

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I  
BRODOGRADNJE**

**POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ STROJARSTVA**

**KVALIFIKACIJSKI ISPIT**

**METODE ADAPTIVNOG PROFINJAVANJA  
I STRUKTURALNE OPTIMIZACIJE  
TEMELJENE NA IZOGOMETRIJSKOJ  
ANALIZI**

**Anđela Bartulović**

**Split, svibanj 2020.**



# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Izogeometrijska analiza</b>	<b>3</b>
<b>2.1. Parametrizacija geometrije</b>	<b>4</b>
2.1.1. B-Spline krivulje i plohe	5
2.1.2. NURBS krivulje i plohe	5
<b>2.2. Spline kao osnova numeričke analize problema linearne elastičnosti</b>	<b>6</b>
<b>2.3. Usporedba izogeometrijske analize sa klasičnom metodom konačnih elemenata</b>	<b>9</b>
<b>3. Adaptivne metode profinjavanja izogeometrijske mreže</b>	<b>12</b>
<b>3.1. Strategije adaptivnog profinjavanja mreže</b>	<b>13</b>
3.1.1. Hijerarhijski B-spline	14
3.1.2. Hijerarhijski B-spline sa skraćenom bazom	16
<b>3.2. Procjena greške</b>	<b>18</b>
<b>3.3. Strategije označavanja</b>	<b>19</b>
<b>3.4. Implementacija HB-splineova i THB-splineova u izogeometrijskoj analizi</b>	<b>20</b>
3.4.1. Pregled literature	22
<b>4. Izogeometrijska analiza u kontekstu optimiranja struktura</b>	<b>32</b>
<b>4.1. Opća matematička formulacija problema strukturalne optimizacije</b>	<b>33</b>
<b>4.2. Optimizacijske metode</b>	<b>35</b>
<b>4.3. Optimizacija oblika</b>	<b>38</b>
4.3.1. Pregled literature	38
<b>4.4. Optimizacija topologije</b>	<b>40</b>
4.4.1. Level set metode	41
4.4.2. Pregled literature	44
<b>5. Izazovi u istraživanju i smjernice za budući rad</b>	<b>51</b>

**LITERATURA**

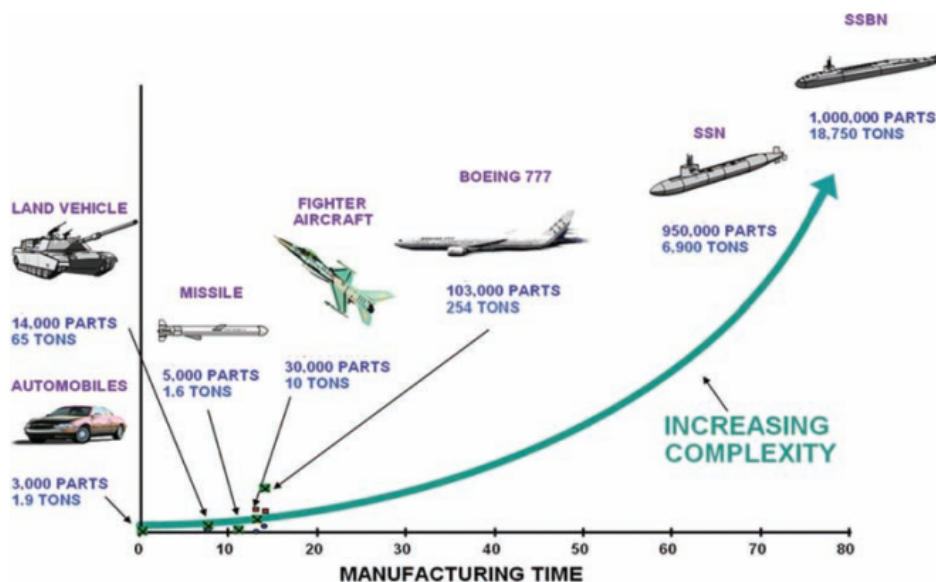
**53**

**SAŽETAK**

**58**

# 1. Uvod

U današnje vrijeme, računala su neizostavan dio inženjerskog projektiranja. Projektiranje kao inženjerska disciplina samo po sebi je multidisciplinarno: podrazumijeva računalno modeliranje, numeričko rješavanje parcijalnih i običnih diferencijalnih jednadžbi te često i optimiranje. Kod provođenja numeričkih analiza, oko 80% od ukupnog vremena potrebnog za analizu potroši se na prevođenje geometrije iz računalnog modela u model prikladan za analizu. Ovaj segment projektiranja je izuzetno bitan, pogotovo ako se uzme u obzir da inženjerski modeli postaju sve složeniji, a posljedično i numeričke analize postaju kompleksnije i vremenski zahtjevnije, slika 1.1. Potreba za prilagođavanjem računalnog modela numeričkoj analizi (konkretno, metodi konačnih elemenata) posljedica je zasebnog razvijanja tih dviju disciplina; iako je riječ o istim objektima, matematički zapis geometrija je u potpunosti drugačiji. U novije vrijeme, skupina istraživača predložila je novi koncept izogeometrijske analize, koja za cilj ima ujediniti te dvije discipline [1, 2]. Osnovna ideja izogeometrij-



Slika 1.1: Dijagram složenosti inženjerskih modela i potrebnog vremena za proizvodnju [2]

ske analize je korištenje egzaktna geometrije računalnog modela za numeričku analizu, a ne aproksimirane kao što je slučaj u metodi konačnih elemenata. To je postignuto korištenjem NURBS i B-Spline baznih funkcija (koje su gotovo pa standard u alatima računalnog modeliranja), kao baznih funkcija za aproksimaciju polja od interesa u numeričkoj analizi, te su se zbog svojih dobrih matematičkih svojstava pokazali kao dobra alternativa baznim

funkcijama metode konačnih elemenata. Jedan od nedostataka kod korištenja NURBS i B-Spline funkcija je nemogućnost lokalnog i adaptivnog profinjenja mreže, zbog njihove tenzor produkt prirode. U tu svrhu, razvijene su strategije adaptivnog profinjavanja mreže koje se temelje na drugim parametrizacijama, poput T-Splineova, PHT-Splineova, LR-Splineova ili na hijerarhijskom pristupu.

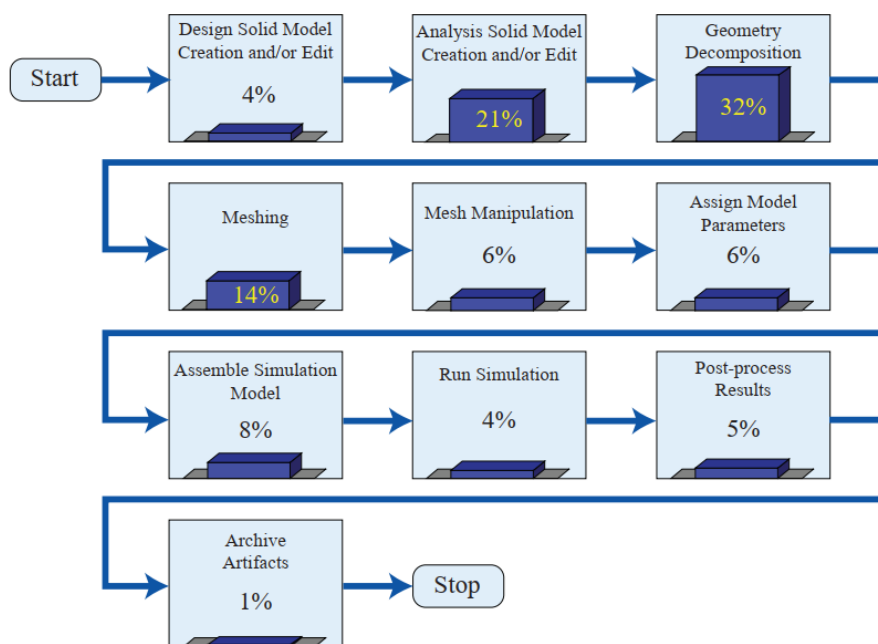
Strukturalna optimizacija je iterativan postupak koji podrazumijeva postupke računalne mehanike, budući da je funkcija cilja sustava koji se optimira najčešće opisana parcijalnim diferencijalnim jednačbama. Problemi strukturalne optimizacije tipično se mogu podijeliti u tri kategorije: optimizacija veličina, optimizacija oblika te optimizacija topologije. Budući da je riječ o iterativnom procesu u kojem je iterativno potrebno i rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi, metode izogeometrijske analize pogodne su i kod optimiranja struktura: mreža elemenata je implicitno ugrađena u geometrijski zapis te nema potrebe za premrežavanjem i prilagođavanjem geometrija analizi, a kontrolne točke parametarskog zapisa geometrije se ujedno nameću i kao logičan odabir za varijable optimiranja. Kako kod izogeometrijskih metoda profinjavanjem mreže geometrija ostaje nepromijenjena, moguć je i odabir relativno malog broja varijabli optimiranja korištenjem kontrolnih točaka koje određuju 'grubu' mrežu, dok se korištenjem 'fine' mreže za analizu postiže određena točnost diskretizacijskog modela.

Ovaj kvalifikacijski rad daje pregled strategija adaptivnog profinjavanja mreže u izogeometrijskoj analizi te pregled metoda strukturalne optimizacije koje za rješavanje paricijalnih diferencijalnih jednačbi također koriste izogeometrijske metode.

U poglavlju 2 opisana je B-Spline parametrizacija i njeno racionalno proširenje, odnosno NURBS. Nadalje, dati su izrazi za primjenu izogeometrijske analize za problem linearne elastičnosti, te u konačnici usporedba izogeometrijskih metoda sa klasičnom metodom konačnih elemenata. U poglavlju 3 opisane su neke od strategija adaptivnog profinjavanja mreže te njihova implementacija u izogeometrijskim metodama, s naglaskom na hijerarhijskim splineovima i hijerarhijskim splineovima sa skraćenom bazom, te je u poglavlju 3.4.1 dat kratki pregled značajnijih radova iz tog područja istraživanja. Sljedeće poglavlje, poglavlje 4, obrađuje područje istraživanja izogeometrijskih metoda u problemima strukturalne optimizacije, te se poseban naglasak stavlja na topološku optimizaciju, konkretno level-set metode. Dat je i kratki pregled relevantne literature iz tog područja istraživanja. U poglavlju 5 ukratko su izneseni izazovi i smjernice za daljnje istraživanje, kao i sam zaključak.

## 2. Izogeometrijska analiza

Izogeometrijska analiza je relativno nov pojam kad je riječ o numeričkim metodama. Riječ je o inženjerskoj metodi kojoj je cilj integracija alata za opis geometrije i alata za numeričku analizu u svrhu smanjivanja sveukupnog vremena potrebnog za analizu modela. Primjerice, kod strukturne analize metodom konačnih elemenata (za prosječno složen problem), oko 80% ukupnog vremena analize potroši se za geometrijski dio (generiranje modela i mreže). Od tog vremena samo 20% otpada na generiranje numeričke mreže, a preostalih 60% vremena otpada na takozvanu 'pripremu geometrije' [2], odnosno drugim riječima na geometrijsko opisivanje modela na analizi svojstven način, slika 2.1. Takva mreža konač-



Slika 2.1: Procjena relativnog utroška vremena po komponentama generiranja modela za analizu i procesa analize, prema podacima Nacionalnog laboratorija Sandia, preuzeto iz [2]

nih elemenata samo je aproksimacija CAD geometrije, čime je već u startu uvedena greška u rezultat. Iako je čest slučaj u praksi da je ta greška zanemariva, u raznim specijalnim slučajevima male geometrijske 'nesavršenosti' koje su posljedica aproksimacije stvarne geometrije imaju značajan utjecaj na točnost rezultata, kao primjerice kod proračuna izvijanja tankostijenih konstrukcija, proračuna rubnog sloja kod aerodinamičnih i hidrodinamičnih

konfiguracija itd. Osim toga, jaz između zapisa geometrije i diskretizacije polja problema je još dublji ako u cjelokupni proces računalom potpomognutog inženjerstva uključimo i dodatne module koji pretpostavljaju iterativne procese, poput optimizacije oblika, topologije i sl.

Iako ideja o korištenju egzaktnog geometrijskog zapisa (tj. *spline*-ova) u kontekstu analize postoji od prije (npr. [3], [4]), pravu revoluciju u numeričkim metodama je 2003. godine na sveučilištu u Austenu u Texasu sa svojim timom pokrenuo Thomas J. Hughes [1], te prvi put uveo i na neki način brendirao pojam izogeometrijske analize. Kako je rečeno, CAD (eng. *Computer Aided Design*) i FEA (eng. *Finite Element Analysis*) za istu geometriju imaju drugačije matematičke zapise, te je Hughes tu vidio prostor za 'ujedinjenjem', odnosno smatrao je da je moguće rekonstruirati postupak numeričke analize unutar geometrijskih okvira CAD alata. Kako bi se to realiziralo bilo je potrebno fokusirati se na jedinstven geometrijski pristup koji se može koristiti izravno u analizi. U inženjerstvu, jedan od najviše korištenih geometrijskih zapisa je NURBS (eng. *Non-Uniform Rational B-Spline*) zapis, te je kao takav logičan odabir za temelj izogeometrijskoj analizi. Od objavljivanja prvog rada [1], izogeometrijske metode pronašle su svoju primjenu u širokom spektru numeričkih problema, od strukturalnih analiza [5], [6], analiza velikih deformacija [7], modeliranja turbulencije [8], [9], analize interakcije fluida i struktura [10], [11], optimizacije oblika [12], [13], primijenjene numeričke analize u medicini [14] itd.

U ovom poglavlju dat će se uvod u izogeometrijsku analizu i pregled razvoja same metode, počevši od parametrizacije geometrije kao uvoda u *spline*-ove koji će se zatim pojasniti u kontekstu numeričke analize (za problem linearne elastičnosti). Dalje će se dati algoritamska usporedba izogeometrijske analize i metode konačnih elemenata, te u konačnici pregled dostupnih implementacija same metode.

## 2.1. Parametrizacija geometrije

U računalnom modeliranju uobičajen je parametarski zapis geometrije. Od različitih parametarskih krivulja, najčešće korišten geometrijski pristup temelji se na NURBS (eng. *Non Uniform Rational B-Spline*), odnosno težinskom, racionalnom *B-Spline* parametarskom zapisu, te se kao takav nameće kao logična početna točka za izogeometrijsku analizu. Osim što su široko zastupljeni, *B-Spline*ovi posjeduju dobra i za analizu pogodna matematička svojstva, kao što su: ne-negativnost po cijelom području definiranosti, svojstvo 'dijeljenja jedinice' (eng. *partition of unity*),  $C^{p-1}$  kontinuitet (gdje je  $p$  stupanj polinoma *B-Spline* bazne funkcije) itd.



### 2.1.1. B-Spline krivulje i plohe

Prvi pojam koji je potrebno definirati kod B-Spline geometrija je vektor čvorova. Vektor čvorova u jednoj dimenziji je rastući niz koordinata u parametarskom prostoru (najčešće definiran kao  $[0, 1]$ ):  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  gdje je  $\xi_i \in \mathbb{R}$   $i$ -ti čvor ( $i = 1, 2, \dots, n+p+1$ ),  $p$  stupanj polinoma a  $n$  broj baznih funkcija i kontrolnih točaka. U vektoru čvorova određene koordinate mogu se ponavljati  $m$  puta, čime se gubi kontinuitet geometrije:  $C^{p-m-1}$ . Ako se početni i zadnji čvor ponavljaju  $p+1$  puta, govorimo o otvorenom vektoru čvorova.

