstavlja element prijenosa vibracije sa (1) na (2).
- Gumeni omotač ruke (cijev) oscilira s promjenljivom krutošću  $k_s(t)$ , (engl. parametric excitation stiffness), što je posljedica različitih tlakova na njene unutarnje zidove usljed oscilacija primarnog sustava s kojim je cijev fizički povezana.

Na Slici 5.1 je na navedeni način predstavljena jedna sekcija HDOF robotske ruke, te njen simbolički uvećan prikaz u presjeku.



Slika 5.2 Presjek sekcije HDOF robotske ruke s uzbudnim tetivama te sustavima 1 i 2

Na temelju Slike 5.2 su prikazani glavni konstruktivni elementi robotske ruke, a na Slici 5.3 su shematski prikazane komponente koje uzrokuju parametarske oscilacije robotske ruke [20].



Slika 5.3 Shematski prikaz ruke HDOF sustava za analizu parametarskih oscilacija

Dinamičke jednadžbe za sustav sa Slike 5.3 su:

$$m_s \ddot{x}_s + D_s \dot{x}_s + k_s(t) x_s - k_v(x_s - x_p) = 0 \quad (5.4)$$

$$M_p \ddot{x}_p + D_p \dot{x}_p + k_p x_p + k_v(x_s - x_p) = F_t(t) \quad (5.5)$$

Ako se usljed oscilirajuće parametarske pobude aproksimira zakon promjene krutosti gumenog omotača ruke HDOF robota (na shemi opruga sa strelicom):

$$k_s(t) = k_s(1 - \varepsilon \cos \omega t) \quad (5.6)$$

onda sustav jednadžbi (5.4), (5.5) postaje:

$$m_s \ddot{x}_s + D_s \dot{x}_s + k_s(1 - \varepsilon \cos \omega t) x_s - k_v(x_s - x_p) = 0 \quad (5.7)$$

$$M_p \ddot{x}_p + D_p \dot{x}_p + k_p x_p + k_v(x_s - x_p) = F_t(t) \quad (5.8)$$

Ovaj sustav dinamičkih jednadžbi (5.7) i (5.8) formiran na temelju sheme sa Slike 5.2 se radi dobivanja konačne matrične jednadžbe u kompaktnom obliku svodi na formu:

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & M_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_s & 0 \\ 0 & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s(1 - \varepsilon \cos \omega t) - k_v & k_v \\ k_p & -k_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_t(t) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

U kompaktnoj matričnoj formi za dinamiku sustava s n – stupnjeva slobode se može i sustav (5.9) predstaviti diferencijalnom jednadžbom drugog reda:

$$M \ddot{x}(t) + D \dot{x}(t) + K x(t) = f_t(t) \quad (5.10)$$

gdje su  $x$  pomjeranja,  $M$  matrica masa,  $D$  matrica prigušenja,  $K$  matrica krutosti,  $f_t(t)$  pobudne sile. Prikazani postupak za parametarske oscilacije ruke HDOF robota se ne može zatvoriti rješavanjem diferencijalnih jednadžbi (5.7) i (5.8), nego se jedino može kompletirati mjerenjima, odnosno eksperimentalnim putem se moraju utvrditi:

- osciliranja pobudnih sila duž robotske ruke, a koje stvaraju tetive svojom dinamikom,

- bitna svojstva oscilacija, jer nije moguće egzaktno prikazati intenzitet i efekte parametarskih oscilacija kod HDOF sustava, a one zavise od konfiguracija tokom rada robota, te od ukupne dinamike njegove ruke,
- osnovnu krutost gumene cijevi, odnosno omotača robotske ruke, kao i raspone promjena njene krutosti kao funkcije vremena, a zbog djelovanja parametarskih oscilacija,
- rezonantne pojave kod ove strukture koje su od posebnog značaja za analizu stabilnosti.

U pokazanoj analizi [20] je jednačba (5.7) Mathieu tipa [21], što postupak analize stabilnosti komplicira, ali također ukazuje i na posebne oscilatorne fenomene za analizirani sustav u vidu autoparametarskih oscilacija. Ova jednačba predstavlja harmonijski oscilator promjenljive, odnosno vremenski ovisne vlastite frekvencije. Znači, radi se o klasi diferencijalnih jednačbi s promjenljivim koeficijentima koji su na oscilatoran način funkcije nezavisne varijable, što se može odnositi i na određene aspekte nestabilnosti kod HDOF sustava. One dakle opisuju fizikalne sustave čiji se parametri mijenjaju tokom vremena, kao što je težina aviona koja se zbog potrošnje goriva tokom leta mijenja, zatim se mogu primijeniti na pojave promjenljive gustoće neke materije tokom zagrijavanja, itd.

Kako kod HDOF sustava tokom rada u njegovom dinamičkom modelu mijenjaju brojni parametri, onda se određene manifestacije nestabilnosti mogu opisivati Mathieu-modelom. Također, primjer ovakvog oscilatornog sustava je njihalo čije se objesište periodično mijenja, npr. oscilira po sinusnom zakonu. Objesište oscilira dolje-gore i ima ulogu pobudnog sustava (1), a to kretanje izaziva sekundarnu pojavu u vidu njihanja njihala (2). Opći izraz za ovakve oscilatorne sustave je:

$$\ddot{x} + k(t)x = 0 \quad (5.11)$$

pri čemu ta ovisnost može biti oblika  $k(t + T) = k(t)$ , (Hill-ov model), ili vrijedi  $k(x) = \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos t)$ , pa je to Mathieu-ova jednačba čiji koeficijent  $x$  ovisi o vremenu  $t$

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos t)x = 0 \quad (5.2)$$

S ovim svojstvima jednačba (5.2):

- nema konstantne koeficijente,
- elementarne funkcije joj nisu rješenja,
- $\omega_0$  možemo smatrati odnosom vlastite frekvencije oscilatora i frekvencije smetnji,
- $\varepsilon$  je faktor smetnje i uzima se da je ona mala, odnosno da vrijedi  $\varepsilon \ll 1$ ,
- po pravilu se traže rješenja koja su stabilna s obzirom na vrijednost parametra  $\varepsilon$ , pri čemu je to običan oscilator ako vrijedi  $\varepsilon = 0$ .

Za ovu vrstu jednačbi ne vrijede rješenja u vidu  $Ce^{\lambda t}$ , nego se opće rješenje traži npr. u obliku redova potencija. U pokazanoj analizi parametarskih oscilacija u HDOF robotu usljed pobudnih oscilacija sustava tetiva, radi se o autoparametarskom fenomenu, jer pobuđeni sustav (primarni) djeluje na drugi (sekundarni), autoparametarski pobuđen sustav koji pod određenim uvjetima također oscilira. Za analizu stabilnosti HDOF robotske ruke u pogledu ovih uzroka, važno je istaknuti da ovakav autoparametarski sustav ne funkcionira uvijek, nego će za određene vrijednosti pobudne frekvencije i vrijednosti parametara primarni sustav

oscilirati, a sekundarni će mirovati. Pojava nestabilnosti tog stanja će značiti nastajanje autoparametarske rezonancije u sustavu, što znači da će i sekundarni sustav oscilirati sa znatno povećanom amplitudom.

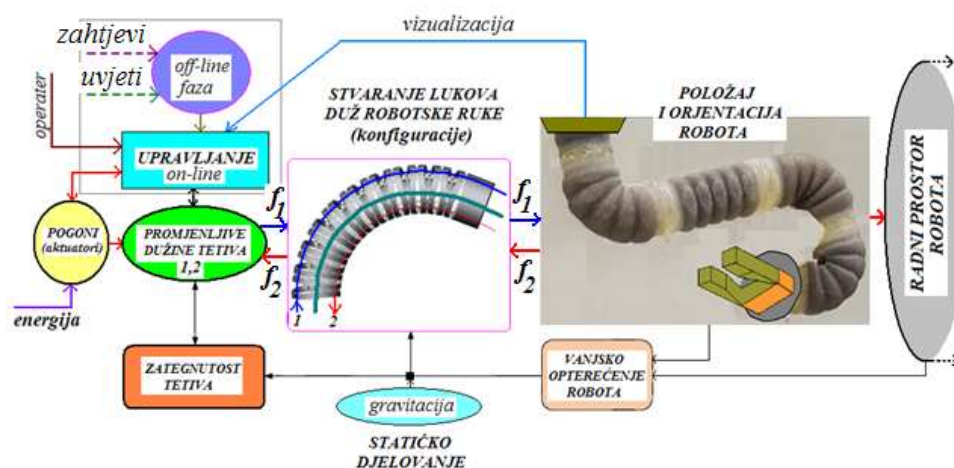
## 5.2 Veliki luk za HDOF ruke

Upravljanje kretanjem HDOF robota obuhvata simultanu kontrolu svih elemenata njegove dinamike. To znači:

- voditi ga kroz širi radni prostor do uže/ciljne radne zone,
- izbjegavati prepreke duž putanje,
- kontrolirati stabilnost ruke s obzirom na sile dodira s okolinom,
- kontrolirati stabilnost ruke s obzirom na teret i konfiguracije,
- podešavati brzinu i ubrzanje vrha u skladu sa očuvanjem stabilnog kretanja,
- očuvati stabilnost sustava s obzirom na promjene aktivne/angažirane dužine ruke u radnom prostoru kao glavnog kontrolnog parametra,
- nadzirati stabilnost sustava s obzirom na parametarske i autoparametarske oscilacije.

Iz navedenog se mogu izdvojiti dvije vrste oscilatornih odgovora HDOF sustava: prisilne i parametarske oscilacije [22]. Prisilne oscilacije se pojavljuju kad je ovaj dinamički sustav pobuđen periodičnim ulazom i opisuju se diferencijalnim jednadžbama s konstantnim parametrima. To je slučaj kad operater HDOF sustav pomjera naprijed – nazad mijenjajući tako dužinu ruke radi zaobilazanja neke prepreke. Ako je ova učestalost vanjskog pobuđivanja blizu prirodne frekvencije ovog sustava, koji je fizičko njihalo u prostoru, tada će sustav biti u rezonanci, pa će oscilirati s velikom amplitudom [23]. Parametarske oscilacije su rezultat postojanja vremenski promjenjivih (periodičnih) parametara u sustavu. U ovom slučaju sustav može ući u režim parametrijske rezonance s također velikom amplitudom oscilacija [21].

HDOF sustavi tipa makro-manipulator mogu imati ruke vrlo različitih izvedbi, ali se konstrukcija sa oblogom od rebraste gume, a koja ima višestruku ulogu, potvrdila kao najbolje rješenje. Za postizanje željene geometrije ovakve ruke je najpogodniji sustav antagoniziranih tetiva pokretanih iz aktuatorskog podsustava u nepokretnoj bazi [17]. Na Slici 5.4 je dan prikaz HDOF robotskog sustava koncipiranog na ovim pretpostavkama. Za postizanje prostornih konfiguracija ruke je potreban podsustav s najmanje tri tetive raspoređene po obodu unutrašnjeg kruga strukture na razmaku od 120°.



Slika 5.4 Prikaz HDOF sustava s dvije tetive



Iako su mehanizam unutar vanjskog omotača robotske ruke i omotač povezani, to su dva podsustava HDOF robota gdje su moguće i autoparametarske oscilacije. Do te pojave dolazi zbog brzog pomjeranja sustava tetiva koje upravljaju prostornom geometrijom robotske ruke, a prema zadatku i uvjetima ambijenta, što onda dovodi do toga da te unutarnje vibracije pobuđuju na osciliranje i vanjskog omotača [22]. Taj vanjski plašt robotske ruke ima ulogu sustava opruga, te bitno određuje elastičnost i prigušenje, te krutost robotske ruke [20], [23].

Autoparametarske oscilacije je dinamička pojava kad jedan sustav oscilira, pa pod određenim uvjeta pokrene i drugi na oscilacije. Primjer takvih oscilacija je kad sila harmonijske pobude  $f(t)$  na jednom po vertikali kliznom sustavu pokrene na njihanje i obješeno njihalo na tom sustavu. Ovo je čest primjer za Mathieu-ov dinamički model [21]. U ovom dijelu rada će se taj model primijeniti na oscilacije lučno postavljenog HDOF robota sa Slike 5.4, a analiza je temeljena na referenci [24].

Dinamika HDOF ruke robota kad je njen luk savijanja  $180^\circ$  (engl. large deflection dynamics) ima specifičnosti u odnosu na uobičajene pristupe analizi nelinearnih sustava, [23], [25], pa se zato definira [24] skup  $C$  mogućih konfiguracija u ravnini sljedećim parom:

$$C = \{ \{x(s), Q(s)\}: [0, L] \rightarrow R^2 \times SO(2) \} \quad (5.13)$$

gdje je  $x(s)$  položaj centralne linije fleksibilne strukture koja se analizira,  $Q$  je matrica orijentacije (rotacije),  $s$  je varijabla za parametrizaciju,  $L$  je dužina strukture.

Kad se za HDOF kontinuum robotsku ruku modeliraju potencijalna i kinetička energija, te definira rad u obliku:

$$W = \tau(t)\theta(L) \quad (5.14)$$

onda se temelju Hamiltonova principa  $\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_k - E_p + W) dt = 0$  formiraju dinamičke jednadžbe i granični uvjeti.

Pomicanje tetiva za stvaranje zakrivljenosti strukture elektromotorom kao pokretačem (aktuatorom) je dano jednadžbom:

$$J \frac{ra}{b} \ddot{\theta}(L, t) + B \frac{ra}{b} \dot{\theta}(L, t) + \frac{b}{r} F = \tau_m \quad (5.15)$$

gdje je  $J$  inercija rotacije pogonskog motora za tetive, reduktor  $r \gg 1$ ,  $b$  radijus diska za tetivu,  $\theta_m$  kut motora,  $\theta_p$  kut diska preko kojeg idu tetive,  $B$  je viskozno trenje,  $\tau_p = \frac{b}{r} F$  moment koji stvara silu  $F$  na tetivama,  $\tau_m$  moment motora.

Formira se algoritam za povratnu vezu za pogonski sustav:

$$\tau_m = -k_p \tilde{\theta}(L, t) - k_d \dot{\theta}(L, t) - k_c F \quad (5.16)$$

gdje je  $\tilde{\theta}(L, t) = \theta(L, t) - \theta_d$ , gdje je  $\theta_d$  željeni kut zakrivljenosti za strukturu, a  $k_p, k_d, k_c > 0$ .

Iz jednadžbe (5.16) se dobije granični moment:

$$\tau = aF = -J_{eff}\ddot{\theta}(L, t) - K_d\dot{\theta}(L, t) - K_p\tilde{\theta}(L, t) \quad (5.17)$$

Za praktične svrhe je podesniji oblik graničnog momenta kojeg motor razvija za tetive:

$$EI\dot{\theta}(L, t) + J_{eff}\ddot{\theta}(L, t) = -K_d\dot{\theta}(L, t) - K_p\tilde{\theta}(L, t) \quad (5.18)$$

Kod analizirane strukture se manifestiraju i aksijalne i radijalne vibracije tokom gibanja. Definiraju se dva uvjeta nakon linearizacije i primjene Ljapunovljevih kriterija za stabilnost:

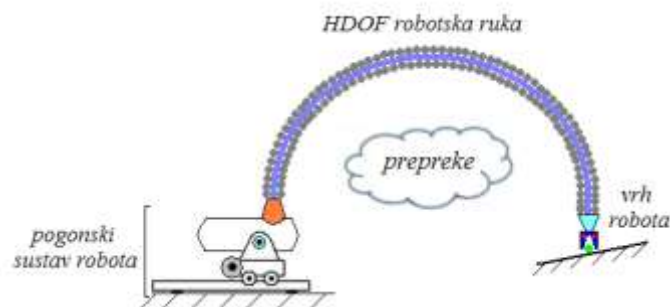
- $\omega \equiv 0$ , struktura je asimptotski stabilna,
- $\theta(L) \equiv 0$ , uvjet nema zatvoreno rješenje.

Frekvencija aksijalnih vibracija je:

$$\omega_{axial} = \frac{(2n + 1) \pi}{L} \sqrt{\frac{EA}{\rho_m}}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

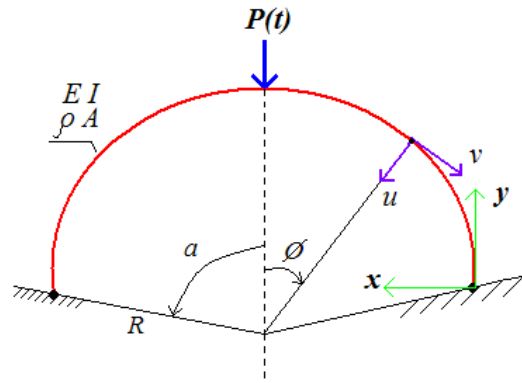
U praktičnim primjenama ova frekvencija ne zavisi od ravnotežnog položaja savijene strukture. Nelinearnosti HDOF sustava kao vrlo složene strukture su uzrok njegovih nasumičnih reakcija na periodično pobuđivanje. Ponašanje sustava je tada izuzetno osjetljivo na početne uvjete koji određuju temeljne tokove njegove komplicirane dinamike.

U ovoj analizi dinamike HDOF robotske ruke savijene u luk od  $180^\circ$  [24] su naznačeni i rezultati koji pokazuju stabilnost takve konfiguracije. A ako HDOF sustav formira takav luk tokom zaobilazanja velike prepreke u svom radnom prostoru, pa je uz to taj luk fiksiran na oba kraja. Na strani pogona (aktuatora) je to najčešće nužno, a na strani završnog uređaja robot se može hvataljkom fiksirati za neki predmet iz radnog prostora. Na Slici 5.5 je dan prikaz robotske ruke koja tijekom nekog zamišljenog manipulacijskog zadatka ima takvu lučnu konfiguraciju u prostoru.



Slika 5.5 Robotska ruka u velikom luku, te fiksiranim početkom i krajem

Robotska ruka u lučnom položaju sa fiksiranim krajevima se za analizu stabilnosti prikazane konfiguracije na Slici 5.5 aproksimira njenom centralnom linijom (engl. backbone curve) na način koji je prikazan na Slici 5.6:



Slika 5.6 Model za analizu vibracija savijene robotske ruke za 180°

Položaj robotske ruke kao na Slici 5.5 uz navedene uvjete je samo prividno u ravnoteži, jer napetost snopa upravljačkih tetiva dovodi do autoparametarskih oscilacija, pa se time može generirati vrlo složena dinamika cijele strukture pri ovako dubokom luku. Kako je svaka elastična deformacija složena od više povezanih elemenata krutosti (engl. associated stiffness), ovakva konfiguracija ima potencijalnu energiju od tri komponente:

- od savijanja u luk ( $E I$ ), (engl. bending stiffnes)
- aksijalnu (kompresijsku) komponentu ( $E A$ ), (engl. axial stiffnes)
- presječna krutost  $GA$  (engl. shear stiffnes).

Model HDOF sustava dan na slici ima radijus  $R$ , otvoreni kut  $2\alpha$ , a efekt parametarskih oscilacija se aproksimira harmonijskom silom  $P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$  pa se energija sustava ritmički mijenja. Kad se inercija sustava zanemari, uz neprigušene oscilacije s pobudnom silom, jednadžba sustava je:

$$\frac{EI}{R^4} \left[ \frac{\partial^5 u}{\partial \phi^5} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial \phi^3} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \right] + \rho A \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial \Delta q_v}{\partial \phi} - \Delta q_v \quad (5.20)$$

gdje je:

- $u = u(\phi, t)$  i  $v = v(\phi, t)$  radijalno i tangencijalno pomjeranje osi luka,
- $\phi$  je kut mjereno od osi simetrije,
- $E I$  konstanta krutosti,
- $\rho A$  masa po jedinici dužine luka kojim se aproksimira HDOF ruka robota.

Struktura jednadžbe (5.20) je:

- prvi izraz predstavlja unutarnje tangencijalne sile koje se javljaju tijekom savijanja osi luka,
- drugi dio na lijevoj strani jednadžbe predstavlja inercijalne sile,
- na desnoj strani su izražene dodatne sile koje nastaju tijekom savijanja.