B-Spline krivulja (slika 2.2) definira se kao linearna kombinacija B-Spline baznih funkcija i kontrolnih točaka prema sljedećem izrazu:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{B}_i$   $i$ -ta kontrolna točka, a  $N_{i,p}(\xi)$   $i$ -ta bazna funkcija. B-Spline bazne funkcije zadane su rekurzivnom Cox-de Boorovom formulom ([15],[16]), počevši s  $p = 0$ :

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.2)$$

Za  $p = 1, 2, 3, \dots$  zadane su sljedećim izrazom:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.3)$$

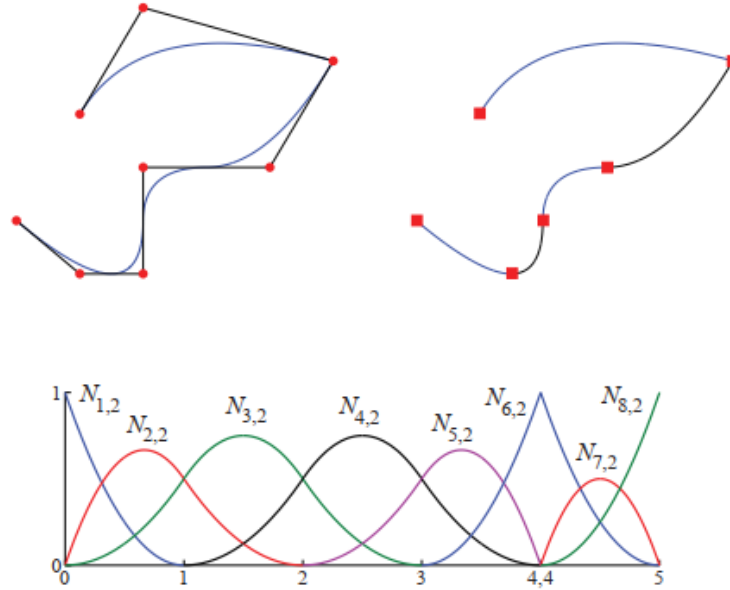
B-Spline krivulje ne prolaze kroz kontrolne točke, osim u slučaju da je broj ponavljanja određenog čvora  $m$  jednak stupnju polinoma bazne funkcije  $p$ , i u slučaju otvorenog vektora čvorova gdje su prvi i posljednji čvor interpolirajući, kao na slici 2.2.

Analogno s krivuljama, B-Spline plohe definiraju se kao linearna kombinacija mreže kontrolnih točaka  $\mathbf{B}_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$  i B-Spline baznih funkcija  $N_{i,p}(\xi)$  i  $M_{j,q}(\eta)$ , definiranih nad vektorima čvorova  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  i  $\mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+p+1}\}$ :

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (2.4)$$

### 2.1.2. NURBS krivulje i plohe

Glavni nedostatak B-Spline krivulje je nemogućnost opisivanja racionalnih krivulja poput kružnice i sl. NURBS krivulje s druge strane, egzaktno opisuju racionalne krivulje, a definiraju se na sljedeći način, linearnom kombinacijom kontrolnih točaka i NURBS baznih



Slika 2.2: B-Spline kvadratna krivulja i odgovarajuće bazne funkcije, preuzeto iz [2]

funkcija:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (2.5)$$

gdje je  $R_{i,p}(\xi)$   $i$ -ta NURBS bazna funkcija definirana kako slijedi:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}} \quad (2.6)$$

$w_i$  je  $i$ -ti kontrolni težinski faktor. NURBS bazne funkcije za definiranje racionalnih površina opisane su izrazom:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \quad (2.7)$$

Ukoliko se uzme u obzir da B-Spline bazne funkcije zadovoljavaju *partition of unity* svojstvo i težinski faktori se postave na konstantnu vrijednost  $c \neq 0$ , jasno se vidi da su B-Spline krivulje i plohe zapravo specijalan slučaj NURBS krivulja, odnosno ploha.

## 2.2. Spline kao osnova numeričke analize problema linearne elastičnosti

Za većinu numeričkih metoda, osnovne kriterije konvergencije zadovoljavaju bilo koje glatke izoparametarske bazne funkcije koje zadovoljavaju svojstvo dijeljenja jedinice (eng. *partition of unity*). Dovoljni uvjeti za osnovni dokaz konvergencije za širu klasu problema is-

punjavaju bazne funkcije koje zadovoljavaju svojstva  $C^1$  kontinuiteta unutar elementa,  $C^0$  kontinuiteta na rubovima elementa, te uvjet potpunosti (eng. *completeness*). Što se tiče prva dva svojstva, u poglavlju 2.1.1 rečeno je da su B-Spline bazne funkcije kontinuiteta  $C^{p-m-1}$  (odnosno  $C^p$  u slučaju vektora čvorova bez ponavljanja), dok se dokaz da NURBS i B-Spline geometrije ispunjavaju uvjet potpunosti može pronaći u [2].

Kako je rečeno, u izogeometrijskoj analizi se koriste iste bazne funkcije za modeliranje geometrije i polja od interesa, dakle izogeometrijska analiza kao takva je također izoparametarska metoda. Pojam izoparametarskog koncepta jako je raširen i u okviru metode konačnih elemenata: odabrana baza aproksimira nepoznato polje rješenja i poznatu geometriju. U slučaju izogeometrijske analize izoparametarski koncept je suprotno usmjeren: baza koja egzaktno opisuje geometriju (2.8) se uzima i koristi za aproksimaciju polja rješenja, npr. pomaka (2.9). U toj jednadžbi  $d_A$  su kontrolne varijable, koje je potrebno odrediti.

$$\mathbf{x}(\xi) \equiv \begin{Bmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \\ z(\xi) \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^{e_n} N_a(\xi) \begin{Bmatrix} x_a^e \\ y_a^e \\ z_a^e \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$u^h(\xi) \equiv \sum_{A=1}^{n_{np}} N_A(\xi) d_A \quad (2.9)$$

Jaka formulacija problema linearne elastičnosti, koristeći Einsteinov notacijski zapis, glasi: Neka je  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i : \Gamma_{D_i} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $h_i : \Gamma_{N_i} \rightarrow \mathbb{R}$ , pronađi pomak  $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  takav da vrijedi:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{na } \Omega \quad (2.10a)$$

$$u_i = g_i \quad \text{na } \Gamma_{D_i} \quad (2.10b)$$

$$\Sigma_{ij} n_j = h_i \quad \text{na } \Gamma_{N_i} \quad (2.10c)$$

gdje je  $\sigma_{ij}$  tenzor naprezanja, definiran prema izrazima (2.11) i (2.12)

$$\epsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.12)$$

U jednadžbi (2.12),  $c_{ijkl}$  su elastični koeficijenti deifinirani prema izrazu (2.14), te za homogen izotropan materijal vrijede simetrije (2.13). U tom izrazu  $\lambda$  i  $\mu$  su tzv. Laméovi parametri, koji su izraženi preko Youngeovog modula i Poissonovog koeficijenta, prema izrazima (2.15) i (2.16).

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (2.13a)$$

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad (2.13b)$$

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (2.13c)$$

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.14)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.15)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.16)$$

Postoje različite numeričke tehnike kojima se pristupa rješavanju problema kao što je (2.10). U metodi konačnih elemenata, ako nije drugačije naglašeno podrazumijeva se da je riječ o Galerkinovoj metodi. Neke od drugih značajnijih tehnika su kolokacijske metode, FEA metoda najmanjih kvadrata, bezmrežne metode itd. Sve te tehnike primjenjive su i na NURBS pristup, odnosno u kontekstu izogeometrijske analize. Dalje u tekstu će biti raspisani važniji izrazi Galerkinovog pristupa u okviru izogeometrije za problem linearne elastičnosti. Detaljan izvod može se pronaći u [2]. Prvi korak je definiranje slabe (varijacijske) formulacije problema (2.17):

Neka je  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_i : \Gamma_{D_i} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $h_i : \Gamma_{N_i} \rightarrow \mathbb{R}$ , pronađi pomak  $u_i : \in \mathcal{S}_i$  takav da za svaki  $w_i \in \mathcal{V}_i$  vrijedi

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^d \left( \int_{\Gamma_{N_i}} w_i h_i d\Gamma \right) \quad (2.17)$$

Drugačije zapisano:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = L(\mathbf{w}) \quad (2.18)$$

Gdje su

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} u_{(k,l)} d\Omega \quad (2.19)$$

$$L(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^d \left( \int_{\Gamma_{N_i}} w_i h_i d\Gamma \right) \quad (2.20)$$

Da bi se ovaj problem zapisao kao sustav algebarskih jednadžbi, prostor probnih i težinskih funkcija definira se na konačnim prostorima koji su definirani izoparametarskim NURBS bazama,  $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$  i  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ :

$$a(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) = L(\mathbf{w}^h) \quad (2.21)$$

Neka je  $\mathbf{g}^h \in \mathcal{S}^h$  (gdje  $g_i^h|_{\Gamma_{D_i}} = g_i$ ). Za bilo koji  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}^h$ , možemo pisati sljedeće

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \mathbf{g}^h \quad (2.22)$$

gdje je  $\mathbf{v}^h \in \mathcal{S}^h$ . Dekompoziciju (2.22) možemo koristiti te izraz (2.21) zapisati kako slijedi

$$a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = L(\mathbf{w}^h) - a(\mathbf{w}^h, \mathbf{g}^h) \quad (2.23)$$

Ako u izraz (2.22) uvrstimo parametrizaciju (2.9),  $i$ -tu komponentu  $\mathbf{u}^h$  možemo pisati:

$$u_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{g_i}} N_A d_{iA} + \sum_{B \in \eta_{g_i}} N_B g_{iB} = \sum_{A \in \eta - \eta_{g_i}} N_A d_{iA} + g_i^h \quad (2.24)$$

Na isti način zapisujemo parametrizaciju  $i$ -te komponente testne funkcije  $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h$ :

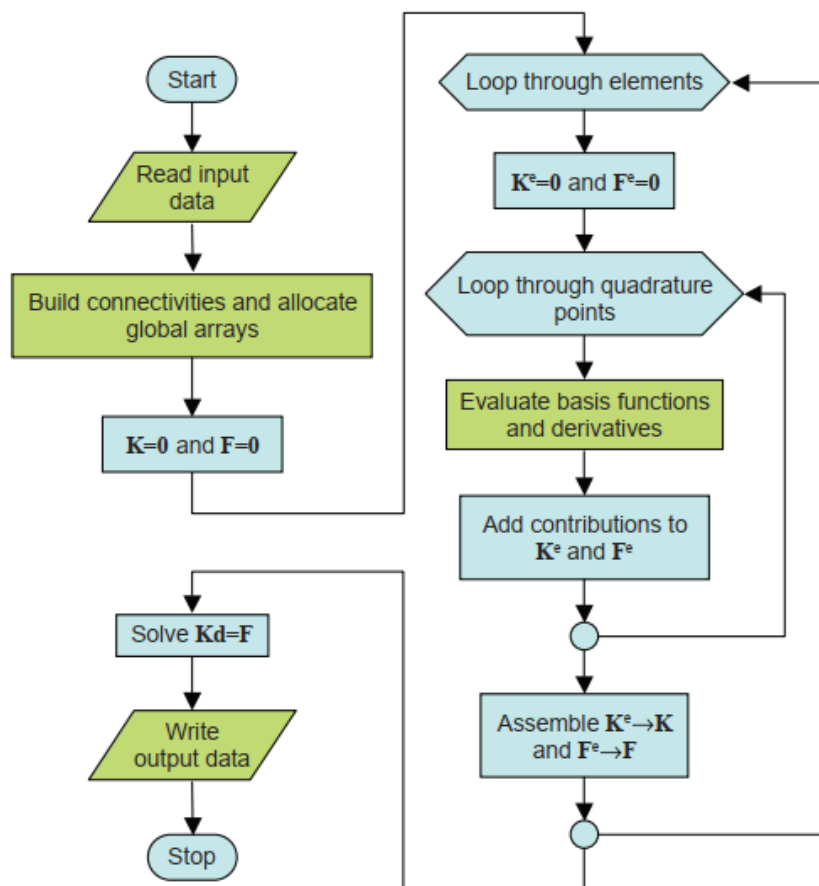
$$w_i^h = \sum_{A \in \eta - \eta_{g_i}} N_A c_{iA} \quad (2.25)$$

Globalna matrična jednadžba problema glasi:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} \quad (2.26)$$

### 2.3. Usporedba izogeometrijske analize sa klasičnom metodom konačnih elemenata

Za izogeometrijsku analizu kakva je opisana u prethodnom tekstu može se reći da se svodi na Galerkinove konačne elemente, te se razlikuje od konvencionalne metode u korištenim baznim funkcijama. Ova 'mala' razlika ima ogromne implikacije kad je riječ o implementaciji. U ovoj sekciji rada dat će se kratki pregled sličnosti i razlika ovih dviju metoda, prema autorima [2]. Arhitektura klasičnog koda metode konačnih elemenata prikazana je na slici 2.3. U zelenim blokovima dijagrama toka označeni su moduli koji moraju biti izmijenjeni kod prevođenja arhitekture koda sa metode konačnih elemenata na izogeometrijske postupke. Ulazni podaci se mijenjaju, kao i struktura podataka za povezivanje (eng. *connectivity array*) budući da ovise o izboru baze. Shodno odabiru baze, blok naredbi koji evaluira bazne funkcije i njihove derivacije mora biti ažuriran. Na koncu, potrebno je prilagoditi i format izlaznih podataka kako bi bio specifičan za odabranu bazu, odnosno B-Splineu ili racionalnoj varijanti, NURBS-u.



Slika 2.3: Dijagram toka klasičnog koda metode konačnih elemenata. U zelenim blok naredbama označene su rutine koje moraju biti izmijenjene kako bi se kod 'preveo' na izogeometrijske postupke (za jedan *patch*). [2]

Izogeometrijska analiza	Metoda konačnih elemenata
Egzaktan zapis geometrije	Aproksimirana geometrija
Kontrolne točke	Čvorovi
Kontrolne varijable (kod polja interesa)	Čvorne varijable
Bazne funkcije ne interpoliraju kontrolne točke i varijable	Bazne funkcije interpoliraju čvorove i čvorne varijable
NURBS baza	Polinomna baza
Visok i lako kontroliran kontinuitet	$C^0$ kontinuitet
Pozitivna baza	Baza ne nužno pozitivna
<i>Convex hull</i> svojstvo zadovoljeno	<i>Convex hull</i> svojstvo nije zadovoljeno

Tablica 2.1: Razlike između izogeometrijske analize temeljene na NURBS parametarskom zapisu i konvencionalne metode konačnih elemenata

Neke od najizraženijih i najznačajnijih razlika izdvojene su u tablici 2.1. Glavna i najznačajnija razlika, kako je već i spomenuto, je ta što se u slučaju izogeometrijske razlike koristi egzaktna geometrija na svim razinama diskretizacije, dok metoda konačnih

elemenata koristi polinomne aproksimacije po dijelovima. Ova geometrijska egzaktnost utječe pozitivno na točnost izračunatih polja od interesa, ali i na cijeli proces analize budući da u slučaju premrežavanja geometrija ostaje ista, za razliku od konačnih elemenata. Druga velika razlika je u tome što kod izogeometrijske analize kontrolne točke i kontrolne varijable nisu interpolirajuće te ih ne možemo kao kod konačnih elemenata interpretirati same za sebe već isključivo u linearnoj kombinaciji s baznim funkcijama. Ostala svojstva navedena u tablici 2.1 odnose se na svojstva koja pripadaju bazi.

Izogeometrijska analiza i metoda konačnih elemenata
Izoparametarski koncept
Galerkinova metoda
Arhitektura koda
Pojasna širina matrica
Svojstvo dijeljenja jedinice
Zadovoljavanje <i>patch</i> testova

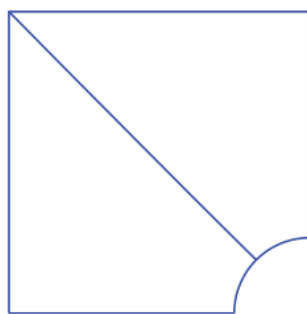
Tablica 2.2: Zajednička svojstva izogeometrijske analize temeljene na NURBS parametarskom zapisu i konvencionalne metode konačnih elemenata

Sličnosti između metoda navedene su u tablici 2.2. Obje metode su izoparametarske implementacije Galerkinove metode te stoga imaju sličnu arhitekturu koda, kao što je prethodno spomenuto i slikovito prikazano, slika 2.3. Obje metode koriste baze sa kompaktnim suportima, te stoga dijele pojasnu širinu matrica za dati red polinoma. Obje baze zadovoljavaju svojstvo dijeljenja jedinice (eng. *partition of unity*).

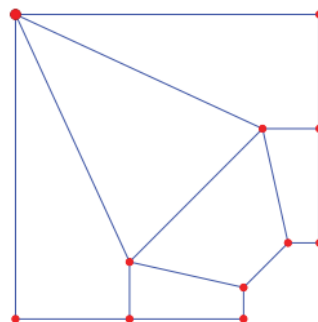
### 3. Adaptivne metode profinjavanja izogeometrijske mreže

Točnost kod numeričkih metoda poput konačnih elemenata i izogeometrijske analize ovisi o veličini elemenata te iste mreže. Kod izogeometrijske analize numerička mreža je doduše izravno ugrađena u geometrijski zapis problema i velik broj istih može se geometrijski opisati s jednostavnim NURBS parametarskim zapisom koji se sastoji od malog broja baznih funkcija i kontrolnih točaka. Tako je npr. četvrtinu ploče s rupom moguće egzaktno opisati NURBS plohom sa 12 kontrolnih točaka, prema slici 3.1b (u gornjem lijevom kutu većim crvenim krugom prikazane su dvije točke koje se preklapaju kako bi se egzaktno opisao kut ploče). S druge strane, takav zapis definira mrežu sa samo 2 elementa (slika 3.1a) na kojima se vrši numerička integracija te se numerička aproksimacija rješenja značajno razlikuje od stvarnog.

Klasične metode profinjavanja mreže poput  $h$ -,  $p$ - i  $k$ -profinjavanja su globalnog karaktera.



(a) Mreža elemenata



(b) Kontrolni poligon (poligon kontrolnih točaka)

Slika 3.1: Prikaz 1/4 ploče s rupom, poligon kontrolnih točaka i odgovarajuća numerička mreža

Međutim, mnogi problemi često zahtijevaju lokalna poboljšanja mreže (npr. područja koncentracije napreznja i sl.), što se kosi s tenzor-produkt prirodom B-Splinea, i posljedično NURBS-a. Osim toga, poželjno je da i broj stupnjeva slobode bude što je moguće manji budući da rješavanje takvih problema zahtijeva jako puno računalnog napora i vremena. Iz tog razloga metode adaptivnog profinjavanja mreže su od velikog interesa u izogeometrijskoj analizi.

Adaptivno lokalno profinjavanje mreže je iterativan postupak, te možemo izdvojiti četiri osnovna koraka:



RJEŠAVANJE → PROCJENA GREŠKE → OZNAČAVANJE → PREMREŽAVANJE

U prvom koraku, problem se rješava na inicijalnoj mreži (koja se sastoji od malog broja elemenata), zatim se računa procjena lokalnog odstupanja aproksimiranog rješenja od egzaktnog. Na temelju procijenjene greške, vrši se odabir elemenata  $\mathcal{M} \subseteq Q$  ( $Q$  označava aktivnu mrežu) koji se profinjavaju (moguće je i umjesto elemenata označavati bazne funkcije, [17]), te se zatim vrši samo profinjavanje prema određenoj strategiji.

### 3.1. Strategije adaptivnog profinjavanja mreže

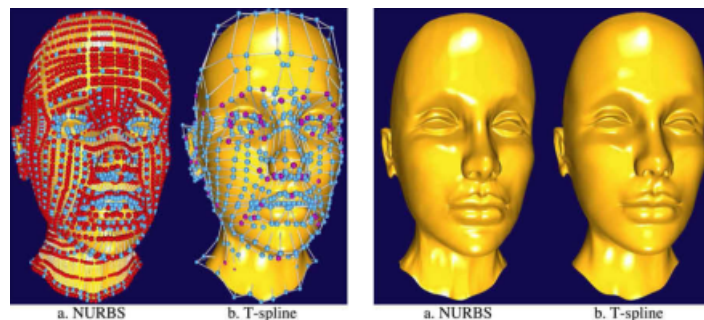
Nedostatak standardnog NURBS zapisa je nemogućnost lokalnog profinjavanja mreže, što je posljedica njihove tenzor-produkt prirode, slika 3.2a. Lokalno profinjavanje korištenjem standardnog NURBS zapisa je moguće samo korištenjem više NURBS entiteta koji opisuju istu strukturu po dijelovima, dok je na razini svakog zasebnog NURBS-a koji tvori tzv. *multipatch* profinjavanje globalnog karaktera, slika 3.2b. Ovakav pristup lokalnom profinjavanju



(a) Globalno 'širenje' refinement-a zbog tenzor-produkt prirode NURBS-a (b) Lokalni refinement postignut korištenjem *multipatch*-a

Slika 3.2: Lokalni refinement postignut korištenjem tzv. *multipatch*-a; na razini svakog zasebnog *patch*-a, refinement je globalan

mreže, iako moguć, u adaptivnim metodama i nema neku primjenu zbog komplicirane implementacije, potrebe za uvođenjem dodatnih ograničenja kojima bi se osigurala kontinuiranost funkcija na spojevima itd. Kao alternativa NURBS-u, objavljena je nekolicina radova koji



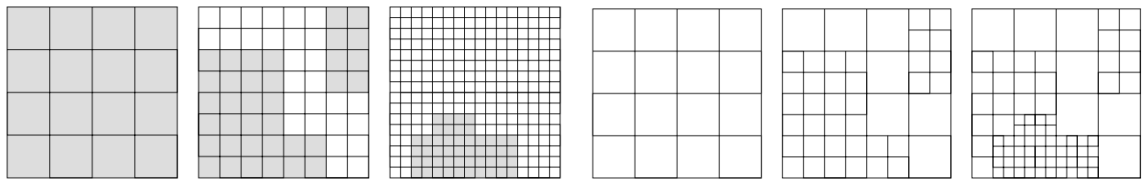
Slika 3.3: Usporedba NURBS parametarskog zapisa i T-Spline zapisa, slika preuzeta iz [18]

koriste parametrizacije koje nadilaze tenzor-produkt prirodu B-Splinea, poput hijerarhijskih

splineova, T-Splineova, LR-Splineova, PHT-Splineova i sl. T-Splineovi, uvedeni 2003. godine [19], svoju široku primjenu su našli u modeliranju i računalnoj grafici (slika 3.3), međutim u kontekstu izogeometrijske analize pokazali su neke nedostatke (kao što su linearna ovisnost T-Spline baznih funkcija u nekim slučajevima i sl.) [18, 20], koji su u međuvremenu riješeni određenim intervencijama i restrikcijama [21, 22]. Među svim navedenim parametrizacijama, hijerarhijski splineovi su se pokazali kao najjednostavniji za definiranje i implementiranje u samoj izogeometrijskoj analizi [23]. Kako predstavljaju središnji dio istraživanja ovog rada, bit će pojašnjeni u zasebnom podpoglavlju.

### 3.1.1. Hijerarhijski B-spline

Hijerarhijski B-Spline koncept uveden je u radu Forseyja i Bartelsa [24] u svrhu lokalnog manipuliranja plohami: autori su modificirali postojeće plohe na način da su na novom levelu dodavali ugniježdene vektore čvorova nad kojima su definirali tenzor-produkt *spline*-ove koji bi zatim linearnom kombinacijom opisivali bazne funkcije iz nižeg levela. Na taj način autori su egzaktnije opisivali detalje na dijelu domene koji su zahtijevali finiju mrežu, dok je na ostalom dijelu dovoljno točno bilo koristiti grublju mrežu.



(a) Niz poddomena ( $l = 0, 1, 2$ ) (osjenčene površine)

(b) Niz hijerarhijskih mreža ( $l = 0, 1, 2$ )

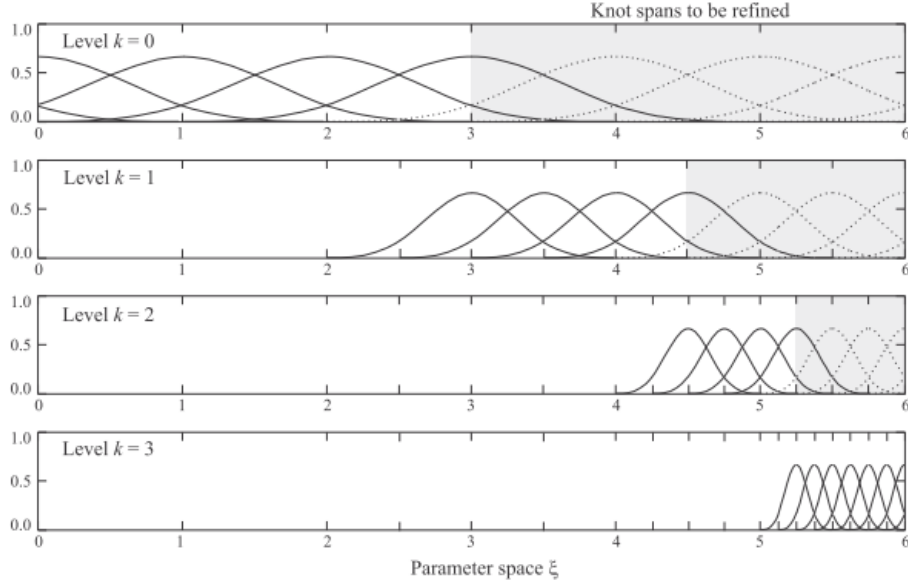
Slika 3.4: Niz ugniježđenih prostora na kojima su definirane poddomene  $\Omega_0 \supseteq \Omega_1 \supseteq \Omega_2$  (lijeva slika) i odgovarajuće mreže elemenata (desna slika). Elemente definiraju ugniježdene vektore čvorova. Slika preuzeta iz [25]

Ovdje će se opisati osnovni pojmovi i definicije kod konstruiranja hijerarhijskih B-Splineova, prateći radove [23, 17].

U suštini, možemo reći da je za definiranje hijerarhije B-Splineova potreban niz ugniježđenih prostora (slika 3.4) nad kojima su definirane bazne funkcije međusobno povezane nekom metodom profinjavanja mreže (najčešće je riječ o  $h$ -refinamentu, odnosno ubacivanju novih čvorova). Ideja hijerarhijskih splineova zasniva se na izrazu (3.1) koji kaže da se  $i$ -ta B-Spline bazna funkcija levela  $l$  može zapisati kao linearna kombinacija B-Spline funkcija levela  $l + 1$ :

$$\beta_{i,l} = \sum_{k=1}^{N_{l+1}} c_{k,l+1}(\beta_{i,l}) \beta_{k,l+1} \quad (3.1)$$

gdje je  $N_{l+1}$  ukupan broj baznih funkcija levela  $l + 1$ , a  $c_{k,l+1}(\beta_{i,l})$  su ne-negativni koeficijenti transformacije između levela. Pri tom, važno je naglasiti da je za svaku funkciju  $i$ , uslijed



Slika 3.5: Hijerarhijski koncept: B-Splineovi ( $p = 3$ )  $k$ -te razine moogu biti opisani kao linearna kombinacija (izraz 3.1) splineova ( $k + 1$ )-ve razine [26]

lokalne linearne neovisnosti B-splineova, broj koeficijenata koji je različit od nula određen rasponom (suportom) te funkcije i metodom profinjavanja mreže između uzastopnih levela.

Kako je već rečeno, da bi se definirao hijerarhijski B-Spline, potrebno je razmatrati niz ugniježđenih tenzor-produkt prostora  $\{\mathcal{S}_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ , definiranih na zatvorenoj parametarskoj domeni  $\hat{\Omega} = [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_3 \subset \dots \quad (3.2)$$

koji su definirani stupnjem polinoma  $p$  i vektorom čvorova (poglavlje 2.1). Za  $l \in \mathbb{N}_0$ , B-Spline prostor baznih funkcija  $\mathcal{S}_l$  definira se kao  $\mathcal{B}_l := \{\beta_{i,l} | i = 1, \dots, N_l\}$ , gdje je  $N_l$  dimenzija prostora  $\mathcal{S}_l$ . Mrežu elemenata povezanih sa svakim  $\mathcal{B}_l$  prostorom B-Spline baznih funkcija označavamo kao  $\mathcal{Q}_l$ , te za svaki  $Q \in \mathcal{Q}_l$  kažemo da je element levela  $l$ . Skup  $\Omega_n := \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definira se kao poddomena  $n$ -te razine ako:

$$\hat{\Omega} = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_{n-1} \supset \Omega_n = \emptyset \quad (3.3)$$

gdje je svaka poddomena  $\Omega_l$  skup elemenata levela  $l - 1$ .

**Definicija 1** Neka je  $\{\mathcal{S}_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$  niz prostora definiranih izrazom 3.2, odgovarajućih B-Spline baza  $\{\mathcal{B}_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$  i  $\Omega_n := \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  hijerarhija poddomena  $n$  razina. Hijerarhijske B-Spline baze  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\Omega_n)$ , uzevši  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{n-1}$  definirane su rekurzijom:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 := \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{H}_{l+1} := \{\beta \in \mathcal{H}_l \mid \text{suport } \beta \not\subset \Omega_{l+1}\} \cup \\ \quad \{\beta \in \mathcal{B}_{l+1} \mid \text{suport } \beta \subset \Omega_{l+1}\}, \quad l = 0, \dots, n-2 \end{cases}$$

Hijerarhijska mreža dana je sljedećim izrazom:

$$Q := \bigcup_{l=0}^{n-1} \{Q \in \mathcal{Q}_l \mid Q \subset \Omega_l \wedge Q \not\subset \Omega_{l+1}\}$$

Konstruiranje hijerarhijskih splineova se može jednostavno poopćiti na racionalne splineove [17], odnosno NURBS hijerarhijski spline, ako se na prostorima  $\{\mathcal{S}_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$  (izraz 3.2) umjesto B-Spline prostora definira niz NURBS prostora  $\mathcal{R}_l := \{R_{i,l} \mid i = 1, \dots, N_l\}$ , gdje je  $N_l$  dimenzija prostora  $\mathcal{S}_l$ . Racionalne NURBS bazne funkcije definirane su kako slijedi (poglavlje 2.1.2):

$$R_{i,l} = \frac{w_{i,l} \beta_{i,l}}{w} \quad (3.4)$$

gdje je  $w \in \mathcal{S}_0$ , a  $w_{i,l}$   $i$ -ti koeficijent za zapis linearne kombinacije B-splinea u  $\mathcal{B}_l$ , odnosno  $w = \sum_{j=1}^{N_l} w_{j,l} \beta_{j,l}$ , i ne mijenja se tijekom profinjavanja. Uvrštavanjem u (3.1), dobije se slična veza između funkcija NURBS prostora [17]:

$$R_{i,l} = \frac{w_{i,l} \sum_{k=1}^{N_{l+1}} c_{k,l+1}(\beta_{i,l}) \beta_{k,l+1}}{w} = \sum_{k=1}^{N_{l+1}} c_{k,l+1}(R_{i,l}) R_{k,l+1} \quad (3.5)$$

gdje je  $c_{k,l+1}(R_{i,l}) = c_{k,l+1}(\beta_{i,l}) w_{i,l} / w_{k,l+1}$ . Algoritam konstruiranja hijerarhijskih NURBS prostora analogan je algoritmu iz Definicije 1.

U poglavlju 2 već je rečeno da B-Spline i NURBS parametrizacije posjeduju mnoga za analizu dobra svojstva, poput lokalne linearne neovisnosti, baznih funkcija koje su po cijelom parametarskom području ne-negativne te lokaliziranog suporta (na najviše  $p + 1$  elemenata), te imaju svojstvo dijeljenja jedinice (eng. *partition of unity*). Međutim, osnovni nedostatak hijerarhijskih splineova je taj što bez dodatnih intervencija ne zadržavaju svojstvo dijeljenja jedinice (iako je svojstvo zadovoljeno po levelima). Jedan od načina zadovoljavanja tog svojstva je računanje koeficijenata  $a_\beta$ :

$$\sum_{\beta \in \mathcal{H}} a_\beta \beta(\hat{\mathbf{x}}) = 1 \quad (3.6)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ , a za koeficijent  $a_\beta$  može se pokazati da je  $a_\beta \geq 0$  [17]. U nastavku će se dat opis modificiranih hijerarhijskih splineova, tzv. hijerarhijskih B-Splineova sa skraćenom bazom, koji zadržavaju jednostavnost i efikasnost klasičnog hijerarhijskog pristupa (Definicija 1), dok oporavljaju svojstvo dijeljenja jedinice.

### 3.1.2. Hijerarhijski B-spline sa skraćenom bazom

Hijerarhijski B-Splineovi sa skraćenom bazom (eng. *Truncated hierarchical B-Spline*) u kontekstu izogeoetrijske analize uvedeni su u radovima [27, 25]. Konstrukcija hijerarhijske splineova temelji se na tzv. operatoru skraćivanja (eng. *truncation operator*) [28], kojim se

eliminira doprinos funkcija viših ('finijih') nivoa na nižim: ukoliko je u izrazu (3.1) neka od baznih funkcija levela  $l + 1$  sadržana u poddomeni višeg levela  $\Omega_{l+1}$ , njen doprinos u opisivanju funkcije  $\beta_{i,l}$  se uklanja ( $c_{k,l+1}(\beta_{i,l}) = 0$ , izraz 3.8). THB-Splineovi oporavljaju za analizu važno svojstvo dijeljenja jedinice (Teorem 10, [28]), koje klasični HB-Splineovi nisu zadovoljavali, te samo skraćivanje suporta baznih funkcija vodi do rjeđih matrica u izogeometrijskoj analizi, što u konačnici znači da je potrebno manje vremena za slaganje matrice krutosti, manje memorije za pohranu i moguće manje vremena za rješavanje diskretnog problema. Ova svojstva čine THB-Splineove prikladnima za razvoj adaptivnih metoda profinjavanja mreže.