Ako se pretpostavi da gubitak dinamičke stabilnosti sustava nastaje usljed nedefiniranog njegovog stanja, onda se to može izraziti kao:

$$\frac{\partial \Delta q_v}{\partial \phi} - \Delta q_v = \begin{cases} -\frac{P}{2R} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} (\sin \phi + \lambda \cos \phi) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} (\cos \phi - \mu \sin \mu) \right], \phi > 0 \\ -\frac{P}{2R} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} (\lambda \cos \phi - \sin \phi) - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} (\cos \phi + \mu \sin \mu) \right], \phi < 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Gdje je  $\psi$  povećanje presječne rotacije:

$$\psi(\phi, t) = (1/R)(\partial u / \partial \phi) + v \quad (5.22)$$

a  $\mu$  je definirano preko  $(x, y)$  koordinata osi luka:

$$\mu = \int_0^\alpha xy \, d\phi / \int_0^\alpha y^2 \, d\phi = \frac{4 \cos \alpha - 3 \cos 2\alpha - 2\alpha \sin 2\alpha - 1}{4\alpha + 2\alpha \cos 2\alpha - 3 \sin 2\alpha} \quad (5.23)$$

Aproksimirana sila  $P(t)$  uzrokovana autoparametarskim oscilacijama ne rotira, pa se izraz (5.52) za vrijednost  $\phi = 0$  može jednostavnije predstaviti u obliku:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left( \frac{\partial \Delta q_v}{\partial \phi} - \Delta q_v \right) d\phi = -\frac{P}{R} \psi(0, t) \quad (5.24)$$

Pretpostavimo da je os luka nekompresivna, što znači:

$$u(\phi, t) = \partial v(\phi, t) / \partial \phi \quad (5.25)$$

a također i:

$$u(\phi, t) = \bar{f}(t) \sin(\pi\phi/\alpha) \quad (5.26)$$

$$v(\phi, t) = -\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \bar{f}(t) (1 + \cos(\pi\phi/\alpha)) \quad (5.27)$$

Zamjenama u polaznoj jednadžbi (5.15) dobiva se linearni model:

$$d^2 \bar{f} / dt^2 + \omega_\alpha^2 (1 - P(t)/P_*) \bar{f} = 0 \quad (5.28)$$

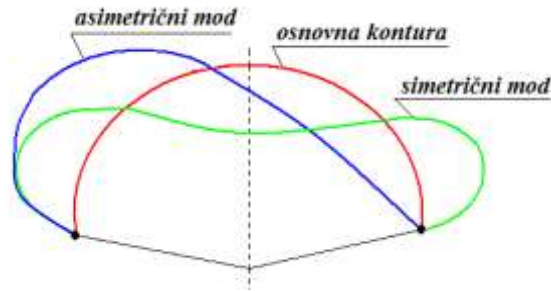
gdje je:

- $\omega_\alpha$  je pretpostavljena osnovna frekvencija slobodnih asimetričnih oscilacija,
- $M_0$  je cjelina mase gornjeg dijela luka,
- $P_*$  statičko opterećenje za savijanje konture/luka.

U prisutnosti malih simetričnih pomaka, jednadžba (5.57) mora se izmijeniti tako da uključi ukupnu silu koja se prenosi na gornji dio luka.

Jednadžba (5.28) opisuje amplitudu horizontalnih vibracija vijenca luka kad su zanemarene simetrične vibracije. Za pobudu  $P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$  dobiva se forma Mathieu–Hill jednadžbe [22], sa nestabilnošću za  $\theta = 2\omega_\alpha$  u ravni  $(0, P_t)$ . Za vrijednosti  $\theta \approx 2\omega_\alpha$  simetrična sila stvara nestabilnost u vidu asimetričnih vibracija. Na Slici 5.7 je ilustriran

prikaz osnovnih modova (engl. fundamental vibration modes) tijekom vibracija luka usljed vanjske harmonijske pobude i autoparametarskih oscilatornih efekata.



Slika 5.7 Osnovna kontura i dva moda vibriranja

Za dinamičke fenomene koji dolaze do izražaja kad HDOF robot u velikom luku premoštava prepreku, Slika 5.4, se na temelju modela sa slike (5.6) može istaknuti i ovo:

- U stvarnosti, amplitude ne rastu neograničeno kad je  $\theta \approx 2\omega_\alpha$ , kao što je predviđeno linearnim modelom (5.57). One postaju ograničene nelinearnostima, proizlazeći prije svega od drugog reda vertikalnih pomaka vijenca zbog antisimetričnih vibracija.
- Nedimenzionalno simetrično pomjeranje u se odnosi na statičku deformaciju položaja gornjeg vijenca luka, a  $\Omega$  označava frekvenciju pobude proporcionalnu osnovnoj linearnoj prirodnoj frekvenciji gdje  $\omega$  predstavlja odvajanje između simetrične i antisimetrične prirodne frekvencije.
- Aproksimacija granica dinamičke stabilnosti linearnog rješenja  $f = 0$  je dobivena zanemarivanjem nelinearnosti, pri čemu simetrična vibracijska komponenta je dana sa  $u_0 = A_0(q/m\omega^2 \cos(\Omega\tau - \theta_0))$ .
- Periodična rješenja jednadžbi modela:

$$\ddot{f} + 2\beta\dot{f} + (1 - m\omega^2 u)f = 0 \quad (5.29)$$

$$\ddot{u} + 22\beta\omega\dot{u} + \omega^2 u + \kappa(\dot{f}\dot{f} + f^2) = (q/m) \cos \Omega\tau \quad (5.30)$$

se nalaze nelinearnom perturbacijskom analizom i uvođenjem višestrukih skala (engl. multiple scales). Pokazalo se da rješenja u blizini i unutar primarne regije dinamičke nestabilnosti dominira primarna rezonanca  $\Omega = \omega$  i unutarnja rezonanca  $\omega = 2$ . Umjesto perturbacija oko primarne rezonancije  $\Omega = \omega$  za slabu ekscitaciju, učinkovitije je primijeniti perturbacije oko sekundarne rezonancije  $\Omega = 2$ .

- Stabilnost periodičnih rješenja je određena svojstvenim vrijednostima matrice Jacobian, vrednovane u fiksnim točkama. Posebna fiksna točka je nestabilna ako jedna svojstvena vrijednost ima pozitivan realni dio. Ispitivanje stabilnosti znači da se prvo riješi karakteristični polinom  $z^4 + r_1 z^3 + r_4 = 0$  i nađu svojstvene vrijednosti. Na temelju Routh-Hurwitz kriterija za postojanje realnog dijela korijena  $r_i$  su bitne nejednakosti  $r_4 < 0$ ;  $r_1 r_2 - r_3 < 0$ ;  $r_3(r_1 r_2 - r_3) - r_1^2 r_4 < 0$ , pa ako su ti uvjeti zadovoljeni, nelinearno rješenje je nestabilno.

Asimetrične vibracije se opisuju jednadžbom:

$$\ddot{f} + 2\beta\dot{f} + [1 - qA_0 \cos(\Omega\tau - \theta_0)]f = 0 \quad (5.31)$$

koja se transformira u Mathieu-Hill jednadžbu:

$$\frac{d^2 f}{d\tilde{\tau}^2} + 2\tilde{\beta} \frac{df}{d\tilde{\tau}} + (\tilde{\omega} + 2\tilde{q} \cos 2\tilde{\tau})f = 0 \quad (5.32)$$

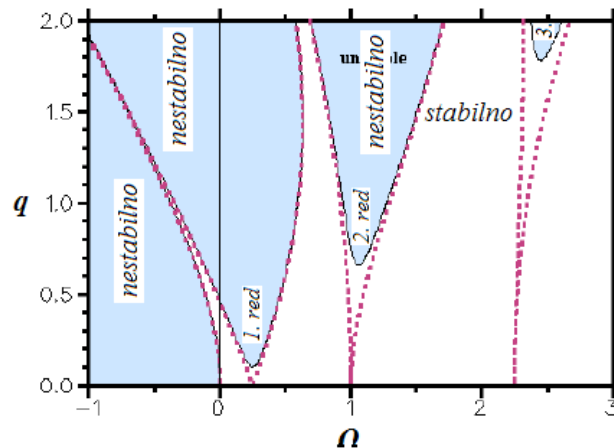
Aproksimacija drugog reda za glavnu granicu dinamičke nestabilnosti jednadžbe (5.31) je:

$$\tilde{\omega}_* = 1 \pm \sqrt{\tilde{q}^2 - 4\tilde{\beta}^2} - \frac{1}{8}\tilde{q}^2 \quad (5.33)$$

Ili u punom obliku s originalnim varijablama:

$$q_* = \Omega \sqrt{2[(1 - (2\Omega/\omega)^2)[5\Omega^2 - 4 - 2\Omega\sqrt{6\Omega^2 - 8 - 4\beta^2}]} \quad (5.34)$$

Granice nestabilnosti na temelju jednadžbe (5.32), a prema općem obliku prikaza zona stabilnosti za Mathieu-Hill jednadžbe dane su na Slici 5.8 za mala prigušenja [39]. Ovaj takozvani autoparametarski slučaj vibracija je posebno opasan u pogledu stabilnosti, jer vrlo male nestabilne vibracije mogu pobuđivati opterećenja prilično širokog frekvencijskog pojasa.



Slika 5.8 Opći prikaz područja stabilnosti za Mathieu-Hill jednadžbu (5.32)

U ovom kratkom prikazu je dokazano za HDOF robot u konfiguraciji koja znači duboki luk njegove ruke od baze do vrha, da to generira unutarnju rezonanciju dva i jedan kod nižih modova simetrične i antisimetrične vibracije. To znači da nelinearna modalna interakcija može u potpunosti dominirati dinamičkim odgovorom, čak i kod ekstremno malih razina njegovih pobuda. U ovom radu [24] se efekti takvih nelinearnosti proučavaju u okviru perturbacijske analize [18], koja pokazuje da se pojavljuju razine i frekvencije pobude koji zauzimaju značajna područja u primarnim područjima dinamičke nestabilnosti [25].

## 6 STABILNOST HDOF SUSTAVA

Stabilnost je osnovni uvjet za radnu održivost i korisnost svakog sustava u dužem vremenskom periodu, od biološkog i tehničkog do političkog i ekonomskog. Stabilnost je također najvažnije i najnužnije kvalitativno svojstvo automatskih sustava upravljanja, a posebno je važno za HDOF sustave kao fleksibilne strukture. Nekontrolirane, odnosno neprigušene oscilacije strukture, a posebno vrha robotske ruke, takve sustave čini neupotrebljivim [26].

Mehaničke vibracije industrijskih manipulatora nisu u osnovi velik problem, ali za regularni rad redundantnih i hiper-redundantnih robotskih ruku nestabilnost je velika prepreka za njihovu afirmaciju u industriji. Zato su oscilacije tokom rada, a posebno ako je u pitanju veća dužina ruke i teret na vrhu odavno i vrlo izraženo u fokusu istraživača. Glavnina tih metoda vezanih za fleksibilnost i oscilacije robotskih manipulatora se temeljila na klasičnim jednadžbama dinamike. Novi trendovi u robotici su zahtijevali i nove metode koje zadovoljavaju zahtjeve u pogledu analize nestabilnosti fleksibilnih robotskih struktura, kao što su to kontinuum-manipulatori (eng. continuum manipulators) [29].

Tako razne nove metode i matematički alati u teoriji nelinearne dinamike pružaju nove mogućnosti za analizu dinamike i upravljanja općenito nelinearnim dinamičkim sustavima, a što se odnosi i na robotske manipulatore kojima je fleksibilnost neizbježno svojstvo. Pomoću teorije bifurkacija, spektra Ljapunovljevih eksponenata, Poincaré-ovih karti, modeliranja na bazi Teorije konačnih elemenata, itd., se efikasnije istražuju manifestacije nelinearne dinamike u širokom spektru sustava [27]. Za fleksibilne robote koji su neizbježno nestabilni, kaotične vibracije kao izraz krajnje nestabilnosti mogu potpuno onemogućiti njihov rad.

Analiza stabilnosti svakog robotskog manipulatora se općenito sastoji od identifikacije utjecaja parametara modela manipulatora na njegovo ukupno ponašanje [21], [32]. Opći parametri robotskih sustava mogu podijeliti u tri grupe:

- parametri vezani za dinamiku završnih uređaja/ alata na vrhu robotske ruke,
- parametri trajektorija,
- parametri koji karakteriziraju krutost i prigušenje.

Parametri svojstveni visokogibljivim HDOF robotskim strukturama promjenama stvaraju parametarske i autoparametarske vibracije, uz pojave tako izazvanih rezonancija.

### 6.1 Stabilnost po Ljapunovu

Najsveobuhvatniju teoriju stabilnosti je izgradio ruski matematičar A. M. Ljapunov 1892. godine, a primjenjiva je na linearne i za nelinearne sustave. Koncept stabilnosti po Ljapunovu se odnosi na analizu ponašanja sustava u okolini ravnotežnog stanja. Teorija Ljapunova se primjenjuje na širok spektar stabilnosti i sustava modeliranih varijablama stanja, a najvažniji oblici stabilnosti su: lokalna stabilnost, globalna stabilnost, lokalna asimptotska stabilnost, globalna asimptotska stabilnost, uniformna stabilnost i eksponencijalna stabilnost [27].

Ljapunova teorija ima dva glavna pristupa analizi stabilnosti dinamičkih sustava opisanih običnim diferencijalnim jednadžbama. Prvi je metod linearizacije, u kojoj se stabilnost nelinearnog sustava ispituje analizom stabilnosti linearnog modela, koji se postiže

linearizacijom nelinearnog sustava u blizini stanja ravnoteže. Ovom metodom može se analizirati lokalna stabilnost nelinearnog sustava (engl. stability in the small), a nakon rješavanja diferencijalne jednačbe i analize rješenja. Metoda linearizacije se koristi pri primjeni teorije linearnih sustava na nelinearne procese, posebno u slučajevima kada se radi o pojavama lokalnih pomjeranja iz radne točke i postojanju jedinstvenog stanja ravnoteže [28], [29].

Težište ove prve metode Ljapunova je u računanju korijena karakteristične jednačbe oblika  $\det(A - \lambda I) = 0$ , što znači sopstvenih vrijednosti matrice stanja A.

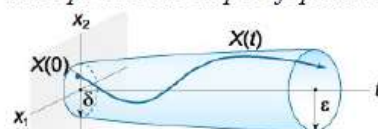
Druga metoda Ljapunova je općenitija algebarska metoda i ne zahtijeva poznavanje rješenja diferencijalne jednačbe. Poznata je kao direktna metoda, te nije ograničena samo na lokalnu stabilnost. Ovom metodom radi se indirektna analiza stabilnosti i to analizom vremenskog ponašanja skalarne funkcije koja se adekvatno formira na principu energije za zadati sustav (engl. measure of energy), ali koja mora ispunjavati i određene uvjete.

Stabilnost ravnotežnog stanja linearnog sustava ne ovisi ni o početnim uslovima ni o vanjskim pobudama koje djeluju na sustav, već je ovisna isključivo o parametrima tog sustava. Stabilnost ravnotežnog stanja nelinearnog sustava uglavnom ovisi o parametrima tog sustava, o početnim uvjetima, kao i o obliku i veličini vanjske pobude koja djeluje na njega [28].

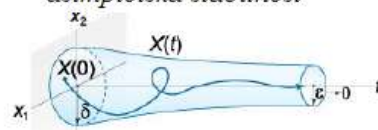
Iako nije jednostavna za inženjersku praksu, teorija stabilnosti po Ljapunovu je u robotici vrlo dragocijen alat za ispitivanje stabilnosti.

Najveću važnost u izučavanju stabilnosti robotskih sustava ima sveobuhvatni Ljapunovljev koncept, koji je na više načina primjenjiv na linearne i nelinearne sustave, a na Slici 6.1 je prikazana osnovna ideja, te iz nje izvedene dvije temeljne vrste stabilnosti [30].

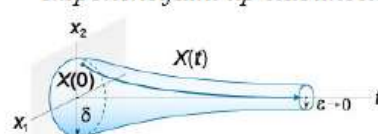
*koncept stabilnosti po Ljapunovu*



*asimptotska stabilnost*



*eksponecijalni tip stabilnosti*

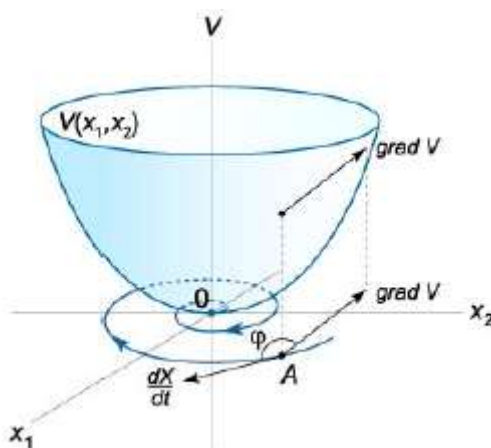


*Slika 6.1 Prikaz koncepta stabilnosti po Ljapunovu, te dva posebna slučaja*

Asimptotski stabilan sustav imat će takvo rješenje homogene diferencijalne jednačbe koja ga opisuje, da će bez obzira na početno stanje za  $t \rightarrow \infty$  težiti nuli. Matematički opis tog važnog svojstva asimptotske stabilnosti dinamičkih sustava je po Ljapunovljevoj teoriji stabilnosti sadržan u njegovoj direktnoj metodi. Na taj se način nekom sustavu u prostoru stanja pridruži odabrana funkcija povezana s njegovom energijom (engl. relate the physical energy), koja će



se gibati prema ravnotežnoj točki u ishodištu, te potvrdi asimptotsku stabilnost istraživanog sustava, kao što je to prikazano na Slici 6.2 [30].



Slika 6.2 Funkcija Ljapunova  $V(x_1, x_2)$  sa svojstvima energije za određivanje stabilnosti sustava

Kad se radi o industrijskim manipulatorima, analiza stabilnosti upravljačkog algoritma po Ljapunovu se temelji na teoremu po kojem je brzina promjene kinetičke energije u mehaničkom sustavu jednaka snazi koju daje vanjski izvor [32]. Dinamika za klasične, neredundantne robote s  $n$  stupnjeva slobode se opisuju matričnim sustavom od  $n$  jednadžbi:

$$H(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (6.1)$$

gdje je  $q$   $n$ -dimenzionalni vektor položaja u prostoru zglobova,  $H$  matrica inercije,  $b$  predstavlja Coriolis – ovu i centripetalnu silu,  $g$  je gravitacijsko djelovanje, a  $\tau$  je vektor ulaznih momenata od pokretača (aktuatora). Ako se za ovaj robotski sustav formira algoritam za upravljačku PD jedinicu u obliku  $\tau = -K_D\dot{q} - K_Pq + g(q)$ , onda nije moguće formirati energetska funkciju Ljapunova, niti pokazati da  $\dot{q} \rightarrow 0$  i  $q \rightarrow 0$ .

Zato se formira funkcija-kandidat Ljapunova u obliku  $V = \frac{1}{2}[\dot{q}^T H \dot{q} + q^T K_P q]$  kao zbroj kinetičke i potencijalne energije. Derivacija ove funkcije je  $\dot{V} = \dot{q}^T(\tau - g) + \dot{q}^T K_P \dot{q}$ , odnosno  $\dot{V} = -\dot{q}^T K_P \dot{q}$ , čime se dokazuje globalna asimptotska stabilnost robotskog regulatora za položaj vrha robota.

Iz navedenog primjera za stabilnost upravljačkog PD algoritma za klasične (industrijske) robote (tipično:  $n = 5$  ili  $n = 6$ ) se vidi koliko je korisno u analize uključivati stvarna fizička svojstva sustava. Također, adekvatno korišten princip energije za analize stabilnosti po Ljapunovu je glavni preduvjet za inženjerski uspjeh u robotici u kojoj inače najbolje funkcioniraju klasična teorija i praksa.