Prije definiranja THB-Splineova, potrebno je definirati operator skraćivanja:

$$\text{trunc}_{l+1}(\beta_{i,l}) := \sum_{k=1}^{N_{l+1}} c_{k,l+1}^{\tau}(\beta_{i,l}) \beta_{k,l+1}, \quad \text{za } \beta_{i,l} \in \mathcal{B}_l \quad (3.7)$$

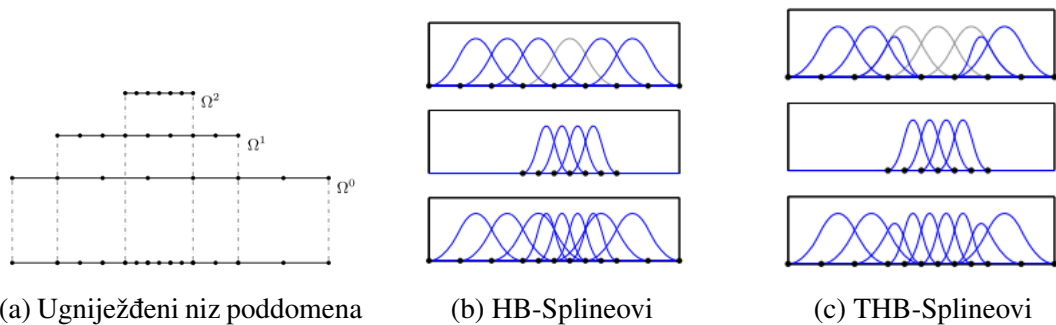
gdje su koeficijenti  $c_{k,l+1}^{\tau}(\beta_{i,l})$  definirani kako slijedi:

$$c_{k,l+1}^{\tau}(\beta_{i,l}) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } \beta_{k,l+1} \in \mathcal{H}_{l+1} \cap \mathcal{B}_{l+1} \\ c_{k,l+1}(\beta_{i,l}) & \text{inače} \end{cases} \quad (3.8)$$

Sada se THB-spline bazni prostor  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{n-1}$  definira sljedećom rekurzivnom formulom:

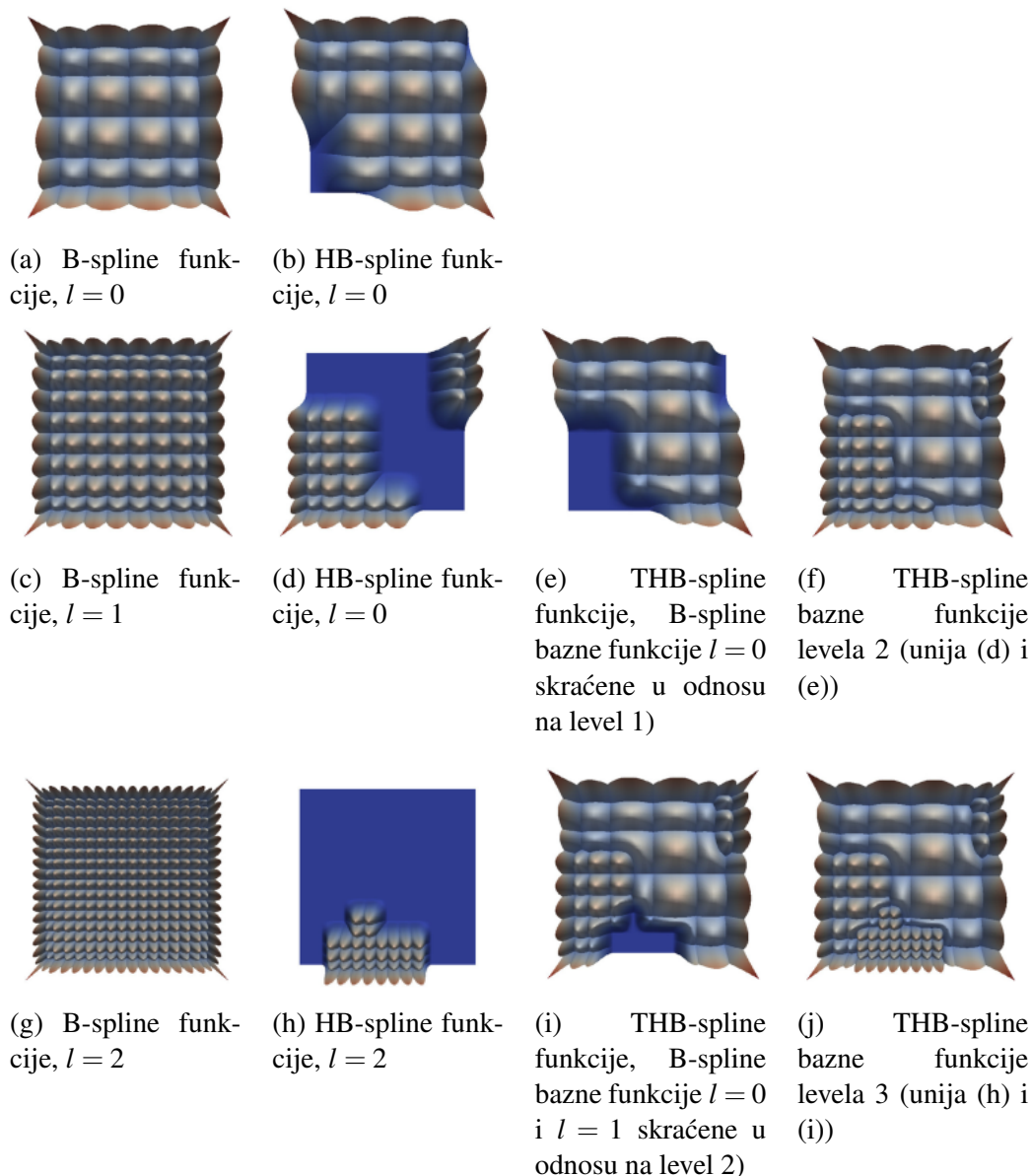
$$\begin{cases} \mathcal{T}_0 := \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{T}_{l+1} := \{\text{trunc}_{l+1}(\beta) \mid \beta \in \mathcal{T}_l \wedge \text{suport } \beta \not\subset \Omega_{l+1}\} \cup \\ \quad \{\beta \in \mathcal{B}_{l+1} \mid \text{suport } \beta \subset \Omega_{l+1}\}, \quad l = 0, \dots, n-2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Primjenom (3.7) na  $\beta_{i,l}$ , ta funkcija više nije funkcija iz  $\mathcal{B}_l$ , već mora biti definirana u okviru  $\mathcal{B}_{l'}$  gdje je  $l' > l$  najviši level funkcije koja 'skraćuje'  $\beta_{i,l}$ . Iterativna konstrukcija hijerarhijskih



Slika 3.6: Usporedni prikaz HB (3.6b) i THB-splineova (3.6c) definiranih na hijerarhijskoj mreži, (3.6a), slika preuzeta iz [28]

skih splineova i hijerarhijskih splineova sa skraćenom bazom za  $p = 2$  usporedno je prikazana na slici 3.6, na 1D primjeru, a za 2D primjer (za domenu i mrežu definirane na slici 3.4), na slici 3.7.



Slika 3.7: Tlocrtni prikaz HB i THB-spline baznih funkcija definiranih za hijerarhijski prikaz domena sa slike 3.4, slika preuzeta iz [25]

## 3.2. Procjena greške

Kad je riječ o procjeni greške misli se prvenstveno na procjenu greške diskretizacije, te možemo izdvojiti dva različita pristupa [29]: *a priori* procjenu greške koja pruža informaciju o asimptomskom ponašanju diskretizacijske greške, ali ne daje stvarnu i kvantitativnu procjenu, te *a posteriori* pristup koji daje stvarnu procjenu greške na temelju trenutnog aproksimacijskog rješenja, te se stoga upravo taj pristup i koristi u adaptivnim metodama. Za procjenu *a posteriori* greške postoje različiti pristupi, od standardnih procjena na temelju energijske norme residuala  $\|u - u_h\|_E$ , gdje je  $u_h$  aproksimacija od  $u$ , do tzv. *goal-oriented* procjenitelja, koji za cilj imaju izračunati procjenu greške određene veličine od interesa (primjerice

naprezanja ili deformacije u strukturnim analizama). Kako bi bila osigurana optimalna brzina konvergencije procesa, procjena greške  $\eta_Q$  mora biti stabilna, pouzdana ( $C \cdot \eta_Q$  mora biti gornja granica greške) i efikasna ( $c \cdot \eta_Q$  mora biti donja granica greške), gdje su  $C$  i  $c$  konstante koje nisu ovisne o razini profinjavanja ili o diskretnom rješenju.

Za određivanje procjene greške možemo reći da je zasebna grana istraživanja u kontekstu numeričkih metoda i za metodu konačnih elemenata je dostupna opsežna literatura. Kod izogeometrijske analize ova grana istraživanja je još u ranom stadiju razvoja; postoji tek nekolicina radova na tu temu, od čega se dva rada posebno izdvajaju, [30] i [31]. U oba rada autori adaptivno profinjavanje mreže temelje na hijerarhijskoj konfiguraciji. Autori u radu [30] razmatraju procjenu pogreške na osnovi residuala za jednostavan eliptički problem (Poissonova jednačba) na razini elementa, te daju izvode u kojima dokazuju da je lokalni indikator pogreške (jednačba 3.10) *a posteriori* gornja i donja granica greške. U radu [31] autori također razvijaju procjenitelj pogreške za linearni eliptički problem drugog reda, ali na razini baznih funkcija (izraz 3.11).

$$\eta_Q := h_Q \left( \int_{\mathbf{F}(Q)} |f + \Delta u_h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

$$\eta_\beta := h_\beta \left( \int_{\mathbf{F}(\text{supp}\beta)} |f + \Delta u_h|^2 (\beta \circ \mathbf{F}^{-1}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

U ovom kvalifikacijskom radu je izneseno tek onoliko koliko je potrebno za razumijevanje procjene greške i primjenu u kontekstu adaptivnog profinjavanja izogeometrijske mreže.

### 3.3. Strategije označavanja

Za izračunatu lokalnu procjenu pogreške  $\eta_Q(Q)$ , za svaki  $Q \in Q$  i zadani parametar označavanja  $\theta \in [0, 1]$ , najčešće korištene strategije označavanja su sljedeće:

- *Dörfler strategija označavanja* [32]: Za profinjavanje se označavaju elementi  $\mathcal{M} \subset Q$  s najvećim indikatorom pogreške. Ukupan broj označenih elemenata ovisi o fiksnom parametru označavanja koji definira koliki postotak ukupnog indikatora pogreške se uzima u obzir za profinjavanje:

$$\sum_{Q \in \mathcal{M}} \eta_Q(Q) \geq \theta \cdot \sum_{Q \in Q} \eta_Q(Q) \quad (3.12)$$

- *Kvantilna strategija označavanja*: Označava se najviše  $\theta \cdot 100\%$  elemenata  $\mathcal{M} \subset Q$  s najvećom akumuliranom pogreškom  $\sum_{Q \in \mathcal{M}} \eta_Q(Q)$ :

$$\#\mathcal{M} \leq \theta \cdot \#Q \quad (3.13)$$

Ova strategija korištena je u radu [20].

- *Maximum strategija označavanja*, [33]: Označavaju se svi elementi  $\mathcal{M} \subset Q$  kojima je procjenjena pogreška veća od  $\theta \cdot \eta_{max}$ , gdje je  $\eta_{max} = \max_{Q \in Q} \eta_Q(Q)$ :

$$\mathcal{M} = \{Q \in Q \mid \eta_Q(Q) \geq \theta \cdot \eta_{max}\} \quad (3.14)$$

### 3.4. Implementacija HB-splineova i THB-splineova u izogeometrijskoj analizi

Kako je u poglavlju 2 detaljnije pojašnjeno na problemu linearne elastičnosti, polazišna točka izogeometrijske analize je varijacijska formulacija parcijalne diferencijalne jednačbe od interesa, koja glasi: pronađi  $u \in V$  takav da vrijedi

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

gdje su  $a(u, v)$  i  $\langle f, v \rangle$  bilenarna forma i linearni operator, a odabir diskretnog prostora testnih funkcija  $V \subset W$  ovisi o rubnim uvjetima problema. Fizikalna domena  $\Omega$  određena je parametrizacijom  $\mathbf{F} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$ , gdje je  $\hat{\Omega}$  parametarska domena ( $\hat{\Omega} = [0, 1]^d$ ), a  $r \geq d$ . Ideja hijerarhijskog profinjavanja u izogeometrijskoj analizi u suštini znači da umjesto NURBS parametrizacije za  $\mathbf{F}$  izaberemo HB ili THB-spline parametrizaciju:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\beta \in \mathcal{H}} \mathbf{C}_\beta \beta(\hat{\mathbf{x}})$$

gdje je  $\hat{\mathbf{x}}$  vektor parametarskih koordinata, a  $\mathbf{C}_\beta$  vektor kontrolnih točaka svake bazne funkcije. Diskretni prostor tada je definiran kao:

$$W = \text{span}\{\beta \circ \mathbf{F}^{-1} \mid \beta \in \mathcal{H}\} = \text{span}\{\beta \circ \mathbf{F}^{-1} \mid \beta \in \mathcal{T}\}, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$$

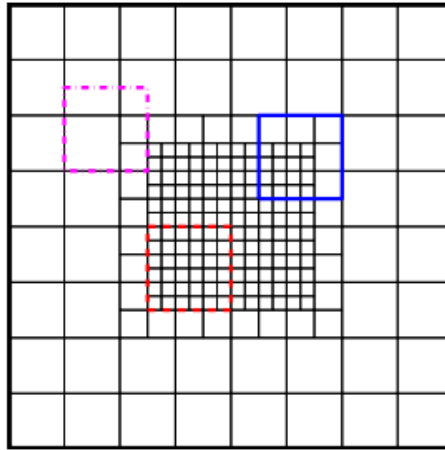
Kod implementacije hijerarhijskih splineova i izogeometrijskih metoda najveći izazov je slaganje matrica, budući da integrali koje je potrebno računati moguće uključuju aktivne bazne funkcije različitih razina i moguće su definirani nad aktivnim elementima trećih razina [17]. U dostupnoj literaturi postoji više različitih pristupa ovom problemu. U ovom dijelu teksta dat će se osnovni pojmovi i ideje za koje se može reći da su zajednički nazivnik svih predloženih postupaka, dok će njihove sličnosti i razlike biti spomenute i opisane dalje u tekstu kroz pregled literature.

Za element  $Q$  kaže se da je aktivan ako je dio hijerarhijske mreže:  $Q \in Q$ . Ako vrijedi  $Q \in Q_l \cap Q$ , kaže se da je  $Q$  aktivan element razine  $l$ , a ako je  $Q \in Q_l \wedge Q \subset \Omega_{l+1}$  riječ je o neaktivnom elementu razine  $l$ . Analogno definiciji aktivnih i neaktivnih elemenata,



definiraju se aktivne i neaktivne bazne funkcije. Za baznu funkciju  $\beta$  kaže se da je aktivna ako je dio hijerarhijske baze  $\beta \in \mathcal{H}$ , odnosno  $\beta \in \mathcal{T}$  ako je dio THB-Spline baze. Ako je  $\beta \in \mathcal{F}_l^A := \mathcal{H} \cap \mathcal{B}_l$  kaže se da je aktivna funkcija razine  $l$ , odnosno neaktivna funkcija levela  $l$  ako je  $\beta \in \mathcal{F}_l^D := \mathcal{H}_l \setminus \mathcal{H}_{l+1}$  tj. ako se suport bazne funkcije  $\beta$  preklapa s poddomenom više razine (suport  $\beta \in \Omega_{l+1}$ ). Važno je primijetiti da je funkcija levela  $l$  aktivna ako su svi elementi unutar suporta te funkcije levela  $l$  ili višeg (te da je bar jedan od njih levela  $l$ ), a neaktivna ako su svi elementi tog levela unutar suporta te funkcije deaktivirani, slika 3.8.

Definiranjem aktivnih elemenata i baznih funkcija, te temeljem izraza 3.1 može se definirati



Slika 3.8: Hijerarhijska mreža definirana s 3 razine ( $l = \{0, 1, 2\}$ ) B-Spline baznih funkcija ( $p = 2, q = 2$ ). Suport aktivne bazne funkcije  $l = 1$  prikazan je plavom punom linijom a neaktivne crvenom isprekidanom linijom. Rozom isprekidanom linijom označena je pasivna bazna funkcija, odnosno funkcija čiji suport nije u potpunosti sadržan u  $\Omega_1$ . Slika preuzeta iz [17]

procedura slaganja globalnih matrica u 3 koraka:

1. Za sve aktivne elemente računaju se lokalne matrice, bez obzira doprinose li bazne funkcije nad tim elementom hijerarhijskoj bazi ili ne.
2. Kad su izračunate lokalne matrice elemenata, za svaki hijerarhijski level formiraju se globalne matrice.
3. Globalne matrice svakog zasebnog levela kombiniraju se putem transformacijske matrice podjele  $C_l$  (eng. *hierarchical subdivision operator*) u globalan sustav jednadžbi cijelog hijerarhijskog modela.

Prva dva koraka su standardni postupci izogeometrijske analize, samo sada iterativno primijenjeni na uzastopne levele. Transformacijska matrica podjele  $C_l$  koja sadrži koeficijente za transformaciju iz hijerarhijske baze (do levela  $l$ ) u B-spline bazu  $\mathcal{B}_l$  i može se definirati rekursivno [17]:

1.  $C_0 = I_0$

$$2. C_{l+1} = [C_l^{l+1} C_l, I_{l+1}], \quad \text{za } l = 0, \dots, n-2.$$

U prvom bloku matrice  $C_l^{l+1}$  računaju se koeficijenti transformacije uzastopnih levela do levela  $l+1$  ( $0 \leq k < l+1$ ), a  $I_{l+1}$  je matrica koja uključuje doprinos aktivnih funkcija levela  $l+1$ . Koeficijenti transformacije uzastopnih levela definirani su izrazom 3.1, odnosno:

$$(C_l^{l+1})_{ki} = c_{k,l+1}(\beta_{i,l}), \quad i = 1, \dots, N_l, \quad k = 1, \dots, N_{l+1}$$

Za B-Splineove dimenzije  $r > 1$ , matrica  $C_l^{l+1}$  računa se kao Kronecker tenzor produkt matrica koje odgovaraju 1D slučaju.

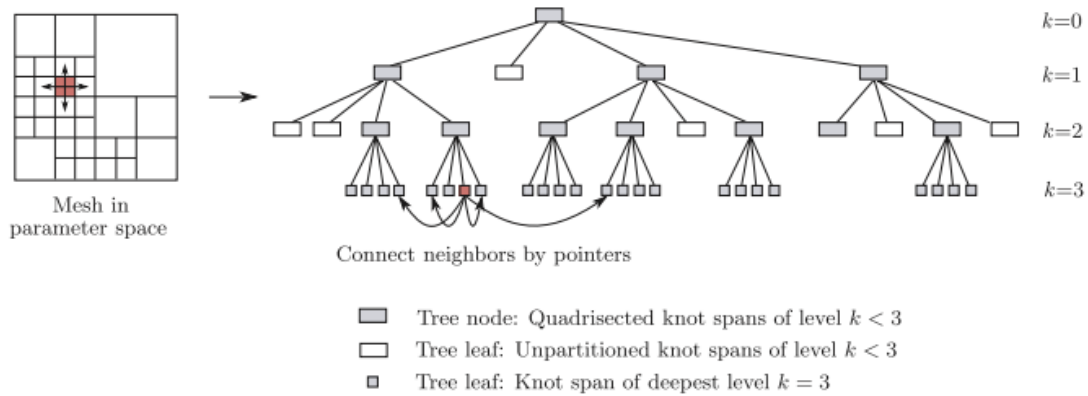
### 3.4.1. Pregled literature

Vuong i suradnici u radu [23] prvi istražuju teoretska svojstva i prikladnost hijerarhijskih splineova (koji su do tada bili uglavnom korišteni u računalnoj grafici i modeliranju [24]) za adaptivno lokalno profinjavanje u kontekstu izogeometrijske analize. Pokazali su da hijerarhijski splineovi zadovoljavaju svojstvo lokalne linearne neovisnosti te uvođenjem težinskih baznih funkcija  $w$  modificiraju prostor hijerarhijskih baznih funkcija  $\mathcal{H}$  u tzv. srodan prostor hijerarhijskih težinskih baza  $\mathcal{W}$ , koji zadovoljava svojstvo dijeljenja jedinice:

$$\mathcal{W} = \{\omega = w_\beta \beta : \beta \in \mathcal{H} \wedge 1 = \sum_{\beta \in \mathcal{H}} w_\beta \beta\} \quad (3.15)$$

Predloženi hijerarhijski pristup kombiniraju *a posteriori* estimatorom te adaptivno rješavaju nekoliko test primjera na kvadratnoj parametarskoj domeni ( $\Omega_0 = [0, 1]^2$ ), koristeći *h*-refinement među levelima. Dolaze do zaključka da takav pristup ima potencijala za adaptivne metode i daljnje istraživanje. Ističu da je potrebno istražiti proširenje na *multipatch* probleme, te proširenje na druge hijerarhijske koncepte s manje restrikcija u svrhu postizanja rjeđih matrica, odnosno lokaliziranijeg profinjavanja. Schillinger i suradnici [26], uz kroz rad već spomenuta dobra svojstva hijerarhijskih splineova, ističu još neke prednosti koje hijerarhijske splineove čine dobrim odabirom za adaptivne metode:

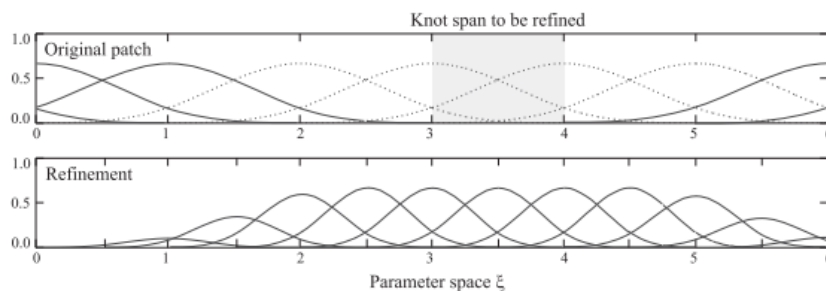
- princip profinjavanja koji se temelji na B-Spline podjeli (odnosno svojstvu B-Spline funkcije da se može prikazati kao linearna kombinacija skraćenih, translahiranih i skaliranih kopija same sebe) osigurava održavanje linearne neovisnosti kroz proces profinjavanja i osigurava maksimalnu glatkoću NURBS-a kroz proces profinjavanja
- budući da se hijerarhijski pristup u osnovi temelji na tenzor-produkt B-Splineovima, može se jednostavno poopćiti na više dimenzije
- hijerarhijska organizacija baznih funkcija se jednostavno može implementirati u postojeći 'stablo' koncept strukturiranja podataka, slika 3.9



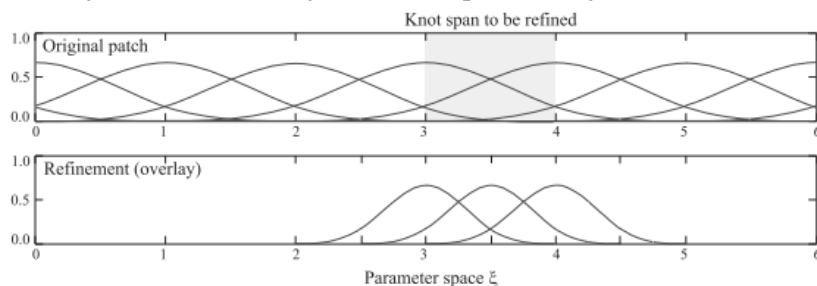
Slika 3.9: ... [26]

- u metodi konačnih elemenata postoje slične tehnike adaptivnog profinjavanja mreže koje mogu olakšati razumijevanje i implementaciju postupaka sa hijerarhijskim B-Spline i NURBS funkcijama.

Jedan od nedostataka kod hijerarhijskog B-Spline koncepta kakav su predstavili Vuong i suradnici [23] je taj što je suport baznih funkcija moguće velik (što je veći  $p$ ), što posljedično može značiti relativno velik broj baznih funkcija iz više različitih levela koje su aktivne na određenom dijelu parametarske domene. Taj nedostatak su Schillinger i suradnici [26] pokušali ublažiti  $hp$ - $d$ -profinjavanjem [34], koji pokazuje veću lokaliziranost postupka u odnosu na  $h$ -refinement. U suštini, autori na primjeru profinjavanja jednog odabranog elementa objašnjavaju svoj postupak: iz novog, višeg levela dodaju se 3 (za kubične B-Spline bazne funkcije) bazne funkcije definirane nad elementom koji se profinjava, slika 3.10. Kod širenja koncepta na više elemenata (slika 3.5) potrebno je voditi računa o minimalnom broju B-Spline funkcija iz finijeg levela koji može opisati uzastopan niz finih B-Spline funkcija; kod ovakvog pristupa postoji mogućnost uvođenja linearne ovisnosti među funkcijama različitih levela (slika 3.11), te je potrebno unutar procesa identificirati i ukloniti sve bazne funkcije prethodnog levela koje se mogu prikazati linearnom kombinacijom baznih funkcija višeg levela. Kod prethodno opisanog hijerarhijskog profinjavanja, neke bazne funkcije eksplicitno su sadržane kao dio baze levela kojem pripadaju, ali i implicitno preko nekih baznih funkcija viših levela s kojima dijele suport, zbog čega autori predlažu dodatno poboljšanje na način da detektiraju takva multipliciranja i uklone ih jednostavnim oduzimanjem takvih funkcija, čime se smanjuju preklapanja baza i posljedično dobiju rjeđe matrice, slika 3.12. Međutim, s implementacijskog stajališta, ovakve procedure oduzimanja zahtijevaju kompleksne algoritme koji opstruiraju automatizaciju procesa profinjavanja mreže. Autori međustalim u svom radu daju detaljan pregled teoretskih, algoritamskih i implementacijskih konceptata hijerarhijskog profinjavanja B-Splinea i racionalne baze odnosno NURBS-a, te isti testiraju na različitim problemima mehanike fluida i strukturalne analize u dvije i tri dimenzije. Osim toga, postupak su primijenili i na metodu ćelija za rješavanje problema s tzv. ugrađenim



(a) Klasični hijerarhijski refiniment: na suptoru baznih funkcija koje su definirane nad elementom koji se 'profinjuje' definiraju se bazne funkcije višeg levela. Profinjena hijerarhijska baza sastoji se od svih funkcija označenih punom linijom.



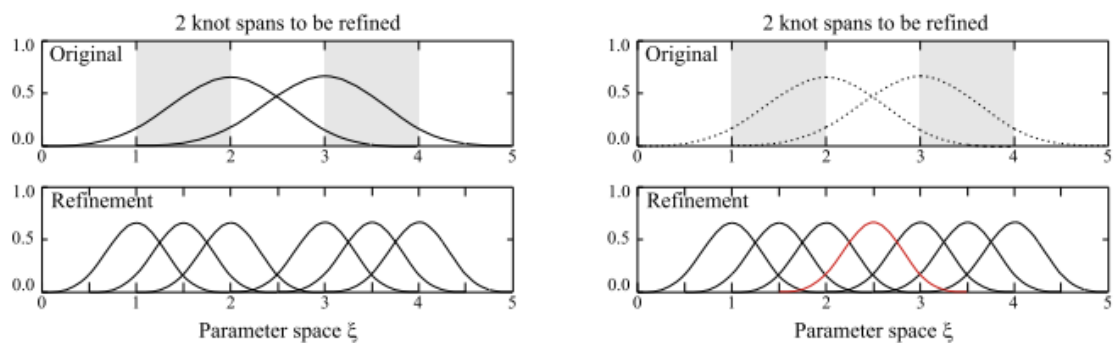
(b) Hijerarhijski refiniment inspiriran *hp-d* pristupom profinjavanju [34]. Kombinacija originalne baze i tri B-Spline funkcije iz višeg levela čine profinjenu hijerarhijsku bazu.

Slika 3.10: Prikaz premrežavanja jednog elementa ilustriran na kubičnim B-Spline funkcijama [26].

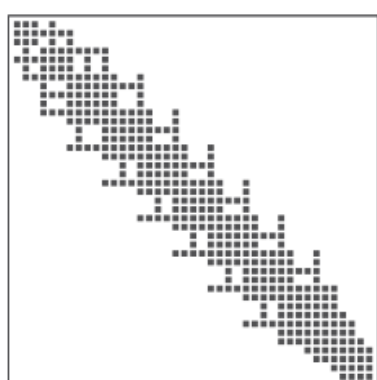
rubovima (eng. *immersed boundary analysis*).

Kako je već naglašeno, glavni nedostatak hijerarhijskih B-Splineova je taj što ne zadovoljavaju svojstvo dijeljenja jedinice. Alternativan pristup uvođenju težinskih prostora kao alata za oporavljanje tog svojstva (izraz 3.15), je korištenje hijerarhijskih splineova sa skraćenom bazom, prethodno opisanih u poglavlju 3.1.2, a uvedenih u radu Carlote Giannelli i suradnika [28]. U tom radu dat je teoretski okvir unutar kojeg je definiran postupak modifikacije HB-Splina koji definira novu THB-bazu, odnosno operator skraćivanja (izraz 3.7). Operator skraćivanja eliminira doprinos funkcija viših levela u hijerarhiji u funkcijama nižih levela. Autori su u radu izveli dokaze zadovoljavanja linearne neovisnosti i dijeljenja jedinice, te ilustrirali koncept na primjerima 'fitanja' podataka. Detaljna matematička analiza THB-Splineova dana je u radu istih autora, [27].

Proširenje primjene THB-Splineova na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u adaptivnoj izogeometrijskoj analizi dano je u radu [25]. U tom radu autori stavljaju naglasak na efikasnost i jednostavnost upotrebe, te prednost daju novo razvijenim strategijama za izogeometrijsku analizu naspram prilagođavanju standardnim FEM procedurama. Implementacija hijerarhijskih procedura je napravljena u G+SMO *open source* objektno orijentiranom C++ paketu i temelji se na binarnom stablu podjela, slika 3.13. Brojevi u krugovima predstavljaju indekse čvorova odgovarajućih levela. Uz svaki od tih krugova spremaju se podaci o mjestu podjele (iz vektora čvorova) i indeksa osi duž koje se podjela vrši. Kvadratići sa

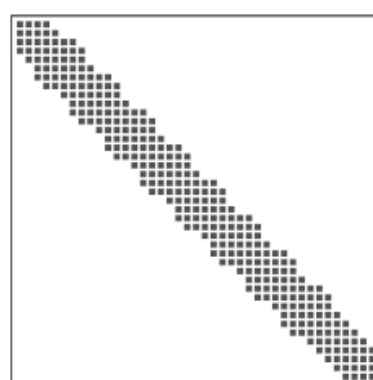


Slika 3.11: Nepotpun niz B-spline baza iz višeg levela može dovesti do linearne ovisnosti baza (lijevo). Crvenom bojom označena je bazna funkcija koja upotpunjava niz finih baza i omogućava isključivanje B-Spline baznih funkcija iz prethodnog levela [26]



Number of dofs: 41  
 Number of non-zero entries: 399  
 Maximum bandwidth: 17

(a) Bez oduzimanja

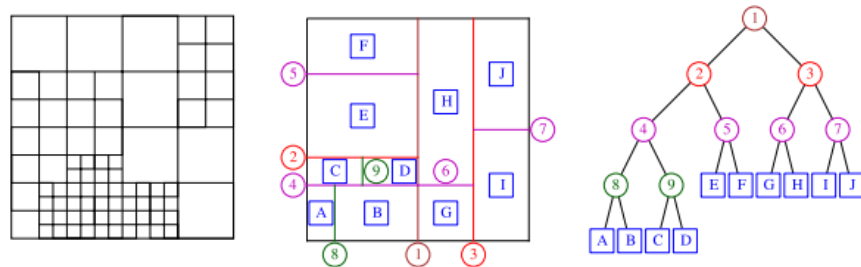


Number of dofs: 41  
 Number of non-zero entries: 307  
 Maximum bandwidth: 9

(b) Sa oduzimanjem

Slika 3.12: Popunjenost matrice krutosti bez (a) i sa (b) procedurom oduzimanja multiplicirajućih funkcija [26].