Posebno je spektar eksponenata Lyapunova moćan alat za analizu nelinearne dinamike sustava, jer vrijednosti tih eksponenata ilustriraju eksponencijalnu divergenciju ili konvergencija putanje koju stvara sustav tokom vremena. Ti eksponenti opisuju logaritamsku mjeru osjetljivosti dinamičkog sustava na proizvoljne male promjene početnih uvjeta, a koji značajno utječu na tok i općenito karakter sustava tijekom vremena [28], [30].

Važnost Ljapunovljevih eksponenata za analizu stabilnosti sustava širokog spektra je velika, ali je njihovo izračunavanje dugotrajan i općenito složen analitički postupak. Naročito se to odnosi na sustave sa više stupnjeva slobode. U većini slučajeva je zato nemoguće izravno upotrijebiti ovaj izuzetno koristan alat za analizu stabilnosti nekog sustava [29].

## 6.2 Granice stabilnosti

Metoda za analizu vibracija manipulatora i nelinearno upravljanje robotskim sustavima na temelju analiza stabilnosti na bazi karata sa definiranim regijama nelinearnog i lineariziranog sustava u realnom vremenu, je jedna efikasna metoda u primjeni na robotske sustave, pa je ovdje ukratko predstavljena [30]. Cijeli je postupak oblik primjene koncepta stabilnosti po Ljapunovu, a temeljen na formiranim kartama stabilnosti (eng. stability maps) koje postaju opredjeljujuće za utvrđivanje stabilnosti [31].

To podrazumijeva da se prvo odrede kritične vrijednosti parametara manipulatora, one za koje dolazi do promjene stabilnosti, tj. pojave bifurkacija, a koje znače da sustav mijenja dinamiku, odnosno stabilnost. Određivanje spektra Ljapunovljevih eksponenata i mapa Poincaré-a, tako vode definiranju asimptotskog ponašanje toka faze sustava u susjedstvu putanje nakon perturbacija [33]. Tako jednadžbe perturbacija omogućuju određivanje nelinearne regije stabilnosti tokom gibanja manipulatora u radnom prostoru.

U ovoj metodi je kombiniran jednostavniji i učinkovitiji pristup koji za polazište uzima linearnu stabilnost manipulatora, izračunavajući tako u stvarnom vremenu svojstvene vrijednosti Jacobian matrice u bliskoj okolini točke perturbacije pri nominalnom gibanju manipulatora. Kao rezultat toga je onda moguća usporedba stabilnih regija nelinearnog, polaznog sustava i njegova lineariziranog oblika, a što vodi određivanju njihovih zajedničkih dijelova u vidu podoblasti. Time se određuje i rasponi pripadajućih parametara sustava bitnih za stabilnost sustava.

Tako se upravljanje robotskim sustavima bazirano na svojstvu stabilnosti, temelji se na odabiru odgovarajućih kontrolnih parametara za koje manipulator ostaje u podregiji stabilnosti. U realnim primjenama, za pretpostavljene raspone perturbacija, definirane podregije stabilnosti pohranjene su u memoriji upravljačkog sustava u obliku zbirke karata, te su tako raspoložive i on-line.

Istraživanje svojstava parametara za koje je robotski sustav nestabilan po ovoj se metodi zasniva na analizi autonomne jednadžbe kretanja:

$$\dot{q} = F(q, \varepsilon) \quad (6.2)$$

gdje je  $q$  vektor stanja, odnosno generaliziranih kordinata ( $q \in R^{2n}$ ),  $\varepsilon$  vektor parametara ( $\varepsilon \in R^m$ ), a funkcija/vektorsko polje  $F$  je definirana sa  $R^{2n} \times R^m$ . Uvodi se vektor perturbacija:

$$\psi(t) = q_p(t, \delta) - q(t, \varepsilon) \quad (6.3)$$

gdje je  $\varepsilon \in \delta$ , a  $\delta$  je vektor parametara sa perturbacijom. Udaljenost rješenja za kretanje manipulatora sa perturbacijom u odnosu na nominalnu putanju je  $y(t)$ :

$$Y = [\psi_1, \dot{\psi}_1, \dots, \psi_i, \dot{\psi}_i, \dots, \psi_n, \dot{\psi}_n]^T \quad (6.4)$$

Korekcija putanje kod odstupanja se postiže vektorom kompenzacije koji znači set parametara upravljačkog sustava:

$$\Delta = [u_1, \dots, u_n]^T \quad (6.5)$$

Tako se uzimanjem u obzir (6.3) dobije dinamička jednačba sustava sa perturbacijom:

$$\dot{y} = Ay + B\Delta + N \quad (6.6)$$

Moguće je nadoknaditi nominalno gibanje robota kroz nazivne momente pogonskih sustava. U tom je slučaju je:

$$\dot{y} = G(y, q, \dot{q}, \ddot{q}, \varepsilon, \Delta) \quad (6.7)$$

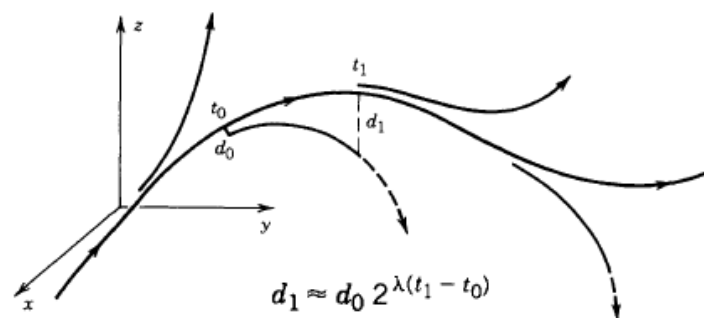
Rješenje ovog oblika, gdje je  $G \in R^{2n} \times R^n \times R^n \times R^m$ , korespondira sa gibanjem pod perturbacijom.

Stabilnost sustava u smislu teorije Ljapunova za gibanje vrha robota se razmatra kroz analizu stabilnosti jednačbi sa uvedenom perturbacijom, a koje su funkcije  $\varepsilon, \Delta$  u vidu uvjeta  $y = 0$ . Lyapunov eksponenti su asimptotske vrijednosti definirane lokalno u prostoru stanja, i opisuju eksponencijalnu brzinu kojom poremećaji na putanji sustava rastu ili propadaju s vremenom na određenom mjestu u prostoru stanja. Ovi se eksponenti definiraju u obliku:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, i = 1, \dots, 2n \quad (6.8)$$

pri čemu su svi  $m_i$  svojstvene vrijednosti matrice osnovnih lineariziranih rješenja jednačbi sa perturbacijom. Lyapunov eksponenti su globalne veličine povezane s atraktorom, iako su definirane samo lokalno u prostoru stanja. S ove točke gledišta se metoda analize ponašanja sustava se može tretirati kao nelinearna.

Na Slici 6.3 je dana interpretacija principa formiranja Ljapunovljevih eksponenata  $\lambda_i$  [34]:



Slika 6.3 Koncept stabilnosti za formiranje Ljapunovljevih ekponenata

Ovdje opisivana metoda počiva, dakle, na formiranju i korištenju karata stabilnosti nelinearnih dinamičkih sustava. Za robote, te su karte napravljene u funkciji skupa

parametara ( $\varepsilon$ ) koji određuju tri aspekta njihove dinamike. Iako linearizacija pomaže utvrditi je li perturbacija točka stabilna ili ne, ne daje podatke o veličini tog domena gdje uvjeti stabilnosti vrijede [30], [31].

### 6.3 Krutost i prigušenje HDOF sustava

Općenito se analiza krutosti kod zglobnih mehaničkih sustava robotskih ruku može podijeliti u nekoliko faza [34]:

- nelinearno modeliranje krutosti koje uključuje računanje odnosa primijenjene sile i otklona za vanjska opterećenja, uzimajući u obzir unutarnje prednaprezanje i provjeru stabilnosti ravnoteže za odgovarajuće konfiguracije,
- linearizacija relevantnih odnosa sile i otklona u okruženju ove ravnoteže i računanje odgovarajuća matrica krutosti koja općenito može biti singularna zbog prisutnosti pasivnih zglobova u mehanizmu,
- određivanje kritičnih sila koje mogu prouzrokovati neželjene pojave savijanja ili nagle promjene postojeće radne konfiguracija opterećenog manipulatora.

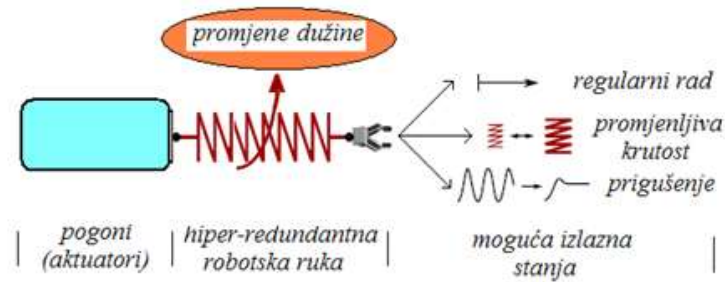
Praktičnu vrijednost HDOF sustav može imati ako posjeduje upravljiva svojstva za ciljanu promjenu prostorne geometrije svoje elastične strukture (engl. elastomechanical structure). Uz te uvjete u svojstvu manipulatora može biti koristan u vrlo uskom području specijalnih primjena, kao što je npr. uloga makro-endoskopa u inspekcijskim aktivnostima unutar zatvorenih dijelova nuklearnih postrojenja. Dodatni je uvjet da bi te radnje HDOF sustav obavljao uspješnije od nekog mobilnog robota ili teleoperatorskog sustava [35].

U svakom bi slučaju početna radna faza HDOF robotskog manipulatora bila pomicanje ruke po krivudavoj putanji između prepreka poput velike mehaničke zmijske do određene radne zone. U drugoj fazi bi se odvijale planirane radnje u radnoj zoni kao uskom, ciljanom radnom području. U oba slučaja bi se krutost manipulatora kao mehaničkog sustava mijenjala (engl. elastic modulus EI). To znači da bi prigušenje HDOF strukture također moralo biti vremenski promjenljivo (engl. time-varying damping) najviše zbog promjene efektivne dužine robotske ruke i pojave vibracija [32], [34].

Krutost se kod elastičnih robotskih ruku općenito mijenja zbog specifičnih konfiguracija, dodira sa okolinom i tereta na vrhu [36]. Također, usljed promjene temperature radnog ambijenta robota, te porasta temperature u unutarnjim podsustavima usljed trenja i vibracija (rad tetiva), mijenja se i krutost cijele strukture po dužini (engl. flexural rigidity of a beam) [38].

Posebna kategorija aktivne, podesive krutosti se primjenjuje kod nekih elastičnih struktura u medicinskoj instrumentaciji (engl. tunable stiffness). To znači da bi tijekom pomicanja strukture kroz tijelo pacijenta ona morala imati maksimalnu mekoću i gibljivost (engl. low stiffness during robot navigation), a onda ukrućena radi kirurškog zahvata na planiranom mjestu (engl. high stiffness during tissue manipulation).

Na Slici 6.4 je prilagodljivom oprugom simbolički predstavljena elastična robotska ruka čiji se fizički parametri mijenjaju tijekom aktivnosti robota, pa su naglašena tri moguća stanja te strukture: regularni rad, promjenljiva krutost i nužnost prigušenja.



Slika 6.4 Promjenljivost fizičkih parametara HDOF robotskog sustava

Za analizu dinamičkih svojstava robota sa elastičnim radnim strukturama (ruke, krakovi) ne postoje egzaktne postupci, nego se jedino vrlo parcijalno i vrlo približno mogu matematički opisati neki aspekti njihove vrlo složene nelinearne dinamike [33].

Opći linearni oscilator je koristan model za ispitivanje nekih elemenata nelinearne dinamike složenih sustava, tretirajući pri tome točkaste atraktore koji predstavljaju najjednostavniji oblik konačno-vremenskih ponavljajućih ponašanja. Takav jednostavni disipativni ustav sa masom  $m$ , koja je vezana sa elastičnom oprugom krutosti  $c$  i sa prigušivanjem  $b$  koji pruža linearnu viskoznu silu za suprotstavlje brzini, ima jednadžbu gibanja [34], [39]:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (6.9)$$

za koju se rješenje može pretpostaviti u obliku  $x = Ae^{\lambda t}$ , pa se iz rješenja  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  pripadajuće karakteristične jednadžbe  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  analiziraju specifični oblici dinamike. Korijeni diferencijalne jednadžbe (6.9) su:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4c)}}{2} \quad (6.10)$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4c)}}{2} \quad (6.11)$$

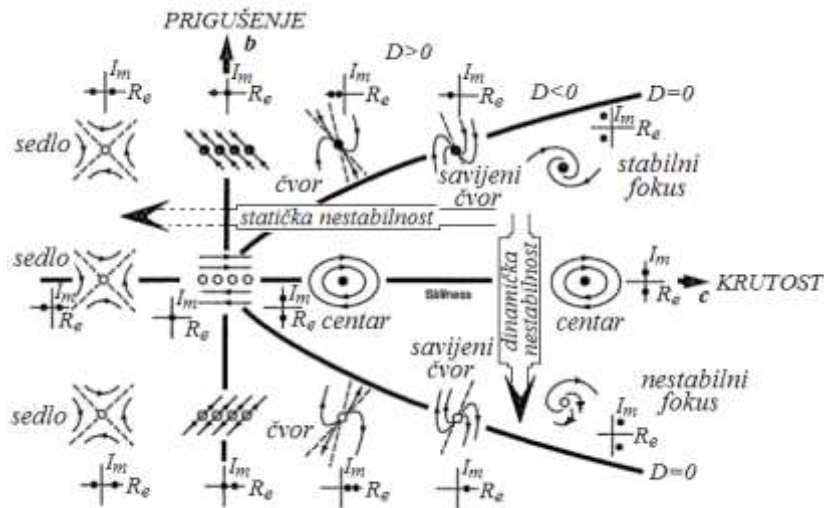
Diskriminanta  $D = b^2 - 4c$  sadrži vezu prigušenja i krutosti, pa njen predznak određuje dinamiku analiziranog linearnog sustava. Tako u slučaju njene pozitivne vrijednosti ( $D > 0$ ) postoje dva različita korijena koja daju pretpostavljena eksponencijalna rješenja:

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (6.12)$$

sa konstantama  $A_1$  i  $A_2$  čije vrijednosti definiraju početni uvjeti.

Za slučaj negativne diskriminante u rijenima za sustav ( $D < 0$ ) postoje dva kompleksno-konjugirana rješenja  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  i moguće rješenje  $x = e^{\sigma t} \sin \omega t$ . Ukoliko bilo koje rješenje ima pozitivan realni dio ( $\sigma > 0$ ), ovaj oscilatorni sustav je nestabilan.

Njegovo ponašanje je sistematizirano na temelju prirode ravotežnih točaka ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ), pa su dani odgovarajući fazni portreti, te pripadajući položaji realnih ( $R_e$ ) i imaginarnih ( $I_m$ ) točaka [33], [40]. Tako se stabilne točke ravnoteže nalaze u kvadrantima gdje je  $b > 0$  i  $c > 0$ , kao što je prikazano na Slici 6.5.



Slika 6.5 Dinamički efekti usljed promjena krutost i prigušenja u sustavu

Na Slici 6.5 je za  $D < 0$  predstavljena oscilirajuća dinamika sustava sa eksponencijalno opadajućom amplitudom, jer kompleksni eksponenti imaju negativan realni dio. Nivo prigušenja  $b$  određuje brzinu gašenja oscilacija, a za ravnotežnu točku u centru je dan primjer stabilnog fokusa. U slučaju  $D > 0$  korijeni  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su realni i negativni, pa odgovarajuća rješenja ne pokazuju oscilatornu dinamiku, a stabilni čvor je ilustrativan fazni portret. Za slučaj  $D = 0$  korijeni  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su realni i jednaki, što daje fazni portret stabilnog savijenog čvora (engl. stable inflected node).

U pogledu fizičkih i energetskih aspekata funkcioniranja HDOF robotskih sustava, vremenski promjenljivo prigušenje je jedan od najvažnijih faktora koji određuje njihovu nelinearnu dinamiku. U ovom radu predstavljene robotske strukture promjenljive fleksibilnosti u zavisnosti od njihove angažirane dužine, tereta na vrhu, konfiguracija i fizičkog dodira s okolinom imaju probleme opće stabilnosti [37]. U ovom radu se, bez obzira na dizajn i namjenu, svi roboti čije radne mehaničke strukture (ruke) ispoljavaju oscilatorna svojstva analiziraju na isti način. To je moguće ako ih se grupira i aproksimira kao kontinuum-robote koji teorijski imaju neograničen broj stupnjeva slobode, jer se njihovom elastičnom deformacijom postiže bezbroj geometrijskih oblika. Za elastične robotske ruke se i njihovo prigušenje općenito može aproksimirati jednostavnim sustavom s jednim stupnjem slobode, a čiji je matematički model kao i kod sustava masa-opruga.

Zato se kao primjer može analizirati sljedeći sustav tipa masa-opruga-prigušenje [32] dan jednačom:

$$\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k_0x = 0 \quad (6.13)$$

gdje je  $c(t)$  vremenski promjenljivi koeficijent prigušenja ( $t \geq 0$ ), a  $k_0$  je konstanta opruge. Stabilnost po Ljapunovu, iako to nije stvarna njegova asimptotska stabilnost, može se analizirati na temelju mehaničke energije sustava uzetu za funkciju Ljapunova [28]. Razmotrimo zato sljedeću pozitivnu određenu funkciju određivanje dovoljnih uvjeta za asimptotsku stabilnost točke  $(0, 0)$ :

$$V(x, t) = \frac{(\dot{x} + \alpha x)^2}{2} + \frac{b(t)}{2}x^2 \quad (6.14)$$

gdje je  $\alpha$  pozitivna konstanta manja od  $\sqrt{k_0}$ , te  $b(t) = k_0 - \alpha^2 + \alpha c(t)$ . Derivacija vremenski promjenljive funkcije Ljapunova (6.14) je:

$$\dot{V} = [\alpha - c(t)]\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{2}[\dot{c}(t) - 2k_0]x^2 \quad (6.15)$$

Gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  pozitivni brojevi koji zadovoljavaju uvjete:

$$0 < c(t) < \alpha \quad (6.16a)$$

$$\dot{c}(t) \leq \beta < 2k_0 \quad (6.16b)$$

pa je tada  $\dot{V}$  očito negativno definitna. Uz pretpostavku da je  $c(t)$  ograničen odozgo onemogućavajući rast  $V$ , uvjeti (6.16a) i (6.16 b) znače asimptotsku konvergenciju sustava.

Funkciju Ljapunova je općenito moguće odrediti kod nelinearnih sustava kad se napravi njihova dekompozicija tako da se odvoji linearni od nelinearnog dijela. Tu je funkciju moguće odrediti za cijeli sustav ako linearni njegov dio ima prijenosnu funkciju ili prijenosnu matricu pozitivno realnu. Pozitivni linearni sustavi imaju važnu ulogu u analizi i sintezi mnogih nelinearnih problema kod upravljačkih sustava. Iako se učinak inertnih i elastičnih sila aktivno održava na oscilatorno gibanje, prolazni učinak tijekom kratkog vremena nestaje zbog rasipanja energije. Taj proces rasipanja energije se naziva prigušivanje, a ima učinak smanjenja amplitude vibracija. To znači da je stabilnost elastičnog tehničkog sustava, kao što je familija fleksibilnih robota, uvjetovana prigušivanjem štetnih vibracija robotske ruke, a prvenstveno njenog vrha.

Stupanj i dinamika raspršivanja energije vibrirajućeg sustava odgovarajućim prigušenjem je općenito važan dio dizajna. Tako se na primjer u slučaju prigušenja suhim trenjem energija raspršuje se kao toplina zbog trenja zbog relativnog gibanja između površine u kontaktu. Za fleksibilne robotske su sustave važniji fenomeni prigušenja ovisni o brzini ruke kao radne strukture [40]. Za fleksibilne robotske sustave koji su kompleksna kombinacija inercijskih i elastičnih svojstava, prigušenje vibracija kao vid stabilizacije je važan zahtjev kako u fazi matematičkog modeliranja, tako i za dizajn i upravljački algoritam [41]. U općem slučaju struktura elastične ruke tih robota je disipativni mehanički sustav koji troši energiju  $E_D$  na tri otpora, a što se može predstaviti jednadžbom:

$$E_D = \frac{1}{2} \int_0^l D(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l D_s I \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} D_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} \right)_{x=0}^2 \quad (6.17)$$

gdje je:

- $D(x) = b_0 \rho A$  otpor na poprečnu brzinu strukture
- $D_s = b_1 E$  otpor prema naprezanju
- $D_0 = b_0 I_h$  otpor brzini u pogonskom sklopu
- $b_0, b_1$  konstante proporcionalnosti

Matrica prigušenja ispunjava uvjete ortogonalnosti, pa se kao i matrice inercije i krutosti mogu razdvajati. To znači da se može primijeniti modalni princip superpozicije prema navedenim izrazima za otpore koji tvore prigušenje čija je mjera energija  $E_D$ .