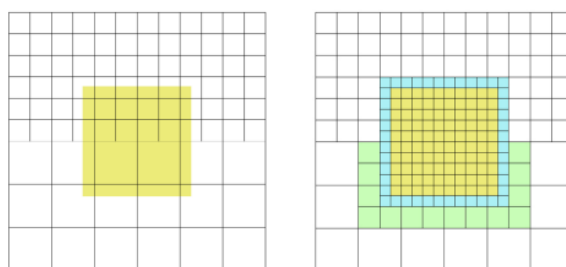
slovima predstavljaju listove binarnog stabla podjela (listovi su pravokutni dijelovi domene koji se sastoje od elemenata istog levela) i uz njih se spremaju podaci o levelu čije elemente sadrže, kao i koordinate te poddomene koju opisuju. Nakon konstruiranja binarnog stabla podjela, odnosno hijerarhijske domene autori u tzv. koraku kompiliranja baza konstruiraju karakteristične matrice  $X^l$  za svaki level  $l$ , koje definiraju aktivne bazne funkcije tog levela. U slučaju THB-splineova, u stablu podataka provjeravaju se preklapanja suporta kako bi se identificirale bazne funkcije koje trebaju biti skraćene, preko najgrubljeg levela  $l_c$  u kojem ista može biti definirana preko B-Spline funkcija tog levela. Definiranje nove domene autori vrše tzv. umetanjem okvira (eng. *box insertion*), nakon čega ažuriraju karakteristične matrice u skladu s rezultirajućom domenom. Kod ovakvog pristupa moguće je da dođe do pojave da elementi iz niže razine poprime oblik L (to se dogodi ako ubačeni okvir ne prati trenutnu hijerarhijsku mrežu), te je potrebno takve elemente lokalno podijeliti, slika 3.14. Nadalje, u praksi je čest slučaj da je adaptivni proces takav da indikator pogreške u jednom koraku



Slika 3.13: Prikaz podjele domene (srednja slika) i binarnog stabla podjele (desna slika) za hijerarhijsku mrežu (lijeva slika)

označi velik broj okvira (nerijetko je riječ i o susjednim), što može rezultirati redundantnim čvorovima u stablu koji mogu biti integrirani u jedan list, te je potrebno provoditi postupak komprimiranja stabla. U tom postupku 'rodbinski' čvorovi koji su istog levela rekurzivno se integriraju u svoj roditeljski čvor koji sam po sebi postaje list.

Autori rješavaju nekoliko primjera opisivanja geometrije THB-Splineovima (od rekonstru-



Slika 3.14: Osjenčani okvir na lijevoj slici se ubacuje u drugom levelu, ali ga je potrebno modificirati prema desnoj slici da ne bi došlo do pojave elemenata L oblika, [25]

iranja geografskih podataka do opisivanja forme trupa broda) te također rješavaju nekoliko primjera izogeometrijske analize sa THB-Splineovima (od *ad hoc* profinjavanja dijagonale jediničnog kvadrata i kocke, do Laplaceove i Poissonove jednačbe te adveksijsko difuzijskog problema kod kojih se profinjavanje između levela temelji na *h*-proceduri i standardnom *residual-based* indikatoru greške).

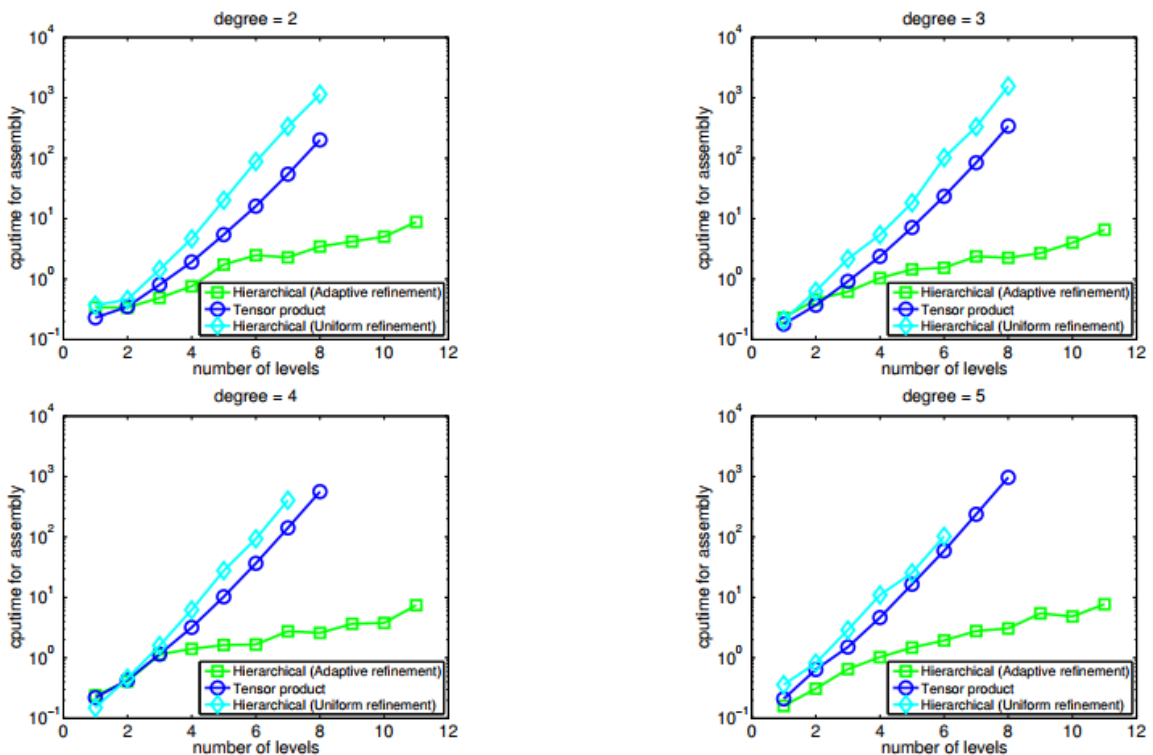
Iako korištenje binarnog stabla kao u radu [25] može biti numerički efikasno, sama veza između hijerarhijske mreže i stabla je neintuitivna. Osim toga, jedna te ista hijerarhijska mreža može biti prikazana s više različito razgranatih stabala. U svrhu jednostavnosti i fleksibilnosti algoritama i struktura podataka, Garau i Vázquez u radu [17] uvode drugačiji, intuitivniji pristup razvoju algoritama za implementaciju adaptivnih izogeometrijskih metoda koristeći hijerarhijske splineove, te ga razvijaju i testiraju na bazi Octave/Matlab paketa GeoPDEs [35, 36]. Njihov pristup temelji se na dvije klase podataka: jedna za hijerarhijsku mrežu s popisom aktivnih elemenata za svaki level, i jedna za hijerarhijsku bazu, s popisom aktivnih funkcija.

Klasa koja definira hijerarhijsku mrežu mora sadržavati sljedeće informacije:

- Trenutni broj levela
- Strukturu podataka koja za svaki level  $l$  definira mrežu tog levela  $Q_l$
- Popis aktivnih elemenata svakog levela
- Popis deaktiviranih elemenata svakog levela
- Pravilo profinjavanja s levela  $l$  na  $l + 1$  (*dyadic, triadic...*)

Klasa za hijerarhijsku bazu mora sadržavati sljedeće informacije:

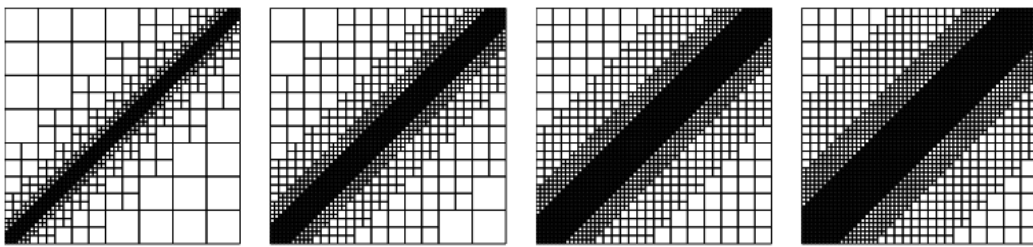
- Trenutni broj levela
- Za svaki level  $l$ , podatke koji definiraju tenzor produkt bazu tog levela,  $\mathcal{B}_l$
- Popis aktivnih funkcija svakog levela
- Popis deaktiviranih funkcija svakog levela
- Koeficijente  $c_{k,l+1}(\beta_{i,l})$  iz izraza 3.1, koji definiraju vezu među baznim funkcijama dva uzastopna levela.



Slika 3.15: Usporedba utrošenog računalnog vremena potrebnog za slaganje matrice krutosti naspram broja levela, za slučaj adaptivnog profinjavanja i globalnog profinjavanja (klasičnog i hijerarhijskog)

Autori su pokazali da ovakav pristup pruža sve potrebne informacije za adaptivne IGA metode, te da vrijede za klasične hijerarhijske B-splineove opisane u poglavlju 3.1.1,

pojednostavljene hijerarhijske splineove [37] kao i obje njihove verzije sa skraćenom bazom (3.1.2). Važno je naglasiti da se cjelokupna procedura može temeljiti na odabiru elemenata ali i odabiru funkcija kod strategije označavanja. U skladu s tim, autori koriste dva jednostavna *a posteriori* indikatora, jedan koji se temelji na elementima [30] i drugi koji se temelji na funkcijama [31]. Predstavljene algoritme za profinjavanje i *coarsening* testirali su na nekoliko primjera rješavanja skalarnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Evaluaciju efikasnosti svoje implementacije autori su proveli na način da su mjerili računalno vrijeme potrebno za slaganje matrice krutosti i vektora opterećenja: kao referencu uzeli su u obzir globalno profinjavanje sa standardnim tenzor-produkt splineovima, te taj rezultat uspoređivali sa hijerarhijskim adaptivnim profinjavanjem ali i hijerarhijskim globalnim profinjavanjem mreže. Kako se vidi sa slike 3.15, pokazalo se da je adaptivno profinjavanje očekivano računalno 'jeftinije' za istu magnitudu pogreške, ali i da je za klasični globalni refinement potrebno manje računalnog napora budući da ovakav pristup više iskorištava tenzor-produkt prirodu splineova, za razliku od globalnog profinjavanja mreže u okviru hijerarhijskih procedura.

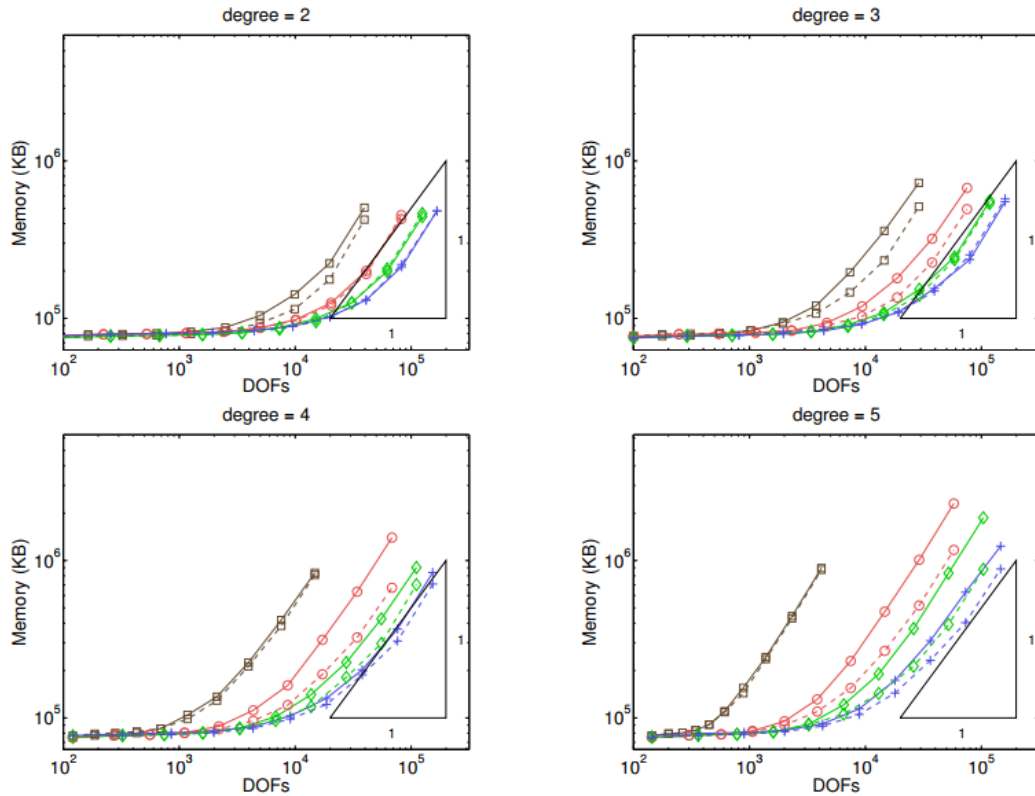


Slika 3.16: Četiri različite konfiguracije dijagonalnog profinjavanja mreže na kvadratnoj domeni

Na slici 3.16 prikazane su četiri različite konfiguracije dijagonalnog profinjavanja na kvadratnoj domeni dobivene tako da su zadane različite udaljenosti između elemenata različitih razina a profinjavanje je vršeno do desete razine. Na ovako zadanim mrežama autori provode testove utroška računalne memorije te dobivene rezultate uspoređuju s onima u [25]. Rezultati su prikazani na slici 3.17. Ovaj test primjer pokazuje da utrošak memorije ima linearan rast kako za HB, tako i za THB-Splineove, neovisno o stupnju polinoma ili maksimalnoj udaljenosti među elementima. Razliku u odnosu na rezultate iz [25] autori pravdaju različitim slaganjem i pohranjivanjem koeficijenata operatora skraćivanja. Autori dolaze do još jednog značajnog zaključka: utrošak memorije više ovisi o broju razina nego o broju stupnjeva slobode, što potvrđuju još jednim sličnim primjerom na drugačijem uzorku profinjavanja, slika 3.18. Kako se vidi sa slike 3.19, za svaki uzorak profinjavanja mreže utrošak memorije ovisi uglavnom o broju razina.

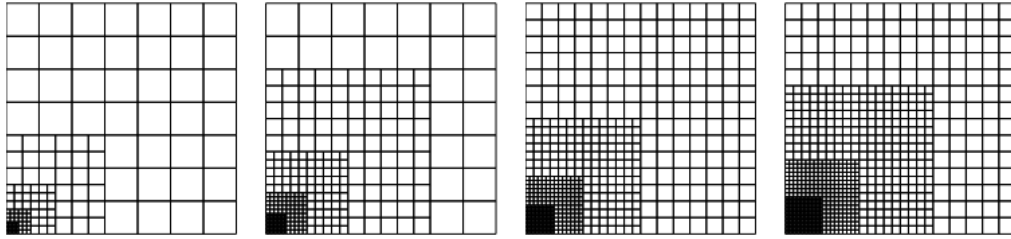
Bornemann i suradnici [38] koriste dobro poznat koncept subdivizijskih (eng. *subdivision*) postupaka kako bi olakšali integraciju hijerarhijskih B-Splineova u već postojeće implementacije metode konačnih elemenata. Ovaj koncept podrazumijeva rekurzivno



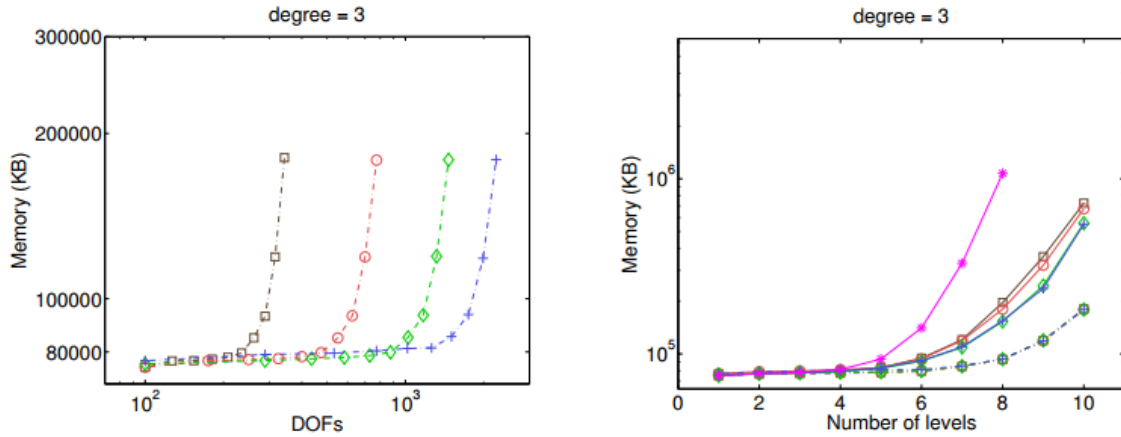


Slika 3.17: Eksperimentalni rezultati utroška memorije za dijagonalni refinement na kvadratnoj domeni: Smeđa, crvena, zelena i plava boja odgovaraju hijerarhijskim mrežama sa slike 3.16, s lijeva na desno. Pune linije označavaju standardne HB-Splineove, a isprekidane THB-splineove.

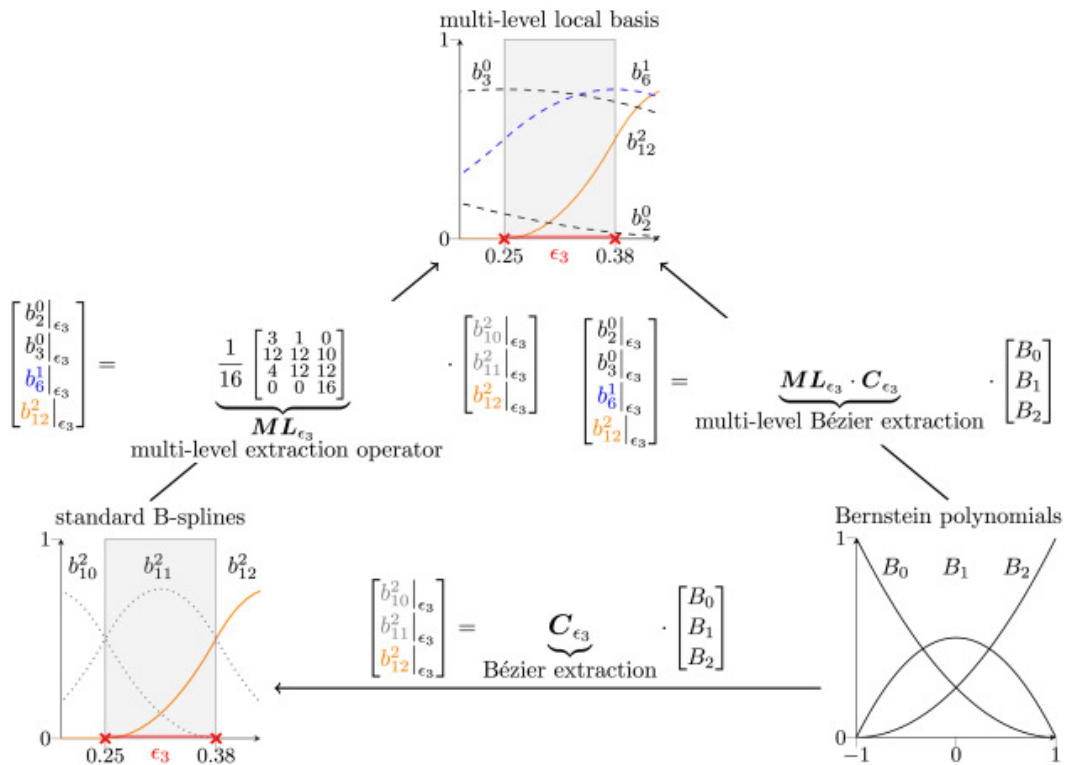
primjenjivanje određenog pravila profinjavanja na izvornu mrežu, odnosno nulti level. Subdivizijski koncept kakav su autori implementirali može se poistovjetiti sa uniformnim  $h$ -refinementom kod kojeg se postojeći raspon čvorova u svakoj razini profinjavanja prepolavlja. Ovakav pristup može se implementirati u neki postojeći softver koji se temelji na metodi konačnih elemenata budući da za izračun lokalne matrice krutosti i vektora čvorova treba poznavati samo B-splineove razine elementa za kojeg se računa. Globalno slaganje vrši se pomoću projekcijskih matrica koje se konstruiraju za svaki element. U suštini, ovakav pristup, a i sama implementacija, sličan je onom u prethodno opisanom radu Garau i suradnika [17]. Razlikuju se u načinu računanja koeficijenata  $c_{k,l+1}$ , te u slaganju transformacijske matrice podjele definirane u sekciji 3.4: Bornemann i autori definiraju elementarnu matricu na razini elementa (lokalnu), koja je u stvari podmatrica globalne matrice  $C_l$ , kakvu definiraju Garau i suradnici [17].



Slika 3.18: Četiri različite konfiguracije profinjavanja



Slika 3.19: Utrošak memorije za refinement sa slike 3.18: Smeđa, crvena, zelena i plava boja odgovaraju hijerarhijskim mrežama, gledajući s lijeva na desno. Desna slika prikazuje usporedbu utroška memorije naspram broja nivoa. Ljubičasta puna linija označava slučaj uniformnog profinjavanja mreže.



Slika 3.20: Prikaz multi-level Beziér ekstrakcije baznih funkcija iz hijerarhijske baze definiranih nad referentnim elementom. Preuzeto iz [39]

Drugačiji pristup prilagođavanju hijerarhijskih splineova konvencionalnoj metodi konačnih elemenata prezentiraju autori u radu [39]. U tu svrhu autori koriste Bézierovu ekstrakciju [40] te predlažu poopćenu varijantu: autori kombiniraju princip Bézierove ekstrakcije s multi-level ekstrakcijom. Multi-level ekstrakcija u suštini hijerarhiju funkcija i vektora čvorova prikazuje preko elementa te nad elementom definiranih funkcija svedenih na isti level, a operator Beziérove ekstrakcije preslikava standardni skup referentnih baznih funkcija koje su uniformne za svaki element u bazne funkcije određenog levela. Ideja multi-level Bézierove ekstrakcije je prikazana na slici 3.20. Princip multi-level ekstrakcije u suštini je sličan pristupu u radovima [23, 41]. Razlika je što se u [23, 41] ekstrakcija baznih funkcija primjenjuje na razini levela (na bazne funkcije nad elementom koje su tog levela), dok se u radu [39] primjenjuje na razini elementa, na bazne funkcije koje su možebitno iz različitih levela. Autori su ovaj pristup primijenili na HB i THB-splineove, te zaključuju da je ovakav pristup također pogodan i za druge parametrizacije definirane na ugniježđenim prostorima, kao i za različite metode profinjavanja, za proširenje na nelinearne probleme te za paralelnu implementaciju.

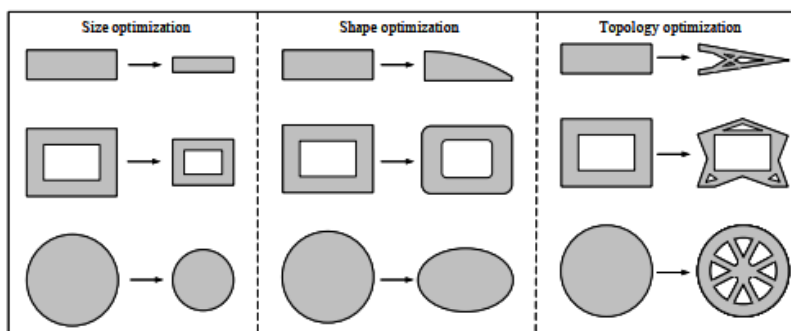
## 4. Izogeometrijska analiza u kontekstu optimiranja struktura

Većina inženjerskih optimizacijskih problema unutar samog postupka optimizacije podrazumijeva i izvođenje određenih numeričkih analiza na temelju čijih rezultata se određuje izvrsnost funkcije (ili više funkcija) cilja i zadovoljenost ograničenja. Kad je riječ o strukturalnim optimizacijskim problemima, bilo da je riječ o optimizaciji oblika, bilo topologije, najčešće korištena metoda za proračun odziva strukture na opterećenje je metoda konačnih elemenata (eng. *Finite Element Method*). Kod klasične FEM metode, kao što je u prethodnom poglavlju već spomenuto, za modeliranje geometrije i numeričke mreže koriste se različiti matematički pristupi: *splineovi* za zapis geometrije, a Lagrangeovi ili Hermiteovi polinomi za analizu. To za posljedicu ima dodatno računalno opterećenje, koje posebno dolazi do izražaja jer se numerička analiza provodi unutar optimizacijske petlje što znači da je sa svakom iterativnom promjenom geometrije potrebno ponovno provoditi diskretizaciju kako bi rezultati bili pouzdani. Ako se metoda konačnih elemenata koristi kao alat za analizu u okviru optimizacijskog procesa, značajno računalno opterećenje predstavlja i sam odabir varijabli optimiranja. Ako se za varijable optimiranja odaberu koordinate čvorova konačnih elemenata to za posljedicu ima veliki broj varijabli optimiranja, odnosno prostor traženja optimalnog rješenja postaje visoko dimenzionalan. Drugačiji pristup definiranju varijabli optimiranja je uvođenje dodatne parametrizacije između čvorova konačnih elemenata i varijabli optimiranja, čime se znatno može smanjiti broj varijabli optimiranja, ali je potrebno u svakoj iteraciji vršiti reparametrizaciju.

Iz prethodno napisanog, može se unaprijed iščitati prednost korištenja izogeometrijske analize u kontekstu optimiranja oblika i/ili topologije: korištenjem istih baznih funkcija u samoj analizi koje se koriste kod definiranja geometrije, može se reći da je diskretizacijski model, odnosno mreža elemenata nad kojima se vrši integracija, izravno ugrađen u geometrijski zapis. Samim time se za logičan odabir varijabli optimiranja nameću kontrolne točke parametarskog zapisa geometrije. Kako je kod klasičnih postupaka premrežavanja (eng. *refinement-a*) u izogeometrijskoj analizi slučaj da geometrija ostaje nepromijenjena unatoč premrežavanju, moguć je odabir malog broja varijabli optimiranja korištenjem parametara (kontrolnih točaka) 'grublje' mreže za varijable optimiranja, uz osiguranu veliku točnost diskretizacijskog modela korištenjem 'fine' mreže za analizu.

Kad je riječ o strukturalnoj optimizaciji, nužno je razlikovati tri kategorije optimizacije

dizajna: optimizacija veličina, optimizacija oblika, te optimizacija topologije, slika 4.1. Kod



Slika 4.1: Kategorije strukturalne optimizacije, [42]

optimizacije veličina varijabla optimiranja može biti primjerice debljina materijala, poprečni presjek i sl. Kod optimizacije oblika varijabla optimiranja je kontura, ili dio konture domene materijala koja se optimira. Najopćenitija kategorija, i najapstraktnija, je optimizacija topologije koja za cilj ima pronaći optimalnu distribuciju materijala, gdje materijal može 'nastajati' i 'nestajati' tokom postupka optimizacije.

U ovom poglavlju kvalifikacijskog rada dat će se uvodno kratak osvrt na matematičku formulaciju problema strukturalne optimizacije te zatim pregled metoda i dosadašnjih istraživanja, odnosno pregled dostupne literature koja obrađuje optimizaciju oblika i topologije u okviru izogeometrijske analize, s naglaskom na level-set metode.

## 4.1. Opća matematička formulacija problema strukturalne optimizacije

Formulacija općeg problema strukturalne optimizacije uvijek se sastoji od:

- *Funkcija cilja ( $f$ ):* Za svaki mogući dizajn, funkcija cilja  $f$  daje kvantitativan podatak o izvrsnosti tog dizajna. Najčešće se optimizacijski problemi formuliraju na način da se traži dizajn koji ima što je moguće manju vrijednost  $f$  (minimizacijski problem).
- *Varijabli optimiranja ( $x$ ):* Funkcija ili vektor koji opisuje dizajn i koji se mijenja tokom optimizacije. Može opisivati neku geometrijsku veličinu (debljinu, duljinu,...), odabir materijala, oblik ili topologiju.
- *Varijabli stanja ( $y$ ):* Za određenu strukturu, odnosno dizajn definiran s  $x$ ,  $y$  je funkcija ili vektor koji predstavlja odziv strukture (pomak, naprezanje, deformaciju...).

Nakon definiranja svih 'sastojaka', opći problem strukturalne analize definira se kako slijedi [43]:

$$(\mathbb{S}\mathbb{O}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiziraj } f(x, y) \text{ s obzirom na } x \text{ i } y \\ \text{na koju djeluju} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{ograničenja na } y, g(y) \leq 0 \\ \text{ograničenja na } x, g(x) \leq 0 \\ \text{ograničenja ravnoteže} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ograničenja na  $y$  mogu biti primjerice ograničenja pomaka na nekom dijelu strukture, a ograničenja na  $x$  su ograničenja koja se odnose na varijable optimiranja koje opisuju dizajn. Ograničenje ravnoteže diskretiziranog problema definirano je sljedećom jednažbom:

$$\mathbf{K}(x)\mathbf{u} = \mathbf{F}(x) \quad (4.2)$$

gdje je  $\mathbf{K}(x)$  matrica krutosti strukture, koja je općenito funkcija dizajna,  $\mathbf{u}$  predstavlja vektor pomaka (odnosno  $\mathbf{u}$  je u ovom slučaju varijabla stanja  $y$ ), a  $\mathbf{F}(x)$  je vektor sila koji također može ovisiti o dizajnu. Izraz 4.2 je tipično parcijalna diferencijalna jednažba. Formulacija kakva je predstavljena uobičajeno se naziva simultanom formulacijom. Budući da je čest slučaj da se varijable stanja  $y$  mogu definirati preko varijabli optimiranja  $x$  (odnosno ako je  $\mathbf{K}(x)$  invertibilna za svaki  $x$ ) može se pisati sljedeće:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = \mathbf{K}(x)^{-1}\mathbf{F}(x)$ . Na ovaj način prethodno eksplicitno izraženi uvjeti ravnoteže implicitno se uvode u tzv. ugniježđenu formulaciju problema strukturalne optimizacije:

$$(\mathbb{S}\mathbb{O})_{nf} = \left\{ \begin{array}{l} \min_x, \quad f(x, \mathbf{u}(x)) \\ \text{s.t.}, \quad g(x, \mathbf{u}(x)) \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

U ovakvoj formulaciji ograničenja ravnoteže se u svakom optimizacijskom koraku, za trenutne vrijednosti varijabli optimiranja, računaju iterativno nekom od numeričkih metoda, te se uvrštavaju u funkciju cilja. Posljedica ovakve formulacije je da ograničenja ravnoteže nisu egzaktno zadovoljena već aproksimativno, za razliku od simultane formulacije.

Procedura rješavanja ovakve formulacije metodama prvog reda (metodama koje zahtijevaju samo prve derivacije) može se opisati u nekoliko koraka:

1. Postaviti brojač iteracija  $k = 0$  te definirati početne varijable optimiranja  $\mathbf{x}^0$ . Ovime je definiran inicijalni dizajn strukture.
2. Izračunati vektor pomaka  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^k)$  rješavanjem 4.2 nekom od numeričkih metoda (MKE, IGA...)
3. Za trenutni iznos varijabli optimiranja  $\mathbf{x}^k$  izračunati funkciju cilja ( $f(\mathbf{x}^k)$ ), ograničenja ( $g_i(\mathbf{x}^0)$ ), gdje je  $i = 1, \dots, l$ ) kao i potrebne derivacije ( $\nabla f, \nabla g_i$ )
4. Formulirati eksplicitnu konveksnu aproksimaciju  $(\mathbb{S}\mathbb{O})_{nf}^k$  ugniježđene formulacije

strukturnog optimizacijskog problema  $(\mathbb{SO})_{nf}$

5. Izračunati novi dizajn  $\mathbf{x}^{k+1}$  rješavanjem  $(\mathbb{SO})_{nf}^k$  odabranom nelinearnom optimizacijskom metodom.
6. Postaviti brojač na  $k = k + 1$  te se vratiti na korak 2. do zadovoljavanja kriterija zaustavljanja.

Kod numeričkog pristupa rješavanju ovakvog problema potrebno je poznavati derivacija funkcija cilja  $f$  i svih ograničenja  $g$  u odnosu na varijable optimiranja. Poznavanje tih informacija pruža uvid u osjetljivost optimizacijskog postupka, odnosno funkcije cilja i ograničenja, u odnosu na promjene dizajna tj. promjene varijabli optimiranja. Analiza osjetljivosti se najjednostavnije može odrediti numeričkim putem, metodom konačnih razlika. Nedostatak ove metode je numerička neefikasnost i uvođenje greške diskretizacije u izračun osjetljivosti, a najveća prednost metode je jednostavna implementacija. Praktično, češće se koriste analitički postupci određivanja osjetljivosti, direktni i spregnuti (eng. *adjoint*). Detaljni opisi i izvodi ovih postupaka u kontekstu strukturalne optimizacije mogu se pronaći u knjizi [43] i preglednom radu [44].