## 7 KAŠNJENJA U HDOF MODELIMA

Ruke HDOF robotskih sustava su komplicirane mehaničke strukture koje su na samoj granici područja gdje vladaju osnovni zakoni fizike. Zato su to nelinearni i nestabilni sustavi, pa se analize njihove fizičke stabilnosti sastoje od traženja rješenja na temelju kojih bi se postizalo poboljšanje svih njihovih dinamičkih svojstava, uključujući i upravljačke [34].

Kod HDOF sustava se mogu definirati ove nestabilnosti:

- globalne vibracije cijele strukture (engl. global modes oscillations),
- unutrašnje oscilacije (engl. intraplant mode oscillations),
- lokalne oscilacije (engl. local plant mode oscillations),
- interakcijske oscilacije (engl. interarea mode oscillations),
- upravljačke oscilacije (engl. control mode oscillations),
- torzijske oscilacije (engl. torsional modes between rotating plant).

Kašnjenje u toku informacija i odgovora elemenata mehaničkog podsustava je snažan izvor nestabilnosti robotske ruke, a dinamički modeli s kašnjenjem se dijele na dvije grupe. Prva grupa obuhvaća sustave opisane diferencijalnim jednačinama (engl. differential equation), a čiji je opći oblik dan sa:

$$x_{n+\tau} = f(x_{n+\tau-1}, x_{n+\tau-2}, \dots, x_n) \quad (7.1)$$

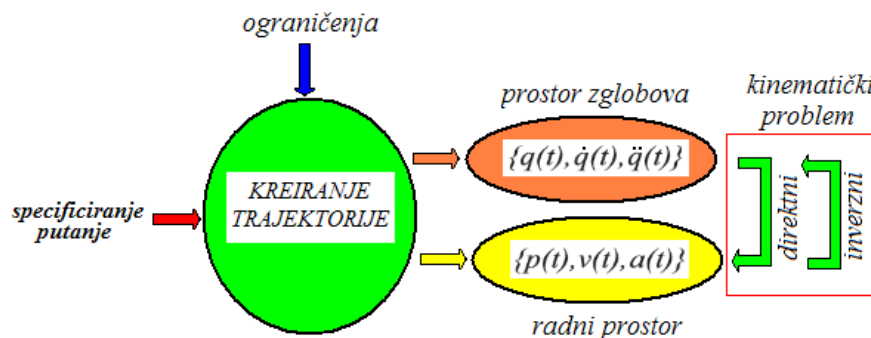
gdje je  $\tau$  parametar kašnjenja.

Drugu grupu čine modeli s kašnjenjem opisani diferencijalnim jednačinama su oblika:

$$\dot{x} = f(x_n, x_{n-T}) \quad (7.3)$$

gdje  $T$  označava kašnjenje.

Upravljački proces kod svakog robotskog sustava znači i određeno kašnjenje tih signala u svakoj etapi procesa, a na Slici 7.1 je dan simbolički prikaz za klasični direktni i inverzni kinematički problem [35].



Slika 7.1 Osnovni upravljački procesi kao jedan od uzroka kašnjenja

Dinamički sustavi s kašnjenjem po pravilu pokazuju prirodnu sklonost oscilacijama, pa kašnjenje podrazumijeva nestabilnost u vidu oscilacija. Intuitivno je to jasno, jer svako kašnjenje u bilo kojem sustavu znači da vremensko vraćanje unazad usporava sve tokove i



procesu. To važi za biološke sustave, kao i za društvene i tehničke, a ujedno znači da su neminovne oscilacije. One su univerzalna pojava u vidu ciklusa u raznim oblastima uz prisutvo faktora memorije – od ekonomskih i tehnoloških do bioloških i geoloških. Fiziološki procesi u živim organizmima su posebno značajan primjer oscilirajućih fenomena kad je prisutno kašnjenje [42].

Kašnjenja igraju vrlo važnu i specifičnu ulogu u bitnim stanjima dinamičkih sustava, kao što je stabilnost, te druge performanse. Važnost kašnjenja se manifestira na primjer u dizajnu i upravljanju povratnom vezom za sustave s više ulaza s više ulaza (MIMO), jer kad su u takve modele uključena kašnjenja, postaje sustav zatvorene petlje beskonačno-dimenzionalan. Iz tog razloga, regulator s ograničenim dimenzijama dizajniran za postrojenje s konačnim dimenzijama prestaje biti funkcionalan, jer neće biti u stanju stabilizirati beskonačno mnogo dinamičkih modova sustav s ugrađenim kašnjenjem.

Kašnjenje dakle stvara složenost u modeliranju dinamičkih sustava do te mjere da otežavaju postupke i za linearne vremenski invariantne sustave upravljanja (LTI). Zapravo, u prisutnosti više parametara koji znače kašnjenje u sustavima, npr. u slučajevima odgode u pristizanju podataka od više senzora, cjelovita analiza stabilnosti LTI sustava se značajno komplicira.

### 7.1 Aproksimirani HDOF sustav s kašnjenjem

Većina je radova iz teorije upravljačkih sustava je fokusirana na negativne efekte kašnjenja, odnosno u vremenskoj razlici između aktiviranja naloga i njegova izvršenja. Da bi se ilustrirali negativni učinci zaostajanja (eng. lag) po stabilnost HDOF sustava kod kojih je to vrlo naglašeno svojstvo, jedan jednostavan sustav opruga-masa-prigušenje je uzet za primjer jer može biti jednostavna aproksimacija HDOF [25].

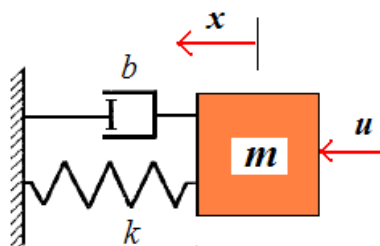
Diferencijalna jednačina koja taj sustav opisuje je:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u \quad (7.4)$$

gdje je  $x$  položaj koji se kontrolira,  $m$  je masa,  $b$  je prigušenje,  $k$  konstanta krutosti, a  $u$  upravljački ulaz. Laplace-ovom transformacijom jednačina (6.1) prelazi u  $s$  – domenu:

$$(ms^2 + bs + k)x(s) = u(s) \quad (7.5)$$

Sustav (7.3) masa–prigušenje–opruga s vanjskim djelovanjem je prikazan na Slici 7.2.



Slika 7.2 Zamjenski sustav za segment fleksibilnog robota

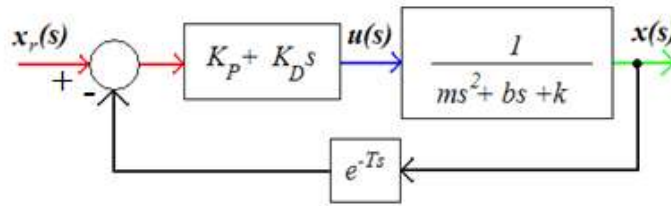
Ako se za upravljanje sustavom (7.4) danom na Slici 7.2 primjenjuje PD upravljački koncept prema (7.4), onda je sustav opisan jednačinom:

$$u(s) = (K_p + K_D s)(x_r(s) - x(s)) \quad (7.6)$$

gdje je  $K_p$  proporcionalno upravljačkom djelovanju,  $K_D$  je derivatni koeficijent upravljanja, a  $x_r$  referentni položaj sustava. Prijenosna funkcija tako zatvorenog upravljačkog sustava je:

$$\frac{x(s)}{x_r(s)} = \frac{K_p + K_D s}{ms^2 + (b + K_D s + (k + K_p))} \quad (7.7)$$

Ovaj sustav s povratnom vezom je stabilan za svaku vrijednost  $K_p > 0$ , te za  $K_D > 0$ . Na slici 7.3 je ilustrirana upravljačka PD shema sustava (7.5) s uključenim kašnjenjem u povratnoj vezi.



Slika 7.3 Upravljanje PD za sustav (7.3)

Stabilnost sustava se mijenja ako se u povratnu granu stavi  $e^{-Ts}$ , gdje je  $T$  kašnjenje. Kad se ovaj izraz razvije u Taylor-ov red dobije se:

$$e^{-Ts} = 1 - sT + \frac{(-sT)^2}{2!} + \frac{(-sT)^3}{3!} + \dots \quad (7.8)$$

Kad se dva prva izraza iz razvoja (7.7) uvrste u jednadžbu (7.6), nova prijenosna funkcija za polazni sustav je:

$$\frac{x(s)}{x_r(s)} = \frac{K_p + K_D s}{(m - K_D T)s^2 + (b + K_D - K_p)s + (k + K_p)} \quad (7.9)$$

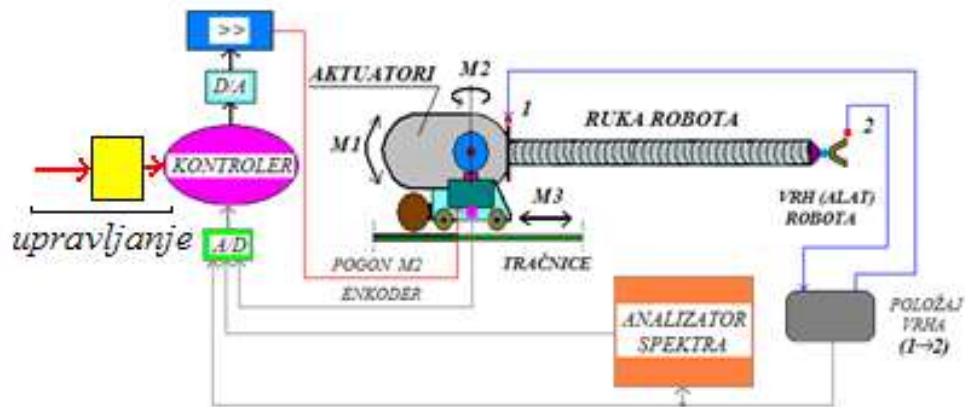
Na temelju Routh-Hurwitz kriterija stabilnosti dokazuje se da je sustav stabilan uz ove uvjete:

$$K_p < -k \quad (7.9a)$$

$$-b + K_p T < K_D < m/T \quad (7.9b)$$

Iako postoje suprotni slučajevi, kao na primjer za njihalo, u prikazanom modelu uvođenje kašnjenja stvara nestabilnost tog oscilatornog sustava. Bez kašnjenja je svako pozitivno  $K_D$  odgovaralo da ovo bude stabilan sustav, pa je kašnjenje u povratnoj vezi  $e^{-Ts}$  kao uzrok nestabilnosti nepoželjno.

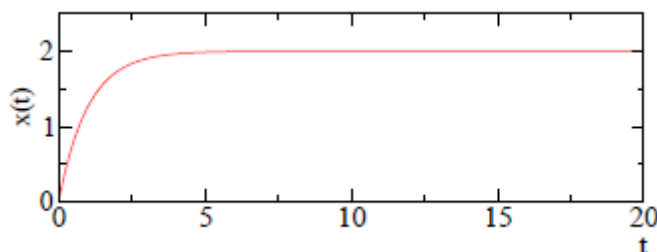
Kad se radi o robotskom sustavu visokog stupnja redundancije HDOF, očito je da povratni impulsi s kašnjenjem uzrokuju nestabilnost cijelog sustava.



Slika 7.4 Upravljački sustav robota sa kašnjenjem

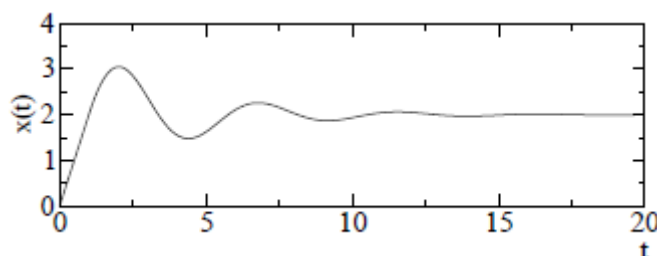
Postoje dva temeljna koncepta za upravljanje fleksibilnim robotskim strukturama: izravno, bez povratne veze (engl. open-loop for vibration control) i upravljanje sa zatvorenim vezom (engl. closed-loop control). Za oba slučaja postoje podvarijante, kao što je npr. za prvi metoda korekcije ulaznih signala (engl. shaped command method), te za drugu dodavanje prigušenja (engl. adding some damping), itd [35]. Na Slici 7.4 je predstavljen robotski HDOF sustav s povratnom vezom, a karakter te veze u svakom slučaju bitno utječe na stabilnost sustava.

Radi ilustriranja bitnog utjecaja kašnjenja na dinamiku sustava, na Slici 7.5 je za jednostavnu jednadžbu  $\frac{dx}{dt} = -ax + b$  dan prikaz rješenja bez kašnjenja  $x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$ :



Slika 7.5 Rješenje jednostavnog sustava bez kašnjenja

Kad se u navedeni sustav uvede kašnjenje  $\frac{dx}{dt} = -ax(t-1) + b$ , javljaju se oscilacije kao znak slabije stabilnosti, Slika 7.6 :

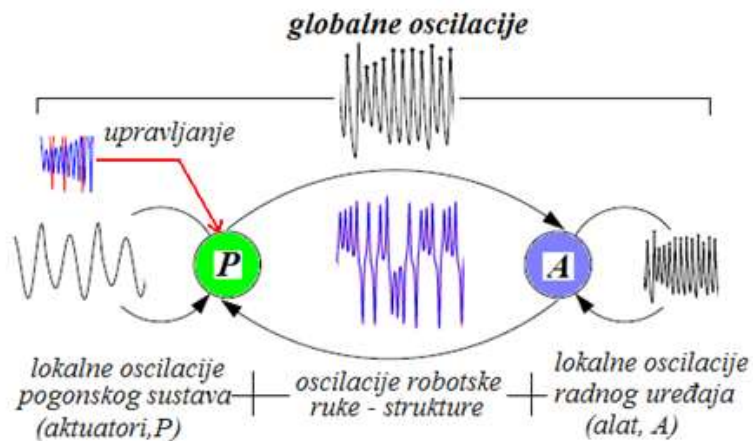


Slika 7.6 Ponašanje ustava u koji je uključeno kašnjenje

Kad je u sustav uključen veliko vrijeme kašnjenja, grafički prikazi u tim slučajevima pokazuju tendenciju stabilnosti u odnosu na nove promjene parametra kašnjenja, te da zadrži oblik kaotičnog atraktora. Ova anomalija se može uočiti usporedbom logističkog modela s

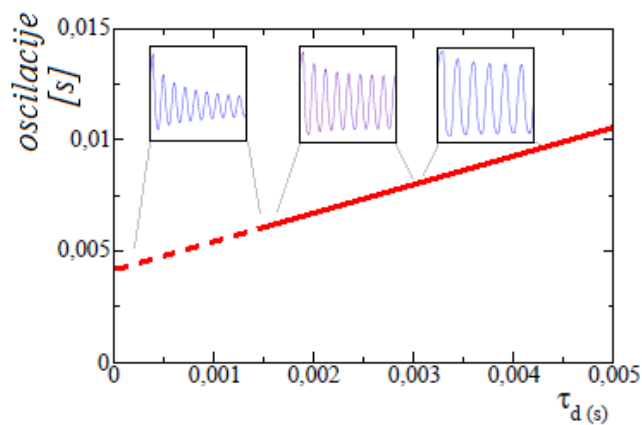
s kašnjenjem  $x_{n+1} = kx_n(1 - x_{n-\tau})$  i modela Mackey-Glass  $\dot{x} = \frac{Ax_\tau}{1+x_\tau^c} - Bx$  [34], [42]. Iako imaju različite matematičke modele u vidu analitičkih jednažbi, oni su po složenoj dinamici vrlo slični.

I svaki podsustav u HDOF robotima je nestabilan, pa je tako i njegova uloga u nestabilnosti cjeline aktivna, te tako nepoželjna. Na Slici 7.7 je dan prikaz jednog HDOF sustava sa simboličkim prikazom nestabilnosti njegovih glavnih podsustava [40].



Slika 7.7 Simbolički prikaz nestabilnosti u podsustavima HDOF robota

Lokalni i globalni povratni efekti robotskog sustava sa Slike 7.7 su uzrok svim kašnjenjima  $\tau_d$  [s], čiji porast izaziva i povećanje oscilacijskih smetnji, kao što je prikazano na Slici 7.8 [42].



Slika 7.8 Povećanje amplituda oscilacija prati povećanje vremena kašnjenja  $\tau_d$  u sustavu

## 8 FLEKSIBILNI HDOF SUSTAVI

Za analizu manipulatora HDOF kojima je fleksibilnost neželjena posljedica konstrukcije, kao i manipulatora kojima je fleksibilnost dizajnerski zahtjev i cilj (engl. flexural manipulators), model elastičnog štapa (grede) je prikladan za matematičku analizu statičkih i dinamičkih svojstava takvih sustava [41]. To podrazumijeva stvaranje modela za direktnu dinamiku, inverznu dinamiku i sintezu odgovarajućeg regulatora za upravljanje (engl. controller).

Nelinearnosti su prisutne i kod ne-redundantnih manipulatora, ali je to kod redundantnih, dakle općenito fleksibilnih sustava, posebno izraženo svojstvo. Nelinearne jednadžbe kojima se opisuje dinamika takvih sustava, osim u nekim posebnim slučajevima, analitički nije moguće riješiti. Geometrijske i kvalitativne metode u analizi dinamike izrazito kompleksnih nelinearnih sustava kao što su fleksibilne robotske strukture je dobar izbor. Pomoću ovih tehnika je moguće analizirati i HDOF sustave, što vodi prikazima u vidu izuzetno kompliciranih geometrijskih struktura.

Fleksibilne robotske ruke su po temeljnim dinamičkim svojstvima prostorna fizička njihala za koje kao i svi drugi nelinearni oscilatori ne slijede princip superpozicije, a frekvencije njihovih oscilacija ovise i o amplitudi i o početnim uvjetima [29]. Također, robotske mehaničke strukture koje karakteriziraju nelinearne oscilacije, pokazuju složena, vrlo specifična dinamička svojstva kao što su rezonanca, skok ili histereza, granični ciklusi, relaksacijske oscilacije, pojava izlazi sa smetnjama, autoparametarske oscilacije, itd.

### 8.1 Hiper-redundantni i fleksibilni roboti

Kod industrijskih robota je u skupini primarnih ciljeva postizanje preciznog pomjeranja i djelovanja tehnoloških alata na vrhu. Zato se krutost manipulatora definira na temelju grešaka pozicioniranja do kojih dolazi pod utjecajem vanjskih sila tijekom određene procesne operacije. Također, u čestim industrijskim aplikacijama tipa „pick-and-place“ koja su namijenjene jednostavnim, ali brzim manipulacijama koje znače prijenos nekog predmeta s jednog na drugi položaj, krutost definira i dopuštenu brzinu/ubrzanje dok se alat približava ciljnoj točki. Odgovarajuća krutost robotske ruke ne dopušta neželjene preleti ciljnog položaja usljed zamaha i inercijskih sila.

Također, industrijski manipulatori su masivni strojevi sa velikim brzinama pomjeranja robotske ruke što predstavlja opasnost za ljude. Za sigurnost ljudi krutost robotske ruke je mogući izvor teških ozljeda, pa se zato pristup ljudi u radnu zonu robota na razne sprečava. Postoje i različiti dizajni robota za meki kontakt s čovjekom, ali taj koncept poništava glavne radne performanse industrijskih robota.

Općenito se razlikuju dvije vrste krutosti robotske ruke, ako se ona osim kao fizički otpor na deformaciju strukture usljed djelovanja vanjskih sila i momenata, može gledati i kroz stupanj podatnosti (mekoće), odnosno pustljivosti mehanizma. To znači da je u prvom slučaju mehanička, konstrukcijom uvjetovana popustljivost (engl. passive compliance), a druga je promjenljiva (engl. active compliance) koju definira algoritam upravljanja djelujući na pogonski sustav robota.

U robotici se matrica krutosti obično naziva „kartezijska krutost matrice“, za razliku od „matrice krutosti prostora zglobova“, koja opisuje odnos statičke sile (zakretnog momenta) i

odgovarajući h pomjeranja u zglobovima. Obje ove matrice krutosti mogu se preslikati jedna na drugu koristeći konzervativnu kongruencijsku transformaciju (engl. conservative congruency transformation).

Za klasične manipulatore sa masivnim krutim polugama (engl. rigid link manipulator) koje povezuju zglobovi (engl. joints) i tako formiraju artikulirani mehanički lanac robotske ruke, dinamika je opisana [35] diferencijalnom jednačinom:

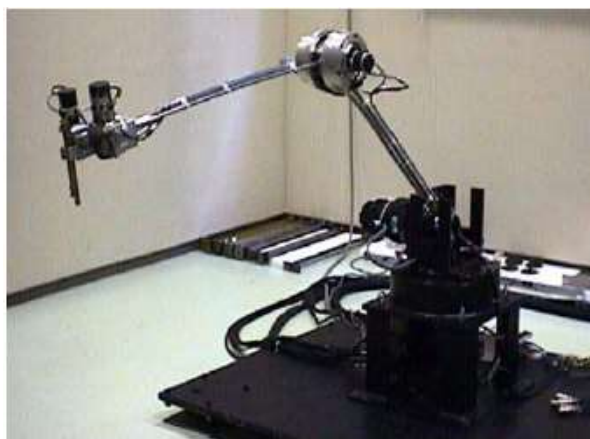
$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (8.1)$$

gdje je  $q$  vektor zglobnih varijabli,  $M$  matrica inercije,  $C$  vektor Coriolis – ove i centrifugalne sile,  $G$  je utjecaj gravitacije, a  $\tau$  je vektor pogonskih momenata u zglobovima.

Da bi mehanička struktura ove kategorije robota (engl. serially linked segments) za rad u industriji bila kruta, mora biti masivno građena, što znači i po dijelovima i u cjelini velike težine. Takva konstrukcija onda zahtijeva i robusnije zglobove, te snažnije pogone u njima, pošto zahtijevani okretni (radni) momenti rastu linearno s masom, ali i s kvadratom duljine ruke robota po zakonu  $\tau = \frac{1}{3}mL^2\alpha$ .

Iako kod industrijskih manipulatora vibracije ruke, pa onda i preciznost vrha, odnosno radnog uređaja na kraju mehaničkog lanca ruke (engl. end-effector), nije izražen problem, istraživanja pokazuju da postoji kritični odnos između polova zatvorenog upravljačkog kruga za zglobove i prve prirodne frekvencije  $\omega_{cl}/\omega_{str}$ .

Na ovaj način je utvrđena granica između krutih i vibrirajućih robotskih ruku industrijskih manipulatora. Uz težnje da se osim industrijskih robota proširi paleta robotskih manipulatora, u robotici se istražuju, osim HDOF sustava, i nova kategorija tankih laganih i fleksibilnih robotskih ruku. To su mehanički sustavi drukčijih konstruktivnih, upravljačkih i radnih svojstava (engl. light-weight) od industrijskih manipulatora, a također i od HDOF robota [29], [41]. Na Slici 8.1 je jedan prototip robota sa dva tanka i lagana, te ciljano elastična elementa.

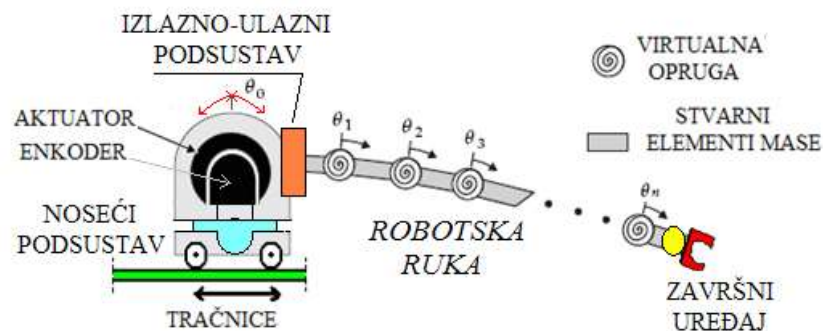


*Slika 8.1 Konstruktivno realiziran prototip robota sa fleksibilnom rukom od dva segmenta*

Za razliku od ovih tankih, laganih i elastičnih ruku ovih fleksibilnih robota sa tako odabranim dizajnom (engl. flexible by design), HDOF sustavi kao neželjenu posljedicu konstrukcije ruke sa velikim brojem stupnjeva slobode, imaju također ruku sa neizbježnim fleksibilnim

svojstvima. Takva je ruka simbolički predstavljena kao niz virtualnih spiralnih opruga (engl. rotational springs) na Slici 8.2.

Za analizu krutosti manipulatora kategorije HDOF, na Slici 8.2 dan simbolički prikaz metode virtualnih zglobova (engl. Virtual Joint Method, VJM), koji se temelji na principu nanizanih masa pri modeliranju (engl. lump modeling) [34]. Prema ovom pristupu, treba pretpostavljeni kruti model HDOF robotske ruke aproksimirati nizom dodanih virtualnih zglobova u vidu koncentriranih opruga (engl. localized springs), kojima se onda opisuju elastične deformacije segmenata strukture. Osim toga, ove virtualne opruge zamjenjuju i zglobove s aktuacijom, pa sadrže krutost i za upravljačku petlju. Moguće je na ovaj način kinematski model robotske ruke predstaviti kao produkt homogenih matrica transformacije koji se nakon izdvajanja položaja i orijentacije alata na vrhu transformira u vektorsku funkciju.



Slika 8.2 Fleksibilnost ruke robota predstavljena kao niz virtualnih opruga

Sve kategorije robota, kako one sa neželjenom, tako i sa ciljanom fleksibilnošću ruke, uprkos određenim prednostima, zbog vibracija strukture imaju velike teškoće pri upravljanju, odnosno postizanju preciznosti vrha (engl. incidental vibrations). Kad se još uzme u obzir njihova vrlo ograničena nosivost – onda je jasno zašto nisu tržišno atraktivni (engl. commercially not available).

U neizbježno parcijalnom modeliranju vrlo složenog artikuliranog mehaničkog sustava kao što je fleksibilna robotska ruka, njihalo ima također ima jednu od uloga. Mogućnost nalize tako jednostavnog oscilirajućeg sustava kao što je njihalo u svezi svojstava HDOF robota je utemeljena na postojanju sličnosti u nekim važnim aspektima nelinearne dinamike. Na primjer, njihalo kao sustav će oscilirati i zaustaviti se u okomitom ravnotežnom položaju kao i fleksibilna ruka robota po prestanku pobudnih sila.

U oba slučaja bi se ponašanja mogla analizirati u blizini ravnotežnog položaja lineariziranim sustavom, ali njihova stabilnost nije određena svojstvenim vrijednostima linearizirane matrice sustava. Ovo proizlazi iz činjenice da se ukupna mehanička energija u ovakvih sustava progresivno raspršuje i gubi kroz razne vidove prigušenja. To ih onda dovodi u stanje minimalne energije, što znači da su u položaju ravnoteže [40].

Ruke robotskih manipulatora su aktivni mehanički sustavi sa više stupnjeva slobode, ali usprkos jednom stupnju slobode, ipak jednostavno njihalo s vanjskom pobudom (engl. forced pendulum) može u pogledu temeljnih dinamičkih pojava poslužiti kao model jednostavnog robota. Ova se analogija njihalo-robot može učinkovito proširiti dodavanjem novih stupnjem slobode [43].

Uobičajeno je da fizičko modeliranje robotske ruke s obzirom na otpor oscilacijama uključuje i jedan od ova četiri zakona prigušivanja:

- Linearno viskozno prigušenje je otpor u sustavu proporcionalan brzini  $\dot{x}$ .
- Kvadratno viskozno prigušenje je dano izrazom  $c\dot{x}|\dot{x}|$ .
- Prigušenje je u vidu Coulomb–ova suhog trenja između dodirnih površina.
- Strukturna prigušenjima u materijalima (engl. structural/hysteretic damping).

Općenito su vibracije gibljivih sustava rezultat kombiniranog djelovanja inercijskih i elastičnih sila. Inercija pokretnih dijelova tehničkih sustava kao što su roboti može se izraziti masama, momentima inercije i vremenskim derivacijama pomaka. Za robote sa elastičnim rukama je značajan efekt i obnavljajućih sila (engl. restoring forces), koje se izražavaju preko pomaka i krutosti elastičnih članova ili cjeline strukture. U svakom slučaju prigušivanje ima značajan učinak, pa je važan parametar u vibracijskoj analizi svakog tehničkog sustava.

Kod HDOF robota zbog visokog stupnja redundantnosti, a što onda implicira i fleksibilnost njihove ruke, promjenljiva krutost (engl. varying stiffness) je ograničavajuće svojstvo robotske ruke s obzirom na njenu stabilnost [32]. Taj mehanički dio robotskog sustava mora postupno iz početnog položaja (engl. start/home position) ulaziti u radni 3D ambijent, te tako mijenjati i efektivnu dužinu i krutost ruke kao mehaničke strukture. Promjenljivost efektivne dužine, što ujedno znači i krutosti ruke HDOF sustava, može se predstaviti modelom njihala koje ima promjenljivo prigušenje u vidu trenja u dijelovima svoje konstrukcije, koje npr. ovisi o temperaturi. Također se promjena amplitude nametnutih oscilacija (engl. external time-dependent force) može tretirati kao parametar prigušenja. Za takav model se može formirati nelinearna dinamička jednadžba:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{b}{mL}\right) \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{F_0}{mL} \sin \Omega t \quad (8.2)$$

Jednadžba (8.2) je diferencijalna jednadžba drugog reda i predstavlja model jednostavnog nelinearnog oscilatora s promjenljivim koeficijentom prigušenja ( $b$ ), s vanjskom sinusnom pobudom frekvencije  $\Omega$ , te vlastitom kružnom frekvencijom za slučaj da je oscilator linearan, tj. bez prigušenja.

Uloga prigušenja u disipativnom sustavu (8.2) se može dobro ilustrirati ako se pretvori u autonomni sa energijom  $E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta$  za koju je  $\frac{dE}{dt} < 0$ , pa centri postaju fokusi, a sedla se ne mijenjaju. To je izazvano disipativnim silama koje su uticale da centri, koji nisu hiperbolični, postanu stabilni fokusi, ali zato sedla nisu promijenila svoj karakter, što potvrđuje njihovu hiperboličnost, te strukturnu stabilnost lineariziranih jednadžbi poremećaja.

## 8.2 Fleksibilni model za robote

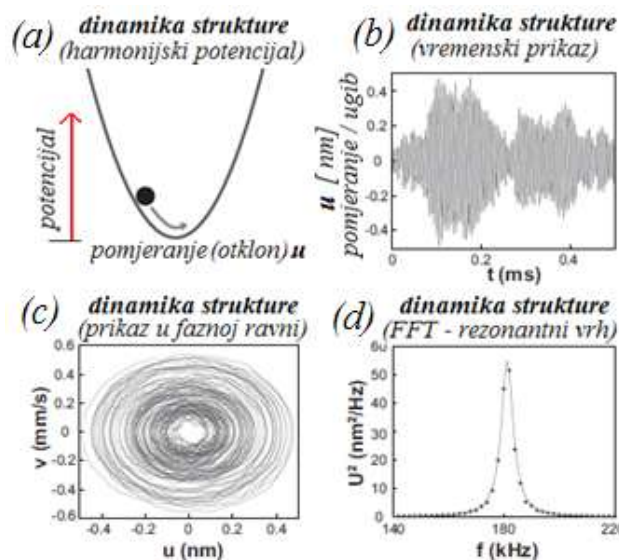
Već je navedeno da su njihala su jednostavni nelinearni dinamički sustavi, ali pogodni za modeliranje nekih elemenata složenih globalnih ponašanja robota. Tako je na primjer, vremenska periodička promjena određenog parametra tijekom pobudnog djelovanja, poput onog koje npr. stvara vodoravno vibrirajući bazni nosač sustava. Takva dinamika podloge može ozbilno ugroziti učinkovitost zglobnog sustava robota (engl. joint space). Čak i za male amplitude poremećaja može doći do pojave vilastih bifurkacija (engl. pitchfork-type bifurcation), te ako najveći gravitacijskoi moment i proporcionalno pojačanja u PD regulatoru



imaju približnu vrijednost. To znači da pojava bifurkacija u ovom modelu dovodi do poremećaja u upravljačkom procesu robotskog sustava [43].

Također, za modeliranje elastičnih svojstava robotske ruke se koristi elastična greda (štap) fiksirana na jednom kraju (engl. cantilever beam) koja je jednostavni oscilirajući sustav u ravni. Savijanje grede se javlja usljed djelovanja svih tereta na njoj, a to uključuje normalne sile, koncentrirane posmične sile, koncentrirane momente duž osi strukture, kao i poprečne sile i momente po površini tog tijela. Za ovakav pristup analizi kretanja elastične konzolne strukture je najpotpuniji Cosserat postupak, koji je složen zbog uzimanja u obzir svih važnijih parametara sustava.

Na Slici 8.5 su dana četiri prikaza koja karakteriziraju temeljne dinamička ponašanja elastične strukture pobuđene na slobodnom kraju na vibracije: fizikalni princip (a), vremenska serija (b), prikaz u faznoj ravni (c), te FFT prikaz (d) [44].



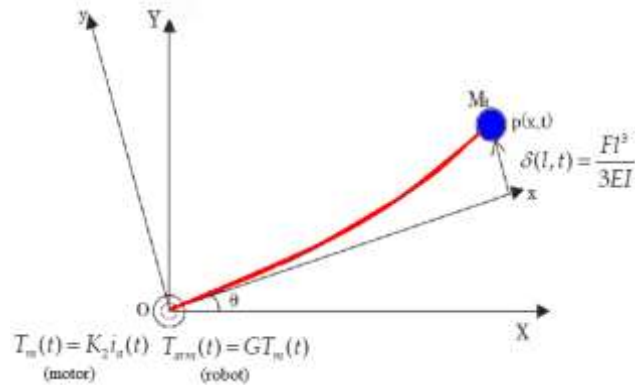
Slika 8.5 Prikazi za vibracije elastičnog štapa / grede]

Kad se jedan fleksibilni sustav kao što je HDOF robotska ruka aproksimira elastičnom šipkom/gredom konzolnog tipa, onda se može na temelju Euler-Bernoulli modela lakše i jednostavnije analizirati dinamika modela. Stabilnost rješenja se konačno provjerava Ljapunovljevim postupkom [32].

Model Euler-Bernoulli uzima u obzir samo efekte momenta savijanja za male deformacije elastičnog sustava, te idealizirane oblike statičkog opterećenja [45]. Pošto nisu uključene posmične deformacije (engl. shear deformations), nego svaki presjek ostaje okomit na neutralnu os nakon deformacije. Ove i druge pretpostavke sam model čine lakšim za primjenu [46]. Za deblje grede i za istraživanje dinamike sustava na višim frekvencijama ovaj model nije odgovarajući. Za uključivanje u matematički model i modova usljed torzijskih efekta, koristi se Timoshenkov model za elastične strukture.

Sa ciljem stvaranja takvog modela za HDOF sustav, na Slici 8.6 je prikazan HDOF sustav aproksimiran fleksibilnom rukom robota sa jednim homogenim krakom/rukom (eng. single-link flexible robot) dužine  $l$ , sa krutošću  $EI$ . Teret  $M_t$  je na vrhu fleksibilne HDOF strukture krutosti  $EI$  i raspodijeljene mase  $\rho$  po dužini. Motor/aktuator okretnog momenta  $T$  je lociran u bazi, ima ekvivalentni moment inercije  $I_h$ . I pogoni cijeli ovaj sustav. Varijabla  $\delta(x, t)$  je

otklon gibljive strukture robotske ruke u svakoj točki  $x$ , a mjereno u odnosu na njen nedeformirani oblik po osi  $x$ . Rotacija ruke u ravni u odnosu na referentnu poziciju je označena kutom  $\theta$  [47].



Slika 8.6 Elastična/fleksibilna robotska ruka sa jednim gibljivim elementom

Za prikazani slučaj elastičnog štapa/grede sa Slike 8.6, opći izraz za kinetičku energiju elastične ruke robota izazvanu lateralnim pomjeranjem je:

$$K_E = \int_0^l \rho A \left( \frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (8.3)$$

a za potencijalnu usljed savijanja strukture:

$$P_E = \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (8.4)$$

Lagrangian za elastičnu ruku robota:

$$L = \int_0^l \left[ \rho A \left( \frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (8.5)$$

izvodi se jednačba Euler-Bernoulli:

$$\rho A \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (8.6)$$

Ako se pretpostavi harmonička pobuda (engl. forced vibration) ove elastične strukture u obliku  $\delta(x, t) = V(x)e^{jft}$  sa frekvencijom  $f = 2\pi\omega$  i prirodnom frekvencijom  $\omega$ , bezdimenzionalnom dužinom strukture  $\vartheta = x/l$ , iz jednačbe

$$EI \frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.7)$$

se dobije

$$\frac{\partial^4 V(\vartheta)}{\partial \vartheta^4} - b^2 V(\vartheta) = 0, b^2 = \frac{\rho A l^4}{EI} f^2 \quad (8.8)$$

čije je rješenje karakteristična funkcija:

$$V(\vartheta) = C_1 \cos(\beta_e \vartheta) + C_2 \sin(\beta_e \vartheta) + C_3 \cos h(\beta_e \vartheta) + C_4 \sin h(\beta_e \vartheta) \quad (8.9)$$

gdje je  $\beta_e = \sqrt{b}$ , a konstante  $C_i$  se izračunavaju iz graničnih uvjeta.

U principu se dinamika elastične strukture konzolnog tipa opisuje sa dvije dinamičke jednačbe od kojih je prva povezana s kutom zakretanja motora, a druga je povezana s deformacijom cijele robotske ruke. Uz jednačbu deformacije su uključena i četiri granična uvjeta koji opisuju način na koji je ruka pričvršćeni na bazni dio HDOF sustava, podrazumijevajući da se teret  $M_t$  nalazi na vrhu.

Kvalitativna analiza nelinearne dinamike HDOF robotskih sustava je širok okvir za analizu njihovih općih dinamičkih svojstava. Osim ovih matematičkih metoda, postoje i analitički postupci bliži inženjerskoj praksi, a koji također daju korisne opise uzroka i posljedica vibracija robotskih sustava s elastičnim robotskim rukama. Tako jednačbe za transverzalne vibracije gibljivih robotskih struktura, kao što je metoda Euler-Bernoulli, omogućuju širok spektar istraživanja elastičnih ponašanja, te vode korisnim rješenjima. Ova je metoda korisna za modeliranje složenih struktura robotskih ruku (engl. chain-like multibody systems) jer uključuje granične uvjete, potencira važnost prirodnih frekvencija sustava, te vodi ka rješenjima, na primjer preko metode pretpostavljenih modalnih oblika.

Općenito vrijedi da u pogledu graničnih uvjeta, spoj elastične ruke i pogonskog dijela HDOF sustava, a sa slobodnim vrhom, može biti: čvrsti konzolni (engl. clamped-free), zglobno-pokretni (engl. hinged-free), klizeći (engl. sliding-free) i rotirajući (engl. rotating-free).

Za ovaj način analize fleksibilnosti ruku manipulatora je posebno važan problem graničnih vrijednosti, a sadržan je u parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi četvrtog reda sa graničnim uvjetima za oba kraja tih struktura:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial x^2}] + \rho(x) \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.10)$$

Problem granične vrijednosti (8.10 a – 8.10 d) za savijanje grede je tako definiran sustavom parcijalnih diferencijalnih jednačbi četvrtog reda s dva granična uvjeta na svakom kraju. Tako se način pričvršćenja strukture na bazni podsustav uzimaju kao geometrijski granični uvjeti, a po pitanju tereta prirodni. Granični problem za granične uvjete određeni na  $x = 0$ ,  $x = L$ .

$$\delta(x, t)|_{x=0} = 0 \quad (8.10a)$$

$$\frac{\partial \delta(x, t)}{\partial x} |_{x=0} = 0 \quad (8.10b)$$

$$EI \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial x^2} |_{x=L} = 0 \quad (8.10c)$$

$$EI \frac{\partial^3(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = M_t \left[ x\ddot{\theta}(t) + \frac{\partial^2(x, t)}{\partial t^2} \right]_{x=l} \quad (8.10d)$$

Parcijalna diferencijalna jednačba Euler-Bernoulli tipa predstavlja dinamički model za pojednostavljene elastične robotske ruke serijske morfologije, a koje imaju male poprečne presjeke u odnosu na ukupnu dužinu. Rješavanje ovakvih jednačbi uključuje odvajanje vremena i prostora s jednom ovisnom prostornom koordinatom koja predstavlja otklon strukture.

Ako se vrijeme tretira kao kontinuirana varijabla, onda se problem traženja rješenja preoblikuje u običnu diferencijalnu jednačbu, pri čemu se otklon predstavljen kao beskonačni zbroj osnovnih funkcija. Svaka od njih je pomnožena s vremenski promjenom amplitude, pa se tim postupkom otkloni elastične robotske ruke mogu aproksimirati ograničenom sumom:

$$\delta(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (8.11)$$

gdje su  $\phi_i(x)$  pretpostavljeni modalni oblici, a  $q_i(t)$  generalizirane modalne koordinate za opis elastične deformacije strukture.

Za komponiranje niza funkcija modalnih oblika  $\phi_i(x)$  postoji više mogućnosti, ali je za sve osnovni uvjet da zadovoljavaju skup graničnih uvjeta koje diktira fizičko stanje sustava. Najčešće se za moguće modalne oblike se uzimaju jednostavni polinomi, svojstvene funkcije iz svojstvenih problema, svojstvene funkcije iz primjene metode konačnih elemenata ili set funkcija proisteklih iz eksperimentalnih postupaka.

Ne postoji jedinstvena metoda za odabir osnovnih funkcija  $\phi_i$  (engl. mode shape function), jer bilo koji skup koji zadovoljava kinematske granične uvjete i linearno je neovisan može biti prihvatljiv za formiranje aproksimativnih rješenja. Ta prihvatljivost u pogledu slobodnog izbora osnovnih funkcija se ocjenjuje po odstupanju tako komponiranog približnog analitičkog rješenja prema raspoloživim matematičkim postupcima za ispitivanje validnosti, ili na eksperimentalne rezultate.

Velika je olakšica kad su modalni oblici ortogonalne funkcije, jer su tada po definiciji matrice mase i krutosti biti dijagonalne, što omogućuje da jednačbe sustava mogu biti razdvojene. To je velika prednost u postupku formiranja upravljačkih algoritama za elastične strukture kao što je ruka HDOF robotskog sustava.

Uz pretpostavke da je masa  $M_t$  koncentrirana samo na vrhu ruke tj. kad se zanemari masa po dužini elastične ruke uz mali otklon, dinamika sustava se može opisati Lagrangeovom jednačbom.

Euler-Bernoulli je pojednostavljen model za elastična ponašanja savitljivih ruku fleksibilnih manipulatora, a Lagrangeov pristup se koristi se za dobivanje jednačbi gibanja na temelju polaznih diskretiziranih veličina kinetičke i potencijalne energije sustava. Za slučaj elastične strukture potencijalna energija ne ovisi o položaju, a također nije ovisna o modalnim brzinama.

$$T = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (8.12)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta} \quad (8.13)$$

Znači, uz uvjete da se radi o malim deformacijama robotske ruke aproksimirane štapom (gredom) bez težine, te da je masa koncentrirana na vrhu, njenu dinamiku opisuje sustav jednadžbi:

$$\left( I_h + \frac{1}{3} \rho l^3 + M_t l^2 \right) \ddot{\theta}(t) + M_t l \ddot{\delta}(l, t) = T_{arm}(t) \quad (8.14)$$

$$M_t l \ddot{\theta}(t) + M_t l \ddot{\delta}(l, t) + \frac{3EI}{l^3} \delta(l, t) = 0 \quad (8.15)$$

### 8.2.1 Stabilnost modela

Za analizu stabilnosti fleksibilne ruke robotskog sustava, a na temelju upravljanja MPID strategijom (engl. modified PID controller) koristit će se u ovom slučaju teorija Ljapunova (direktna metoda), što podrazumijeva formiranje funkcije  $V(t)$  koja korespondira s energijom sustava, ali uvijek ne predstavlja njen matematički oblik [11].

Modificirani PID regulator zamjenjuje klasični PID, jer se uvode u upravljački signal povratne informacije o vibracijama, kako bi se stabilizirajuće utjecalo na modove fleksibilne strukture. Model za takav MPID ima osnovne elemente:

$$u(t) = u_b + K_{jp} e_j(t) + K_{jd} \dot{e}_j(t) + K_{vc} g(t) \operatorname{sgn}(\dot{e}_j(t)) \int_0^t |\dot{e}_j(\tau)| g(\tau) d\tau \quad (8.16)$$

gdje je:

- $u_b$  dio integralnog upravljačkog signala za neopterećeni motor,
- $K_{jp}$ ,  $K_{jd}$  proporcionalni i derivatni dio signala za pogone u zglobovima,
- $K_{vc}$  dio pokretačkog signala za djelovanje na vibracije,
- $e(t)$  greška vrha manipulatora usljed vibriranja,
- $\operatorname{sgn} \dot{e}_j(t)$ : (-1) za  $\dot{e}_j(t) < 0$ ; (0) za  $\dot{e}_j(t) = 0$  i (1) za  $\dot{e}_j(t) > 0$

Ljapunovljeva funkcija  $V(t)$  se formira po izrazu:

$$V(t) = K_E + P_E + \frac{1}{2} + K_1 K_2 K_{jp} G e_j^2(t) + \frac{1}{2} K_1 K_2 K_{vc} G \left[ \int_0^t |\dot{e}_j(\tau)| \delta(\tau) d\tau \right]^2 \quad (8.17)$$

što znači da se mora odrediti za elastični sustav robotske njegova ukupna kinetička energija  $K_E$ , te ukupna potencijalna energija  $P_E$ . Kinetička se energija analizira uz uvjet male kutne brzine (engl. small angular velocity), a potencijalna uz slaba savijanja (engl. small elastic deflection). Za  $K_E$  je to zbroj triju komponenti:

$$K_E = K_{E_m} + K_{E_b} + K_{E_p} \quad (8.18)$$

gdje je:

- kinetička energija pogona/motora uz  $I_h$  (engl. hub inertia):

$$K_{E_m} = \frac{1}{2} I_h \dot{\theta}^2(t), \quad (8.19)$$

- kinetička energija zamaha fleksibilne ruke HDOF sustava (engl. rotation):

$$K_{E_b} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \dot{p}^2(x, t) dx, \quad (8.20)$$

- $K_{E_p} = \frac{1}{2} M_t \dot{p}^2(l, t)$ , kinetička energija tereta na vhu elastične strukture ruke (engl. payload mass):

$$K_{E_p} = \frac{1}{2} M_t \dot{p}^2(l, t). \quad (8.21)$$

Ukupna potencijalna energija  $P_E$  sustava je posljedica savijanja elastične strukture (višestruko veće dužine od presjeka i uz zanemarivanje smicanja):

$$P_E = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (8.22)$$

Ako je derivacija Ljapunove funkcija  $V(t)$  za opći oblik nelinearne diferencijalne jednadžbe  $\frac{dx}{dt} = f(x), f(0) = 0$  duž rješenja negativno semi-definitna, onda je rješenje,  $x(t) = 0$  stabilno, a ako je  $V(t)$  negativno definitna, rješenje je asimptotski stabilno. Deriviranjem izraza (8.17) za  $V(t)$  se dobije:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & K_E + P_E + K_1 K_2 K_{jp} G e_j(t) \dot{e}_j(t) \\ & + K_1 K_2 K_{vc} G \dot{e}_j(t) \operatorname{sgn} \dot{e}_j(t) \delta(\tau) \int_0^t |\dot{e}_j(\tau)| \dot{\delta}(x, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (8.23)$$

Deriviranjem ukupne kinetičke energije sustava se dobije jednadžba:

$$\begin{aligned} \dot{K}_E = & T_{arm}(t) \dot{\theta}(t) + M_t \dot{\delta}(l, t) [l \ddot{\theta}(t) + \ddot{\delta}(l, t)] \\ & + \rho \int_0^l \dot{\delta}(x, t) [x \ddot{\theta}(t) + \ddot{\delta}(x, t)]^2 dx \end{aligned} \quad (8.24)$$

Na temelju garantičnih uvjeta se dobije:

$$\dot{K}_E + \dot{P}_E = T_{arm}(t) \dot{\theta}(t) \quad (8.25)$$

Tako se derivacija od  $V(t)$ , (8.23), svodi na

$$\dot{V}(t) = -K_1 K_2 K_{jd} G \dot{\theta}^2(t) \quad (8.26)$$

i ona je negativno semi-definitna za  $K_{jd} \geq 0$ , pri kojem uvjetu je cijeli sustav stabilan po Ljapunovu.

Ova analiza pokazuje sljedeće zaključke za HDOF sustave:

- uključivanje efekta otklona vrha u proces generiranja MPID upravljačkog signala znači da se postiže stabilizacija vrha elastične strukture,
- primjena/rad MPID regulatora (engl. controller) zahtijeva on-line mjerenje samo triju veličina: kut pomjeranja/zakretanja zgloba u bazi  $\theta(t)$ , brzinu zgloba u bazi  $\dot{\theta}(t)$ , te brzinu stvaranja otklona/progiba vrha  $\dot{\delta}(t)$ ,
- karakteristike regulatora  $K_1$ ,  $K_2$  te  $G$  daju mu funkcionalnost, ali komponenta pogona na zglobovima  $K_{jd}$  određuje predznak funkcije  $\dot{V}(t)$ , pa tako i stabilnost sustava.

### 8.2.2 Rješenja za model

Za fleksibilne robote u koje spadaju i HDOF sustavi, proces modeliranja zbog njihove kontinuirana prirode i raspodijeljena masa vodi parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje uključuju prostornu i vremensku ovisnost. Za praktične primjene, simulacije i upravljanje ovakve se jednadžbe izbjegavaju zbog nemogućnosti dobivanja rješenja u zatvorenoj formi [48].

Zato se primjenjuju tehnike prostorne diskretizacije koje znače razdvajanje prostorno-vremenskih varijabli na kombinaciju prostorno ovisnih varijabli i vremenskih ovisnih varijabli, što onda vodi približnim rješenjima. Na temelju ove tehnike su u osnovi moguća tri pristupa: metoda pretpostavljenih modova (engl. assumed mode method, AMM), metoda konačnih elemenata (engl. finite element method, FEM) i metoda grupiranih parametara (engl. lumped parameter method, LPM) [29], [41].

Jednadžbe gibanja za poprečne vibracije za elastični konzolni nosač (gredu) po metodi Euler-Bernoulli daje granične vrijednosti parcijalnom diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. Dva granična uvjeta na svakom kraju su  $x = 0$  i  $x = l$ . Općenito, za ovu dinamičku analizu su važni granične uvjeti, prirodne frekvencije i modalni oblici.

Modalni oblici po AMM metodi se mogu aproksimirati iz statičkih uvjeta, a na temelju variranja opterećenja na vrhu elastične HDOF robotske ruke. Ovi se uvjeti opterećenja elastične strukture mogu sastojati od djelovanja sila, momenata, raspoređenih opterećenja, te kao njihova kombinacija. Rješenje dinamičke jednadžbe za gibanje elastične ruke manipulatora HDOF na temelju AMM postupka se dobije kao linearna kombinacija produkta mogućih funkcija  $\phi_i(x)$  i vremenski ovisnih generaliziranih koordinata  $q_i(t)$ .

Opći pristup rješavanju modela Euler-Bernoulli za elastičnu konzolnu strukturu

$$EI \frac{\partial^4 \delta(x, t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 \delta(x, t)}{\partial t^2} = f_{ext}(x, t) \quad (8.27)$$

je u postupku diskretizacije i razdvajanju prostorne i vremenske zavisnosti elastičnog otklona u ovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi kroz relaciju  $\delta(x, t) = \phi(x)v(t)$ , gdje je  $\phi(x)$  oblik strukture uzrokovan vibracijama, a  $v(t)$  a amplituda. Tako se uvođenjem prostornog i vremenskog dijela dobiju nezavisne obične diferencijalne jednažbe na obje strane jednakosti [41]:

$$-\frac{EI}{\rho} \frac{d^4\phi(x)/dx^4}{\phi(x)} = \frac{d^2v(t)/dt^2}{v(t)} = \omega^2 \quad (8.28)$$

Također, obje strane su konstantne i to su sopstvene vrijednosti izražene kroz  $\omega^2$ . Lijeva strana izraza (8.28) je obična diferencijalna jednadžba sa prostornom varijablom  $x$ , pa se uvođenjem valnog broja

$$k_\omega = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho_b}{EI_z}} \quad (8.29)$$

dobije  $\frac{d^4\phi(x)}{dx^4} + k_\omega^4 \phi(x) = 0$  čija je karakteristična jednadžba  $\lambda^4 + k_\omega^4 = 0$ . Na desnoj strani jednakosti (8.29) je također obična diferencijalna jednadžba  $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \omega^2 v(t) = 0$  sa karakterističnim polinomom  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$  sa korijenima  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega^2}$ . Općenito se za određivanje svojstvene funkcije zahtijeva poznavanje parametara sustava.

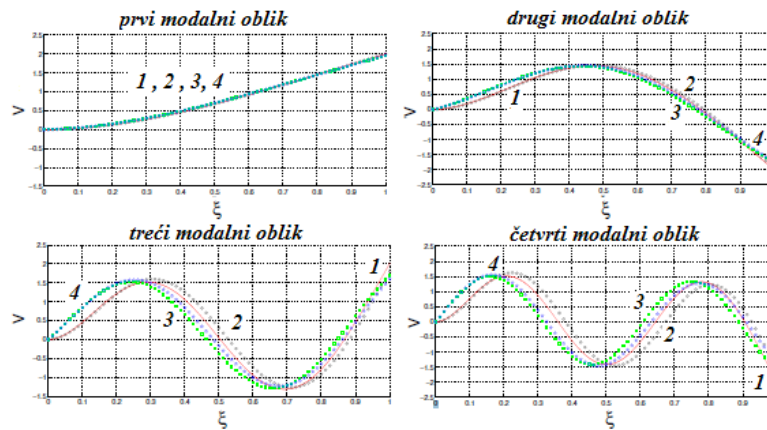
Granični problem se za planarni elastični konzolni nosač može rješavati na temelju modela sa spiralnom oprugom na jednom kraju, te teretom,  $m_L$  i inercijom,  $I_L$  na vrhu. Takav pristup rješavanju graničnog problema vodi rješavanju transcendentnih jednadžbi koje imaju neograničen broj korijena  $\beta_{L,r}$ ,  $\beta_L = k_\omega L$ . To znači da elastična struktura ima također neograničen broj prirodnih frekvencija  $\omega_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \infty$ . Ove su frekvencije:

$$\omega_r = \beta_{L,r}^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho_b L^4}} \quad (8.30)$$

Moguće je rješavanjem odgovarajuće hiperboličke jednadžbe naći funkciju modalnog oblika  $\phi_r(x)$  za svaku prirodnu frekvenciju  $\omega_r$ , što znači naći sve amplitude za rješenja problema graničnih vrijednosti slijedeći četiri postavljena granična uvjeta.

Eksperimenti potvrđuju da je doprinos viših modova na ponašanje elastične robotske strukture (engl. elastic deflection) neznatan. To znači da dinamiku ovih sustava dominantno određuje ograničen broj nižih modova. Na Slici 8.7 su za opći slučaj vibracija slobodnog dijela ruke dana prva četiri moda kao prikazi izdvojenih, a dominantnih oblika vibracijskog gibanja.





Slika 8.7 Prikaz prva četiri modalna oblika za elastičnu strukturu

Aproksimacija rješenja za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (8.27) temeljena na uvođenju modova po AMM postupku znači komponiranje rješenja u obliku:

$$\varpi(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (8.31)$$

gdje su:

- $\phi_i(x)$  unaprijed izabrane odgovarajuće bazne funkcije koje zadovoljavaju granične uvjete, te kao linearni nezavisni skup oblikuju približno modalne oblike za sustav,
- $q_i(t)$  generalizirane koordinate kao funkcije vremena kao modalni faktori participacije,
- $n$  predstavlja doseg modalne aproksimacije.

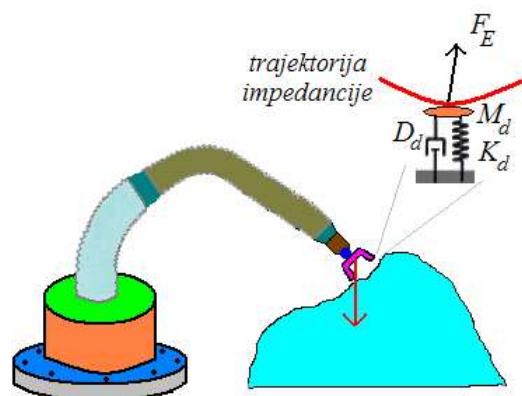
## 9 DODIR HDOF I OKOLINE

Rad industrijskih robota uvijek zahtijeva svako izbjegavanje fizičkog kontakta konstruktivnih dijelova njegove ruke s okolinom, osim kad njegov vrh s alatom obavlja specifične radne operacije kao što su uzimanje i odlaganje predmeta, točkasto zavarivanje, bušenje, brušenje, montaža, itd. Općenito se dinamički modeli ne-redundantnih krutih robota mogu opisati običnim diferencijalnim jednačinama, a onda se one mogu koristiti za upravljačke algoritme.

Suprotno je to kod HDOF sustava, jer je nemoguće da njegova duga zmijsolika ruka na primjer pri uvlačenju u dijelove naftnih postrojenja ili nuklearnih uređaja radi snimanja stanja, ne bude u fizičkom kontaktu s dijelovima tih energetskih sustava. U praktičnim primjenama bi čak ta ruka morala biti u stalnom dodiru sa stijenkama cjevovoda i sličnih okruženja. U ovakvim primjenama HDOF sustavi imaju ulogu makro-endoskopa, koji moraju kliziti po podlozi gdje ulaze, na sličan način kao što i medicinski uređaji u stalnom i najčešće tijesnom dodiru s organima pacijenata [13].

Ako ruka HDOF sustava kao mehanički sustav u radnom okruženju završnim uređajem/alatom ima fizički kontakt sa okolinom, onda se mora primijeniti upravljanje koje uvažava te kontaktne okolnosti, kao što je prikazano na Slici 9.1. To znači da se vrh robota mora prilagođavati radnoj okolini određenom silom djelovanja prema njoj, a što onda podrazumijeva upravljanje po položaju i po sili [38].

To je i logično, jer za kretanje robota u prostoru glavno je upravljanje po položaju, a manifestacija sila (i momenata) pri kontaktu robota sa predmetima iz vanjskog svijeta traži da se i to uzme u obzir. Kad bi postojao idealni model robota i idealni model radnog prostora, uključujući predmete za koje je na bazi tehnologije fizički vezan - moglo bi se realizirati upravljanje samo po poziciji. Međutim, tako nešto nije moguće, pa se još i sila mora uključiti u upravljački algoritam koji robota prilagođava okolini [37].



Slika 9.1 Prikaz elastičnih efekata kad je vrh robota u dodiru s okolinom

Svaka je redundantna robotska ruka jednostruki lanac brojnih elemenata (engl. serially linked segments), pri čemu nije moguće niti u jednoj konstrukciji izbjeći elastičnost te kompleksne strukture. A za kontinualne robotske ruke HDOF radi se u svim slučajevima o prostornim fizičkim njihovim. Ciljano postizanje elastičnosti ovih dugih artikuliranih mehanizama malog poprečnog presjeka radi veće gibljivosti u radnom prostoru prilikom izbjegavanja prepreka, je u suprotnosti sa stabilnošću tog mehanizma.

Nestabilnost HDOF robotske ruke, a što se manifestira kao vibracije i kaotična dinamika tokom gibanja i rada je cilj istraživanja iznesen u ovom Kvalifikacijskom radu.

Glavni uzroci vibracija kod HDOF robotske strukture su:

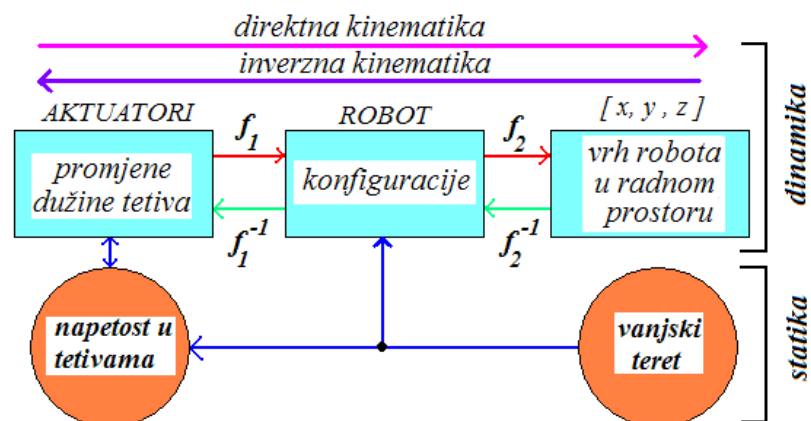
- elastičnost upravljačkog podsustava,
- elastičnost elemenata konstrukcije,
- postojanje zazora u vezama,
- postojanje mrtve zone u djelovanju tetiva,
- autoparametrijske pojave,
- ostali.

Potencijalna energija robotske ruke i energija tetiva su navedene na način da bi sugerirale kako je sustav prikazan na slici po strukturi jedna velika opruga, a tokom rada složeni sustav masa-prigušenje-opruga.

### 9.1 Fleksibilni robot između prepreka

Za koncept redundantnih robotskih manipulatora s krutim člancima su razvijene brojne metode za njihovo izbjegavanje prepreka, jer su i zamišljeni za rad u neuređenim radnim sredinama (engl. cluttering or confined environments). Robotski sustavi po HDOF konceptu (engl. biological continuum-style manipulator) su rezultat ideje da ulaze u nepoznate, zatvorene i krivudave prostore s preprekama, pa nije moguće njihovo kretanje bez djelimičnog ili potpunog dodira s okolinom u radnom prostoru. Zato je ispravno njihovo kretanje nazivati zmijolikim (engl. planar serpentine locomotion, slithering motion).

To se odnosi na koncept makro HDOF sustava tipa manipulatora i na fleksibilne robote drukčijeg dizajna, te na uređaje u medicini koji se vode kroz prirodne kanale u tijelu pacijenta, ili djelimično kroz samo tkivo. U oba slučaja je najdjelotvorniji koncept upravljanja sustavom tetiva za formiranje kontura (engl. desired curvature profiles) duž robotske ruke radi prilagođavanja uvjetima koje ambijent diktira. Na Slici 9.2 je shema upravljačkog lanca sa tri osnovne faze: programirano upravljačko (aktuatorsko) djelovanje na sustav tetiva – postizanje željene konfiguracije robota, tj. položaj i orijentacija vrha u prostoru, a uz dodatak koji predstavlja kompenzaciju statičkog opterećenja za strukturu robotske ruke.

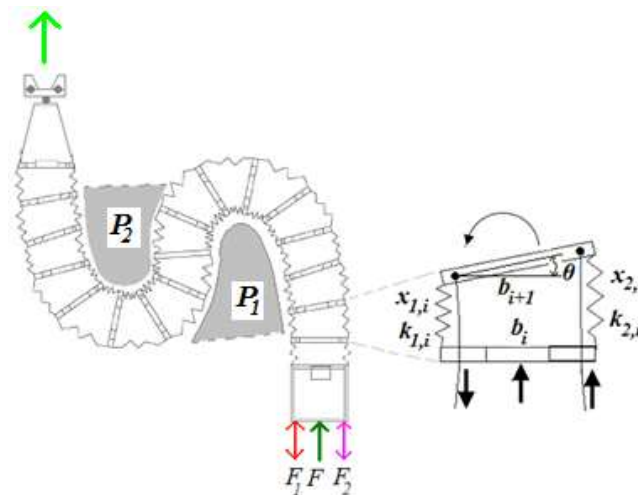


Slika 9.2 Tokovi enegije i upravljački impulsi kod HDOF sustava pogonjenog tetivama

Zato je važno analizirati modele HDOF sustava koji se gibaju između prepreka ili kroz njih, pošto je to u temelju ideje za dizajn ove vrste robota. U tim se slučajevima zahtijevanog složenog kretanja, radi se o simultanom djelovanju na tu strukturu na tri načina [36]:

- primjenjuje se određena (promjenljiva) sila na početku (bazi) HDOF sustava koja ga gura unutar radnog prostora kroz prepreke,
- tetivama iz baze se prilagođavaju makro-geometrijski oblici strukture ruke uvjetima koje stvara sustav prepreka,
- oblici radnog prostora kroz koji se gura HDOF robot se mogu koristiti za korekcije njegovih putanja.

Na slici 9.3 je dan simbolički prikaz gibanja HDOF planarne robotske ruke između prepreka  $P_1$  i  $P_2$  uz pomoć aksijalne sile  $F$  (guranja i izvlačenja) i djelovanja dvije upravljačke tetive  $F_1, F_2$  (engl. antagonistic cable pair). Dan je na slici također i  $i$  – ti segment takve kontinuum robotske ruke (engl. multisection continuum robot), kako bi to bio uvod u prikaz jedne metode u kojoj se analiziraju takvi slučajevi [25].



Slika 9.3 Prolazak HDOF ruke između prepreka  $P_1$  i  $P_2$

Za analizu elastičnosti robotske ruke tipa HDOF je važna potencijalna energija sustava  $U$  kao funkcija generaliziranih kordinata segmenata strukture  $[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ , a ravnotežni položaj  $[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]_{eq}$  se dobije minimizacijom funkcije  $U$ .

Za segment ( $i$ ) strukture se potencijalna energija vanjskog rebrastog omotača od gume modelira jednadžbom:

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{1,i} (x_{1,i})^2 + k_{2,i} (x_{2,i})^2 \quad (9.1)$$

Gdje su  $k_{1i}$  i  $k_{2i}$  konstante opruga za  $i$  – ti segment, a  $x_{1,i}$  i  $x_{2,i}$  njihove dužine, respektivno.

Uvodeći  $i$  – tu generaliziranu kordinatu kao funkciju dužina opruga, te uzimajući da je  $b_1 = b_2 = b$ , te  $k_1 = k_2 = k$ , energija opruga se može sad izraziti jednadžbom:

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (l_i^2 - b_i^2 \cos \theta_i) \quad (9.2)$$

A energija kojom dvije tetive djeluju silama  $F_1$  i  $F_2$  na sve segmente strukture

$$U_T = F_1 \left( \sum_{i=1}^n x_{1,0} - x_{1,i} \right) + F_2 \left( \sum_{i=1}^n x_{2,0} - x_{1,i} \right) \quad (9.10)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m k_o (P_{1,i} - r_o) \quad (9.11)$$

$$U_{tt} = U_s + U_t + U_c \quad (9.5)$$

Sika između dijela  $k$  robota i prepreke je:

$$F_C = k_e u_i \quad (9.6)$$

Kad je robot svojim dijelom  $k$  u dodiru s kružnom preprekom ( $i$ ) radijusa  $r_i$ , a rastojanje od površine robota i centra te prepreke je  $d_{i,k}$ , ta kontaktna sila je:

$$F_{i,k} = k_{e,i} (r_i - d_{i,k}) \quad (9.7)$$

Cijeli će sustav biti u ravnoteži kad funkcija potencijalne energije ima minimalnu vrijednost. U radu [25] je formiran algoritam na temelju sekvencijalnog kvadratnog programiranja (SQP) u Matlabu.

## 10 FLEKSIBILNI ROBOTSKI SUSTAVI I NJIHANJE ENERGIJE

Hiper-redundantni mehanizam koji ima ulogu robotske ruke je složeni fizički sustav sa distribuiranim parametrima i sa prirodnim nelinearnostima (engl. inherent nonlinearities) kao što su centripetalni efekti pri rotaciji i Coulomb-ovo trenje koji se moraju kompenzirati (engl. properly compensate nonlinearities). Također, važne upravljačke metode kao što je adaptivno i bang-bang upravljanje uvode i namjenske, namjerno aplicirane nelinearnosti (engl. artificial nonlinearities) radi suzbijanja vibracija ruke kao radne mehaničke strukture robota. Kod ovih robotskih sustava postoje i diskontinuirane nelinearnosti kao što je labavost veza (engl. backlash), povratna bifurkacija (engl. hysteresis), spojnost površina (engl. stiction) koje se ne mogu linearizirati.

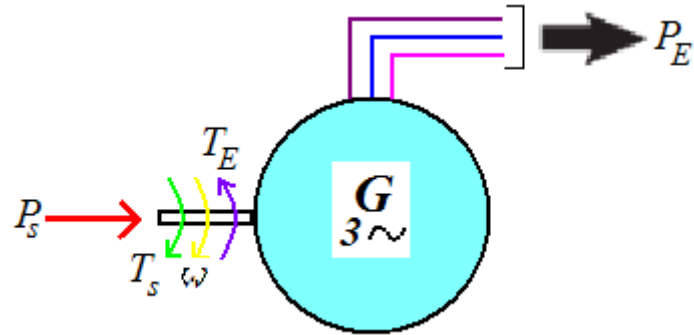
Sve ovo nabrojano, još uz elastične deformacije i promjenljivost parametara u tim sustavima su razlozi što nije moguće dinamički HDOF sustava, a što onda znači i njihovu stabilnost, cjelovito i jednoobrazno analizirati. Ovdje se iznosi ideja da se dinamika HDOF robotskog sustava analizira na temelju bitne sličnosti sa elektroenergetskim sustavom (EES) primjenom poznatih metoda za te električne sustave sa vezanim komponentama: sinkroni generator - prijenosna mreža - potrošačko područje [52].

Za uspostavljanje analogije između HDOF robotskog sustava i SMIB (jednostavnog EES – a) (engl. single machine infinite bus) se uvodi neautonomno njihalo kao važan primjer nelinearne dinamike uprkos maloj dimenzionalnosti i jednostavnosti [43]. Složene oscilacije i druge pojave su na tom jednostavnom modelu dobro istražene, pa se široko koriste za ispitivanja efekata vremenski periodičnih pobuda, kao i za ilustriranje parametarskih pobuda kod složenih sustava.

Iako je većina robotskih manipulatora građena u vidu lanca više zglobova i veza, nužno je stvarati modele za potpunije razumijevanje njihove dinamike kao posljedicu fizikalnih svojstava (engl. physically reasonable). Tako je modeliranje i analize temeljene na općim fizikalnim pojavama kod sustava s jednim stupnjem slobode, moguće proširiti i na složenije sustave i detektirati njihova kompleksna ponašanja [34].

Kako se jednostavni robot može aproksimirati pogonjenim njihalom, onda je korisno za analizu stabilnosti HDOF sustava istražiti pripadajuću jednadžbu drugog reda za njihala, nazvanu jednadžbom njihanja (engl. swing equation, SE). Slična jednadžba također ima važnu ulogu i u analizama stabilnosti elektroenergetskih sustava, pa se ovdje koristi za prikaz snažnog utjecaja prigušenja u sustavu na njegovu opću dinamiku danu u faznoj ravni [43].

Pojednostavljeni bilans u elektro-energetskom sustavima između proizvedene i isporučene energije na temelju dinamike sinkronog generatora [53] prikazan je na Slici 10.1.



Slika 10.1 Električni sinkroni generator s ulaznom  $P_s$  i izlaznom snagom  $P_E$

Prema oznakama na slici 10.1 SE je:

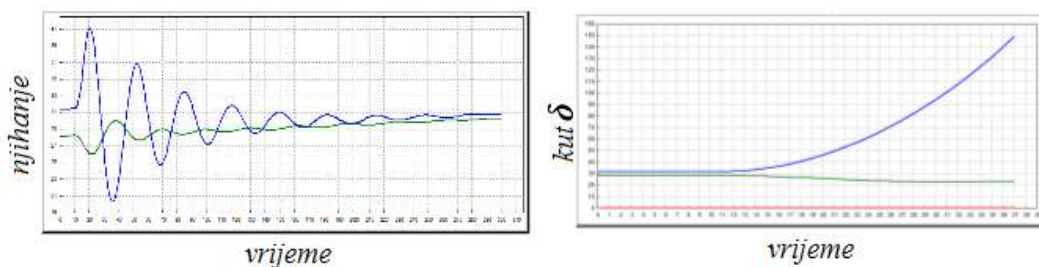
$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} + D \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e \quad (10.1)$$

gdje je:

- $\delta$  kutni položaj rotora,
- $M$  inercija rotirajućih masa (konstantna, 2H),
- $D$  koeficijent mehaničkog prigušenja,
- $P_m$  ulazna mehanička snaga,
- $P_e$  izlazna električna snaga,
- $P_m - P_e$  snaga ubrzanja rotora.

U stabilnom stanju, kad je  $P_m = P_e$ , kut rotora  $\delta$  kao indikator opterećenja je konstantan. Kad dođe do promjene  $P_m$  ili  $P_e$  usljed pogonskih ili mrežnih uvjeta, rotor neće biti u ravnoteži, nego će na njega djelovati snaga ubrzanja. Tada će prema jednadžbi (10.1) doći do oscilacija u sustavu radi promjene vrijednosti kuta  $\delta$ , koji je temeljni indikator stabilnosti sustava [30].

Na Slici 10.2 su dani opći prikazi njihanja i porast kuta  $\delta$  kao elektromehaničkog oblika nestabilnost u sustavu generator – električna mreža (potrošnja).



Slika 10.2 Njihanje sustava (lijevo) i porast kuta  $\delta$  tijekom oscilacija (desno)

S obzirom na veliku sličnost u pogledu tijeka i lanca transformacija energije između sinkronog stroja povezanog na zbirnice električne mreže (EES) i HDOF robotskog sustava, moguće je ispitati stabilnost HDOF sustava na temelju SE.

Jednadžba njihanja će ovdje biti analizirana u polaznom obliku [11]:

$$\frac{2H}{\omega_R} \ddot{\theta} + D\dot{\theta} = P_m - \frac{V_G V_B}{x_G} \sin(\theta - \theta_B) \quad (10.2)$$

gdje je  $\theta$  kut rotora u generatoru,  $\omega_R$  kružna brzina,  $H$  inercija rotora,  $D$  prigušenje,  $P_m$  pogonska mehanička snaga, a zadnji izraz na desnoj strani je izlazna električna snaga.

Radi pretvaranja jednadžbe (10.2) u sustav od dvije jednadžbe prvoga reda, uvode se smjene  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ , pa slijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -D_{c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_{m c_1} - c_3 \sin(x_1 - \theta_B) \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

gdje je izvršena zamjena:

$$c_1 = \frac{\omega_R}{2H} \quad (10.3a)$$

$$c_3 = \frac{V_G V_B}{x_G} c_1 \quad (10.3b)$$

Za slobodne oscilacije rotora sinhronog generatora je:

$$V_B = V_{B0} i \theta_B = \theta_{B0} \quad (V_{B0} = const.; \theta_{B0} = const.) \quad (10.4b)$$

Zamjenom (10.4) u (10.3) se može naći da svaka fiksna točka  $(x_{10}, x_{20})$  u (10.3) zadovoljava uvjet  $x_{20} = 0$ , te također

$$\sin(x_{10} - \theta_{B0}) = \frac{P_m c_1}{c_3} \quad (10.5)$$

Ako se pretpostavi da se za različite parametre može primijeniti nejednakost  $\left| \frac{P_m c_1}{c_3} \right| \leq 1$ , tada postoji bezbroj rješenja za  $x_{10}$ . U nastavku postupka će se ispitati tri moguća rješenja:

$$x_{10}^{(1)} = \arcsin\left(\frac{P_m c_1}{c_3}\right) + \theta_{B0} \quad (10.6a)$$

$$x_{10}^{(2)} = \pi - x_{10}^{(1)} \quad (10.6b)$$

$$x_{10}^{(3)} = -(\pi + x_{10}^{(1)}) \quad (10.6c)$$

Stabilnost fiksne točke je određena vlastitim vrijednostima  $\lambda_i$  matrice:

$$D_x F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_3 \sin(x_{10} - \theta_{B0}) & -D_{c_1} \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

Ove vlastite vrijednosti su za matricu (10.7) dane sa:



$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -Dc_1 \pm \sqrt{D^2c_1^2 - 4c_3 \cos x_{10} - \theta_{B0}} \right) \quad (10.8)$$

Ovaj postupak traženja vlastitih vrijednosti vodi skupovima trajektorija, odnosno prikazu kvalitativnih rješenja za analizirani sustav (10.1) u obliku grafičke interpretacije, jer nije moguće analitički odrediti njegova rješenja. To onda znači da se na temelju takvog faznog portreta za sustav dobiju važne informacije o njegovoj dinamici.

Fiksne točke znače stacionarna stanja, ali su i izraz važnih fizikalnih svojstava dinamičkog sustava. One imaju postojane vrijednosti, ali se kvalitativna slika sustava, što znači i stabilnost fiksnih točaka, mijenja u zavisnosti od vrijednosti njegovih parametara. Vrijednosti parametara na kojima dolazi do kvalitativnih promjena dinamike su bifurkacijske točke. Općenito su u ravni homokliničke orbite povezane sa sedlima, dok su heterokliničke orbite povezane sa hiperboličkim ravnotežnim točkama kao što su sedlo-sedlo, čvor-sedlo i spirala-sedlo. Fazne putanje koje se pridružuju jednom sedlu ili spajaju dva različita sedla poznata su kao veze sedla (engl. saddle connection) [33].

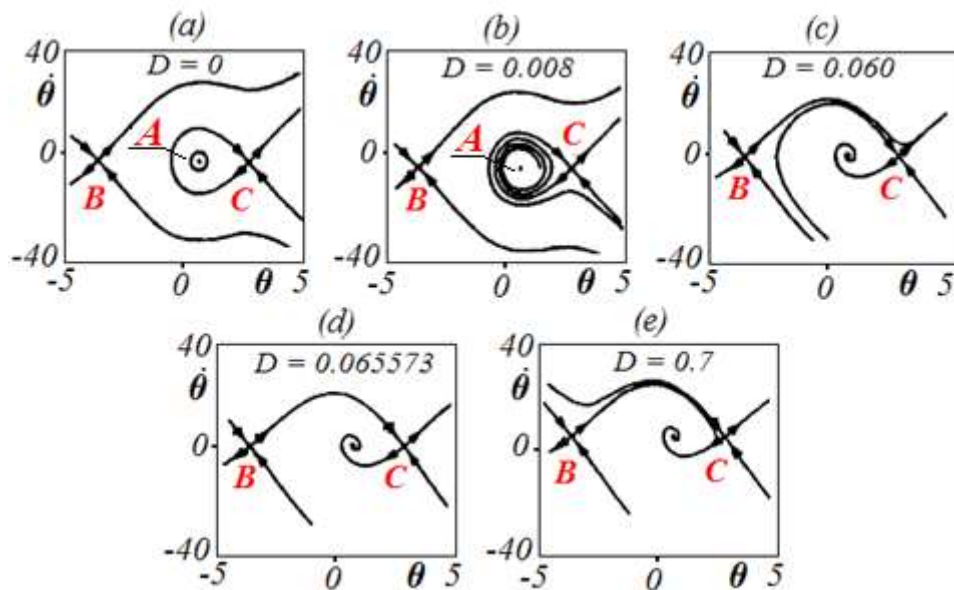
Prezentirani primjer može korisno poslužiti u razvijanju jednog pravca za istraživanje nekih aspekata stabilnosti HDOF sustava. Moguće je na ovaj način iskoristiti eksperimentalne rezultate za neki prototip HDOF robota, pa kvalitativnim pristupom ove vrste analizirati njegovu dinamiku.

Za prikaz faznog portreta sustava (10.2) u faznoj ravni su u [11] dane ove brožčane vrijednosti za parametre:

$$H = 2.37; V_{B0} = 1; V_G = 1.27; \theta_{B0} = 0 \quad (10.9a)$$

$$P_m = 1; X_G = 0.645; \omega_R = 120 \pi \quad (10.9a)$$

Za navedene vrijednosti parametar postoje tri fiksne točke A, B i C. Ako je sustav bez prigušenja ( $D = 0$ ) onda su točke B i C sedla, a A je centar. To znači da su točke B i C nestabilne zbog postojanja vlastitih vrijednosti i sa pozitivnim realnim dijelom, a točka A se gubi sa pojavom prigušenja. Kada je  $D > 0$ , B i C ostaju i dalje sedla, a od A kao nehiperboličke točke prvo nastaje asimptotički stabilna fiksna točka fokus.



Slika 10.3 Fazni portreti jednadžbe (10.2) za parametre (10.9) i promjenljivo prigušenje  $D$

Na Slici 10.3 (a) – (e) su prikazane mnogostrukosti tipa sedlo (B, C) na temelju zadanih vrijednosti parametara i za različite vrijednosti prigušenja  $D$  u polaznoj jednadžbi (10.2). Pojedinačno po grafovima sa Slike 10.3 su uočljive sljedeće pojave:

- (a): homoklinička orbita inače svojstvena konzervativnim dinamičkim sustavima nije narušena, jer nema prigušenja u sustavu,  $D = 0$  (engl. undamped case),
- (b): stabilna je mnogostrukost C, a B je nestabilna, pri čemu C određuje stabilnost A (engl. damping is included),
- (c): C i B se približavaju s povećanjem prigušenja  $D$  (engl. damping is increased),
- (d): formiranje heterokliničke polu-orbite kao mogućeg znaka oscilacija,
- (e): heteroklinička orbita je nestala što pokazuje nemogućnost nastajanja oscilacija u sustavu usljed intenzivnijeg prisustva prigušenja,  $D = 0.7$ .

Ovaj kvalitativni vid analize je vrlo pogodan za razumijevanje uvjeta stabilnosti nelinearnih sustava kao što je HDOF robot, jer je stabilnost njegove ruke ovisna o stupnju prigušenja. Korištenje analogije između njihala sa pobudom (engl. driven planar pendulum) i elastične ruke HDOF robota i opis njihove dinamike diferencijalnom jednadžbom drugog reda (10.1) omogućena je korisna analiza dinamike u faznoj ravni.

Općenito dvodimenzionalni sustavi pokazuju ponašanja koja su određena prirodom točaka ravnoteže, periodičnim orbitama, graničnim ciklusima, itd., pri čemu promjene vrijednosti parametara generiraju evoluciju sustava. Dostizanje kritičnih vrijednosti parametara dovodi do bifurkacija kao kvalitativnih dinamičkih skokova. U prikazanom primjeru su dominantne nestabilne fiksne točke tipa sedlo, koje su nestabilne u vremenu i naprijed i nazad, pa su to korisne indicije za stabilnost HDOF sustava koji se tokom približavanja radnoj zoni mora pomicati u svim smjerovima tražeći prolaz. Hopfova bifurkacija je posebno važan tip bifurkacije koji je karakterističan po tome što se manifestira u sustavima dimenzije najmanje 2, a bifurkacijsko rješenje je granični ciklus kao izolirana orbita. Također je važno svojstvo ove bifurkacije u tome što su vlastite vrednosti lineariziranog sustava konjugirano-kompleksne. Hopf-ova bifurkacija je posebno važna u analizama stabilnosti za elektroenergetske sustave, a koje je moguće primijeniti i u definiranju područja stabilnosti za HDOF sustave [33].

## 11 ZAKLJUČAK

HDOF sustavi se nisu afirmirali u komercijalnoj sferi kao robotski manipulatori, npr. za rad u industriji i na drugim poslovima. Tri su glavna razloga za to: (1) postoje brojne tehničke prepreke da se realiziraju kao upotrebljiv robotski sustav, (2) ne postoje poslovi na kojima bi se afirmirali kao dobar izbor radnog stroja i (3) mobilni roboti su pogodniji za najveći broj poslova za koje se pretpostavljalo da će ih obavljati HDOF roboti (ulazak u stiješnjene prostore itd.).

Ipak su u specijalnim mikro-izvedbama kao uređaji za dijagnostiku, neinvazivnu kirurgiju (MIS) i druge primjene u medicini, kao što su rehabilitacijski tretmani (engl. rehabilitative applications), HDOF sustavi dragocijen dio instrumentacije.

Bilo da su to primarni dizajnerski ciljevi ili neželjena posljedica visokog stupnja gibljivosti kao kod HDOF sustava (engl. undesirable effects), istraživanja elastičnih robotskih ruku su vrlo atraktivna i za robotiku iznimno korisna. Brojni i kvalitetni stručni radovi i modeli u ovom segmentu robotike su je i preobrazili iz tehničke u tehničko-znanstvenu i multidisciplinarnu oblast.

Cilj ovog istraživanja u oblasti redundantnih, a posebice hiper-redundantnih robota, su problemi stabilnosti njihovih elastičnih ruku kao radnih mehaničkih struktura. Rezultati potvrđuju da nije moguće konstruirati i u praksi primijeniti manipulatore ni niskog, a poglavito visokog stupnja redundancije.

Uz velike teškoće u fazama matematičkog modeliranja, gradnje i upravljanja svim kategorijama robota sa fleksibilnim rukama, njihova slaba nosivost, preciznost i opća nestabilnost su dodatne nepremostive prepreke da bi bili korisni strojevi.

Kako općenito za nelinearne dinamičke sustave nije moguće naći rješenja u zatvorenom obliku, tako nije moguće ni za HDOF sustave izgraditi jedinstven pristup modeliranju njihove dinamike. Jedino im je moguće fragmentarno i mozaično istraživati svojstva, što znači samo za određene konfiguracije i izdvojene dinamičke uvjete. Prije svega se radi o kvalitativnim pristupima, o analizama u faznoj ravni, o Poincaré-ovom preslikavanju, bifurkacijskim fenomenima, te o drugim tehnikama poznatim iz nelinearne dinamike. Također, moraju se koristiti modeli tipa Mathieu-Hill, van der Pol, Mackey-Glass, logistički model, Ljapunovljeva teorija stabilnosti, kaotični fenomeni, itd.

Na principu energetske analogije i konjugacije je moguće primijeniti određene postupke za stabilnost elektroenergetskih sustava također i za HDOF sustave.

Suvremene metode iz domena nelinearne dinamike bi istraživačke pristupe dinamici hiper-redundantnih i općenito elastičnih robotskih ruku podigle na viši nivo, ali ne bi manipulatore ove vrste uvele u industrijske i druge primjene.

## 12 LITERATURA

- [1] Neppalli, S.; Jones, B. A.: "Design, Construction, and Analysis of a Continuum Robot", Mississippi State University, 2007.
- [2] Hirose, S.; Mori., M.: "Biologically inspired snake-like robots", IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, ROBIO, 2004.
- [3] Walker, I. D.: „Biologically Inspired Trunk and Tentacle Robots“, Clemson University, 2012.
- [4] Webster, R.J. III; Jones, B.A.:“ Design and Kinematic Modeling of Constant Curvature Continuum Robots: A Review“, The International Journal of Robotics Research 29 (13), 2010.
- [5] Lynch, K.M.; Park. F.C.: „Modern Robotics, Mechanics, Planning, and Control“, Cambridge University Press, 2017.
- [6] Hannan, M. W., Walker, I. D.: „Kinematics and the implementation of an elephant's trunk manipulator and other continuum style robots“, Journal of Robotic Systems 20.2: 45-63, 2003.
- [7] Ouyang, W. i dr.: „Steering motion control of a snake robot via a biomimetic approach“, FITEE, 2019.
- [8] Shoushtari, A. L.; Mazzoleni, S.; Dario, P.: “Bio-inspired kinematical control of redundant robotic manipulators”, Assembly Automation, 2016.
- [9] Chirikjian, G. S.: „Hyper-redundant manipulator dynamics: a continuum approximation“, Advanced Robotics 9.3, 217-243., 1994.
- [10] Bandala, A. A.; Orillo, J. W. F.: “Developmet of a flexible serpentine robot for disaster surveillance operations”, Jurnal Teknologi, Penerbit UTM Press, 2016.
- [11] Ryan, C. i dr.: „Design and Preliminary Testing of a Continuum Assistive Robotic Manipulator“, University Wisconsin-Stout, 2019.
- [12] Burgner-Kahr, J. i dr.: „Continuum Robots for Medical Applications: A Survey“, IEEE, 2015.
- [13] Ferenbach, D.: „Modelling and Control of a Flexibile Structure for Robotic Surgery“, doktorska disertacija, 2015.
- [14] Simaan, N. i dr.: “Medical Technologies and Challenges of Robot Assisted Minimally Invasive Intervention and Diagnostics”, Review in Advance, 2018.
- [15] Takahisa, T. i dr.: „Tendon-driven Conttinuum Robot for Neuroendoscopy: Validation of Extended Kinematic Mapping for Hysteresis Operation“, HHS Public Access, 2016.

- [16] Nikolaos, C. C. i dr.: „Modeling, simulation and experimental validation of a tendon driven soft-arm robot configuration – a continuum mechanics method“, IEEE, IROS, Macau, 2019.
- [17] Mohsen, M. D. i dr.: „An Analytical Loading Model for n – Tendon Continuum Robots“, IEEE, 2018.
- [18] Verhulst, F.: "Perturbation analysis of parametric resonance", Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer New York, 6625-6639., 2009.
- [19] Miwadinou, C. H.; Monwanouyand, A. V.; Orou, J. B.: “Parametrics Resonances of a Forced Modified Rayleigh-Duffing Oscillator”, Institute de Mathematiques et de Sciences Physiques, Benin, 2018.
- [20] Rezig, A.; Ouali, M.: “Suppressing Borng Bar Vibrations by Parametric Exication”, Algeria, 2012.
- [21] Sofroniou, A.; Bishop, S.: “Dynamics of a Parametrically Excited System with Two Forcing Terms”, Mathematics, 2 (3), pp. 172-195., 2014.
- [22] Fossen, T. I.; Nijmeijer, H.: “Parametric Resonance in Dynamical Systems”, Springer Science & Business Media, 2011.
- [23] Rand, R. H.: "Lecture notes on nonlinear vibrations", Cornell University, 2012.
- [24] Thomsen, J. J.: “Chaotic vibrations of non-shallow arches”, Journal of Sound and Vibration, 1992.
- [25] Moon, F. C.: „Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers“, John Wiley & Sons. Inc., 2004.
- [26] Glumac, Z.: „Klasična mehanika“, Publisher, 2016.
- [27] Nayfeh., A. H.; Alachandran, B.: „Applied Nonlinear Dynamics“, Wiley – VCH, 2004.
- [28] Vukić, Z.; Kuljača, Lj.; Đonlagić, D.; Tešnjak, S.: „Nonlinear Control Systems“, Univerzitet u Zagrebu, Taylor Francis Inc. SAD, 2003.
- [29] Robinett, R. D. III i dr.: „Flexible Robot Dynamics and Controls“, Springer, 2002.
- [30] Behal, A. i dr.: „Lyapunov-Based Control of Robotic Systems“, CRC Press, 2010.
- [31] Szuminski, P.; Kapitaniak, T.: “Nonlinear Control and Chaotic Vibrations of Perturbed Trajectories of Manipulators”, Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems, Vol. 2, 2012.
- [32] Slotine, J. J. E.; Li, W.: “Applied Nonlinear Control”, Prentice Hall, 1991.

- [33] Seydel, R.: "Practical Bifurcation and Stability Analysis", Interdisciplinary Applied Mathematics 5, Springer Science & Business Media, LLC, 2010.
- [34] Layek, G. C.: "An Introduction to Dynamical Systems and Chaos", Springer, 2015.
- [35] Lewis, F. L.; Dawson, D. M.; Abdallah, C. T.: „Robot manipulator control: theory and practice“, CRC Press, 2003.
- [36] Bakker, Daan L., et al. "Design of an environmentally interactive continuum manipulator." Proc. 14th World Congress in Mechanism and Machine Science, IFToMM. 2015.
- [37] Jiang, Z. H.: „Impedance Control of Flexible Robot Manipulators“, Hiroshima Institute of Technology Japan, 2008
- [38] Kang, R. i dr.: "Design of a Pneumatic Muscle Based Continuum Robot with Embedded Tendons", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2016.
- [39] Thompson, J.M.T.; H.B. Stewart: „Nonlinear Dynamics and Chaos“, J. W. & Sons Ltd., 2002.
- [40] Shabana, A. A.: „Theory of Vibration: An Introduction“, Springer, 1995.
- [41] Tokhi, M. O.; Azad, A. K. M.: „Flexible Robot Manipulators: Modelling, Simulation and Control“, The Institution of Engineering and Technology“, UK, 2017.
- [42] Skiadas, C. H.; Skiadas, C.: "Chaotic Modelling and Simulation, Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms", CRC Press, 2009.
- [43] Bucklaew, T. P.; Liu, C. S.: "Pitchfork-type bifurcations in a parametrically excited, PD-controlled pendulum or manipulator", Journal of Sound and Vibration, 2000.
- [44] Jelger, H.: „Nonlinear Beam Mechanics“, doktorska disertacija, Technische Universiteit Delft, 2012.
- [45] Veysel, A.: „Optimal design of the transversely vibrating Euler-Bernoulli beams segmented in the longitudinal direction“, Indian Academy of Sciences, 2019.
- [46] Rafiee, M. i dr.: „Dynamics, vibration and control of rotating composite beams and blades: A critical review“, Elsevier, 2017.
- [47] Mansour, T.; Konno, A.; Uchiyama, H.: "Vibration Based Control for Flexible Link Manipulator“, Tohoku University, Japan, 2010.
- [48] Záda, V.; Belda, K.: "Robot control in terms of Hamiltonian mechanics", Proc. Int. Conf. on Engineering Mechanics, 2016.

- [49] Almeida, F. i dr.: „Force-impedance Control of Robotic Manipulators“, 2000.
- [50] Xie, H. i dr.: „A geometric approach for follow-the-leader motion of serpentine manipulator“, International Journal of Advanced Robotic Systems, 2019.
- [51] Y. Yang i dr. „Graphene-Based Light-Driven Soft Robot with Snake-Inspired Concertina and Serpentine Locomotion“, Adv. Mater. Technol., 2019,
- [52] Sadamoto, T. i dr.: “Dynamic Modeling, Stability, and Control of Power”, Tokyo Institute of Technology, 2018.
- [53] Gibbard, M. J. i dr.: „Small-signal stability, control and dynamic performance of power systems“, The University of Adelaide, 2015.

## 13 SAŽETAK

U ovom Kvalifikacijskom radu je napravljen prikaz istraživanja o robotskim sustavima s velikim brojem stupnjeva slobode kojima je svojstvena i fleksibilnost.

Znanstveni doprinos u istraživanju dinamičkih svojstava hiper-redundantnih robotskih sustava (HDOF) i drugih vrsta fleksibilnih robotskih ruku je izražen u traženjenju jednog novog pristupa njihovom proučavanju, onog koji nije utemeljen ni na klasičnoj mehanici Newton-a, ni na Lagrangeovim i Hamilton-ovim jednadžbama temeljenim na energiji sustava, nego na raznim aspektima nelinearne dinamike.

Koncept redundantnih i hiper-redundantnih robota nije samo evolucijski pomak u robotici, nego to znači i ulazak u znanstvena područja specifične nelinearne dinamike, odnosno područje nedeterminizma, kompleksnosti, kaotičnosti. Dizajn robotskih strojeva čiji je mehanički dio (ruka) fleksibilan i nestabilan je u suprotnosti sa temeljnim zahtjevima koje roboti kao radni strojevi moraju ispunjavati.

Za ove sofisticirane robotske sustave, temeljene na bio-inspiracijama istraživača, ne mogu postojati praktična inženjerska rješenja. To znači da se u procese industrijske proizvodnje ili drugih radnih angažmana ne mogu učinkovito koristiti robotski sustavi građeni po uzoru na zmije, surle slona, krakove hobotnice i slično.

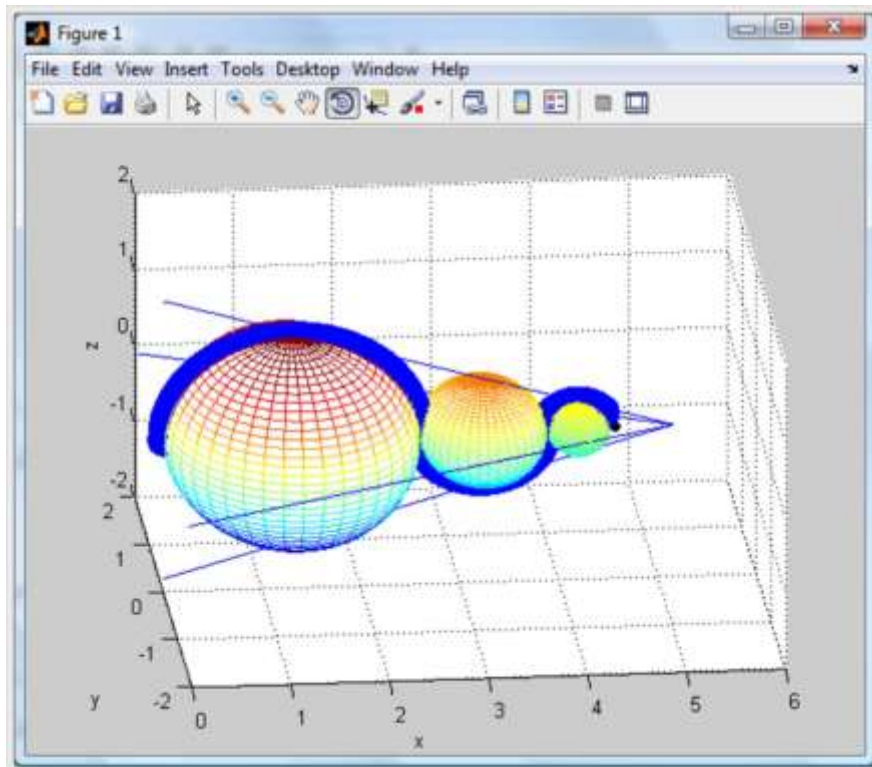
Probleme modeliranja, gradnje, upravljanja i afirmacije na tržištu fleksibilnih robota svih kategorija ne može uspješno riješiti ni neka nova paradigma čiji bi glavni okvir činile suvremene metode nelinearne dinamike. Za teorijska istraživanja je ovo područje robotike vrlo izazovno, ali ovako sofisticirani roboti ne mogu ispunjavati ni temeljne zahtjeve u pogledu radnih performansi svojstvenim svakom robotskom sustavu.



## 14 DODATAK

### 14.1 Demonstracija rada HDOF sustava u MATLAB-u

U ovome poglavlju je predstavljen prikaz kretanja HDOF sustava u softverskom paketu MATLAB. U svrhu te demonstracije su kreirane dvije MATLAB skripte čijim izvršavanjem u komandnom prozoru MATLAB-a se pokreće animacija sa primjerima upravljanja kretanja hiper-redundantnog robota u 3D prostoru.



*Slika 14.3 Primjer upravljanja kretanjem HDOF robota pomoću predloženog algoritma u 3D prostoru*