## 4.2. Optimizacijske metode

Rezultat optimizacije bilo kojeg problema uvelike ovisi o izboru metode optimiranja, od kojih svaka za sebe ima neke prednosti i nedostatke za rješavanje određenog tipa problema. Prikladnost određenih metoda je polje istraživanja koje je dosta široko obrađivano u literaturi, i daleko izvan opsega ovog rada, pa će se spomenuti samo neke od njih. Optimizacijski problemi mogu se klasificirati po različitim kriterijima kako slijedi:

- prema dimenzionalnosti varijabli optimiranja:
  - jednodimenzionalni (jedna varijabla optimiranja)
  - $n$ -dimenzionalni ( $n$  varijabli optimiranja)
- prema broju funkcija cilja:
  - s jednom funkcijom cilja (eng. *single-objective*)
  - s više funkcija cilja (višeciljni, eng. *multi-objective*)
- prema tipu varijabli:
  - s kontinuiranim varijablama
  - s diskretnim varijablama
- prema postojanju ograničenja:

- bez ograničenja
- sa ograničenjima
- prema karakteru problema:
  - linearni postupci (eng. *linear programming*)
  - nelinearni postupci (eng. *nonlinear programming*)
- prema domeni pretraživanja:
  - lokalne metode
  - globalne metode

Kad je riječ o inženjerskim problemima strukturalne optimizacije, njih najčešće možemo svrstati u nelinearne višeciljne optimizacijske probleme s kontinuiranim funkcijama i ograničenjima. Rješavanje takvih optimizacijskih problema na efikasan način je često izazovan i zahtjevan proces koji u praksi uobičajeno podrazumijeva modificiranje i kombiniranje različitih optimizacijskih metoda, odnosno prilagođavanje algoritma problemu koji se rješava. Za rješavanje ovakvih problema nerijetko se koriste gradijentne metode, te će najjednostavnija biti ukratko opisana u daljnjem tekstu, u ilustrativne svrhe same ideje. Kratko će se iznijeti i ideja transformacijskih metoda koje probleme s ograničenjima svode na probleme bez ograničenja. Kad je riječ o problemima s diskretnim funkcijama i varijablama prikladniji su evolucijski postupci optimiranja.

### **Gradijentne metode optimiranja**

Gradijentne metode su se pokazale efikasnim za rješavanje nelinearnih problema s kontinuiranim funkcijama. Ove metode zahtijevaju poznavanje ne samo vrijednosti funkcija već i njihovih derivacija. Primjenjive su na optimizacijske probleme bez ograničenja s jednom funkcijom cilja, te na probleme s ograničenjima koji su prethodno nekim od transformacijskih postupaka (Lagrangeova formulacija, kazneni dodaci i sl.) svedeni na probleme bez ograničenja. Kod višeciljnih problema potrebno je uvesti proces odlučivanja, odnosno na neki način rangirati funkcije ciljeva po važnosti, što je moguće primjerice zadavljem težinskih faktora svakoj od funkcija cilja, odnosno formulacijom jedne nove, težinske funkcije cilja. Kod višeciljnih optimizacijskih problema cilj je pronaći Pareto optimalno rješenje. Gradijentne metode su iterativan optimizacijski postupak, unutar kojeg se generira niz uzastopnih rješenja (dizajna)  $\{\mathbf{x}^i\}, i = 0, 1, \dots$ , koji minimiziraju funkciju cilja, odnosno za koje vrijedi sljedeći uvjet:

$$f(\mathbf{x}^{i+1}) < f(\mathbf{x}^i) \quad (4.4)$$



Sve gradijentne metode generiraju uzastopna rješenja sličnom procedurom koja se temelji na izrazu [45]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} s(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (4.5)$$

gdje je  $\mathbf{x}^{(k)}$  trenutna procjena rješenja,  $\alpha^{(k)}$  parametar koračanja, a  $s(\mathbf{x}^{(k)})$  smjer pretraživanja rješenja. U suštini, gradijentne metode razlikuju se u načinu na koji određuju  $\alpha^{(k)}$  i  $s(\mathbf{x}^{(k)})$ . Najjednostavnija gradijentna metoda je tzv. Cauchyjeva metoda najbržeg spusta, koja za smjer pretraživanja rješenja uzima smjer negativnog gradijenta na funkciju cilja u točki trenutnog rješenja (iz razvoja funkcije u Taylorov red oko trenutnog rješenja vidljivo je da funkcija ima najveći porast u smjeru  $\nabla f$ , odnosno najveći pad vrijednosti u smjeru  $-\nabla f$ ), pa izraz 4.5 postaje:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (4.6)$$

gdje je  $\alpha^{(k)}$  u svakoj iteraciji potrebno odrediti nekom od metoda jednodimenzionalnog pretraživanja. Nedostatak ove metode je spora konvergencija što je posljedica toga što promjena u rješenju ovisi o iznosu gradijenta u prethodnom rješenju, koji teži u nulu što je rješenje bliže optimalnom. Gradijentnih metoda ima mnogo [45, 46], od kojih neke koriste i druge derivacije, poput Newtonovih i modificiranih Newtonovih postupaka, Davidon-Fletcher-Powell metode (DFP), Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) itd.

## Transformacijske metode

Kod problema s ograničenjima jednakosti i/ili nejednakosti jedan od pristupa rješavanja je svođenje tog problema na niz problema bez ograničenja. To se postiže transformacijskim metodama u koje se ubraja koncept kaznenih funkcija i metode Lagrangeovih množitelja, za koje se onda formuliraju nužni uvjeti optimalnosti (Kuhn-Tuckerovi uvjeti).

Koncept kaznenih funkcija temelji se na eliminiranju ograničenja formuliranjem ukupne kaznene funkcije:

$$P(x, R) = f(x) + \Omega(R, g(x), h(x)) \quad (4.7)$$

gdje je  $R$  skup kaznenih parametara,  $\Omega$  kazneni dodatak dodan na funkciju cilja problema,  $g(x)$  ograničenja nejednakosti ( $g(x) \leq 0$ ) a  $h(x)$  ograničenja jednakosti ( $h(x) = 0$ ). Metode sa kaznenim dodacima razlikuju se u načinu na koji se definiraju kazneni parametri i na koji se formulira kazneni dodatak. Unatoč nekim nedostacima kao što su spora konvergencija, distorzija kontura izo-linija kaznene funkcije (izraz 4.7) itd., kaznene metode su široko primjenjivane u praksi, zbog same jednostavnosti koncepta i tretiranja nelinearnih ograničenja.

Lagrangeove metode množitelja, s druge strane, temelje se na formulaciji Lagrangeove funkcije:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda h(x) + \sum_{j=1}^r \{\mu_j [g_j(x) + z_j^2]\} \quad (4.8)$$

gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  Lagrangeovi množitelji za jednakosna, odnosno nejednakosna ograničenja. Na

ovaj način ne rješava se originalni problem, već se isti transformira u sustav jednadžbi koji se sastoji od nužnih uvjeta optimalnosti. U iterativnom rješavanju takvog sustava simultano se traže vrijednosti varijabli optimiranja  $x$  i Lagrangeovih množitelja,  $\lambda$  i  $\mu$ . Budući da je rješenje takvog problema sedlasta točka jednadžbe 4.8 (minimum po  $x$ , maksimum po množiteljima) ova formulacija se često razmatra kao dualni problem [46]. 70-ih godina uvodi se koncept tzv. proširene Lagrangeove funkcije (eng. *augmented Lagrangian function*), [47, 48]. Ideja takvog koncepta je u proširenju Lagrangeove funkcije (izraz 4.8) dodatnim izrazom (npr. kvadratnim kaznenim dodatkom). Na taj način formulira se nova funkcija bez ograničenja čiji minimum je Kuhn-Tuckerova točka izvornog problema. Pokazalo se da ova formulacija koja je u suštini kombinacija kaznene i Lagrangeove formulacije, ublažuje nedostatke obaju metoda.

## Genetski algoritmi

Genetski algoritmi u traženju optimalnog rješenja su još jedan uspješan pokušaj čovjeka da imitira prirodu. Ideje genetskih algoritama zasnovane su na principima prirodne selekcije i oponašanju genetskih procesa. Dobro su primjenjivi na probleme sa diskretnim varijablama, ali i kontinuiranim i mješovitim, budući da ne rade eksplicitno sa vrijednostima varijabli već te vrijednosti kodiraju putem binarnog zapisa. Zbog stohastičke prirode traženja rješenja genetski algoritmi tipično nalaze globalni ekstrem te se zbog toga mogu svrstati u globalne metode. Genetski algoritmi i druge heurističke metode (poput simuliranog žarenja, neuralnih mreža, evolucijskih metoda itd.) su zbog svoje fleksibilnosti i sposobnosti rješavanja visoko nelinearnih problema postale popularne u znanstvenim krugovima.

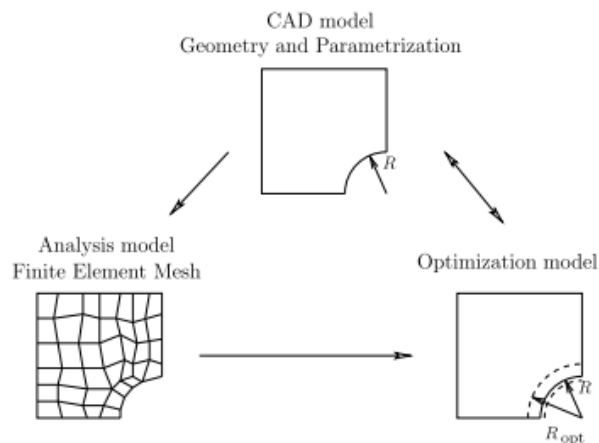
## 4.3. Optimizacija oblika

### 4.3.1. Pregled literature

Kod optimizacije oblika, cilj je pronaći optimalan oblik domene strukture  $\Omega$  u svrhu minimiziranja (ili maksimiziranja) funkcije cilja, uz zadovoljavanje određenih ograničenja. Optimizacija oblika primjenjuje se u mnogim područjima istraživanja: od strukturalne mehanike, računalne dinamike fluida, medicine, elektromagnetizma itd.

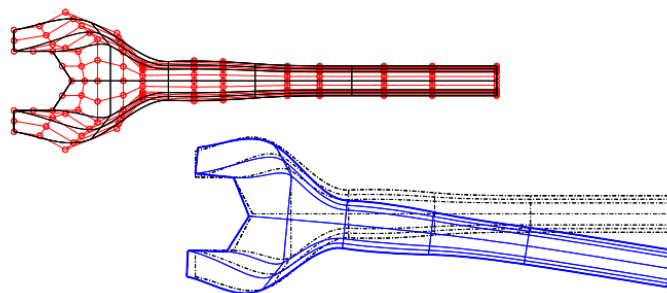
Funkcija cilja najčešće je zadana kao funkcional ovisan o rješenju parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje je opet ovisno o domeni  $\Omega$ . U strukturalnoj optimizaciji to su najčešće (ali ne isključivo) težina, pohranjena energija (npr. podatljivost), maksimalno naprezanje ili maksimalni pomak.

Opći proces dizajniranja optimalnog oblika prikazan je na slici 4.2. Da bi optimizacija bila uspješna, važnu ulogu ima definiranje parametrizacije geometrije i odabir varijabli optimiranja. U počecima optimizacije oblika, koordinate čvorova diskretizacije koristile su se



Slika 4.2: Opći proces optimizacije oblika [12]

kao varijable optimiranja, no ovakav pristup pokazao je niz nedostataka (velik broj varijabli optimiranja, distorzije mreže itd.) te često rezultirao nedopustivim rješenjima. Ti nedostaci su se prvotno ublažavali uvođenjem dodatnih ograničenja na regularnost geometrije, međutim ovakav pristup je računalno skup. Drugi pristup nadilaženju tih nedostataka je razdvajanje modela koji definira dizajn strukture i modela za analizu. Za model koji opisuje dizajn tako se koriste različiti matematički zapisi za rubove struktura, među njima polinomni modeli, različiti parametarski zapisi (B-Spline, NURBS itd.) itd. Iako su se splineovi pokazali vrlo efikasnim zbog svog svojstva glatkoće i kontinuiranosti, i dalje veliku ulogu u cjelokupnom optimizacijskom procesu igra veza između ta dva modela i zahtijeva oprezno rukovanje budući da je geometrijski prikaz različit u oba modela. Taj problem i radovi na temu izogeometrijske analize motiviraju Walla i suradnike da prvi primjene taj koncept u okviru optimizacije oblika [12], i izbjegnju tipične parametrizacijske probleme u tradicionalnoj optimizaciji oblika koja se temelji na metodi konačnih elemenata. Autori predstavljaju optimizacijski koncept temelje na gradijentnoj metodi pomičnih asimptota (eng. MMA - *method of moving asymptotes*) te na analitičkoj analizi osjetljivosti. MMA optimizacijska metoda se pokazala dobrom za rješavanje nelinearnih optimizacijskih problema sa glatkim funkcijama i temelji se na definiranju niza jednostavnijih konveksnih, aproksimacijskih podproblema temeljenih na osjetljivosti. Funkciju cilja temelje ili na pomacima određenih dijelova strukture ili je definiraju preko podatljivosti strukture. Predloženi koncept primjenjuju i pokazuju na tri primjena: konzolne grede (funkcija cilja je minimum pomaka kraja grede), ploče s rupom (funkcija cilja je minimum podatljivosti) te optimizacija oblika otvorenog ključa (funkcija cilja je minimalna površina), slika 4.3 Osim rada Walla i suradnika, značajan doprinos za modeliranje i optimizaciju oblika zakrivljenih geometrija može se naći u radovima [49, 50, 51, 52].



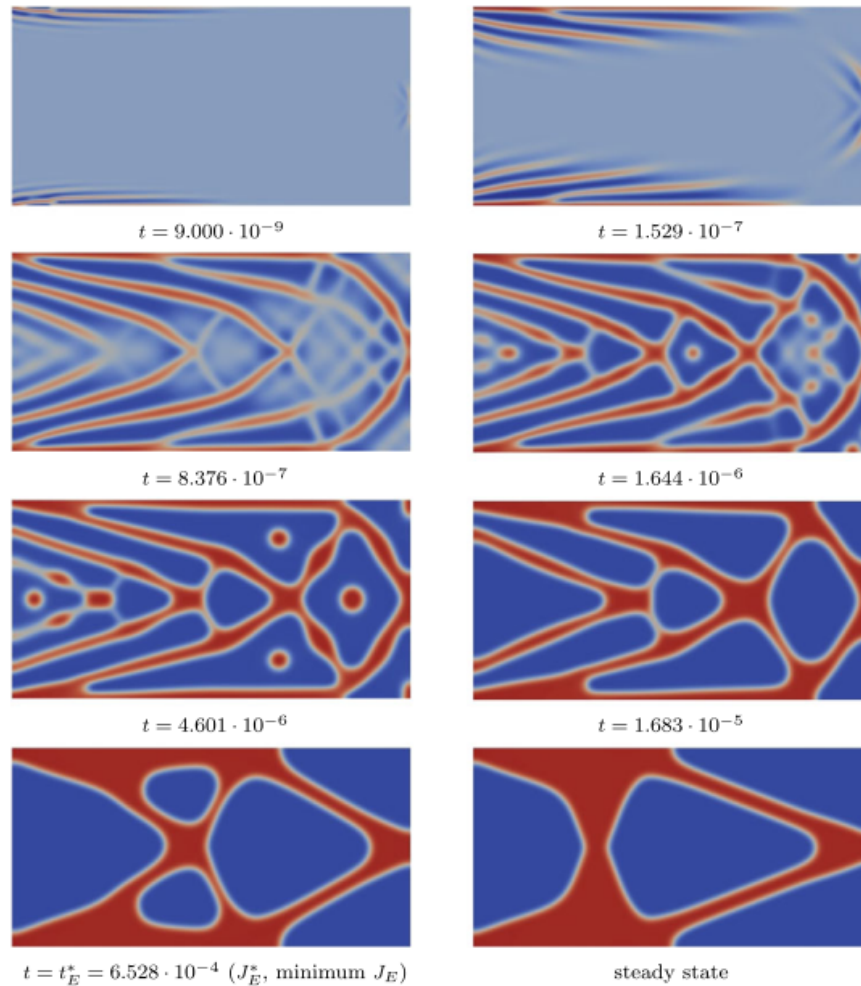
Slika 4.3: Optimalni dizajn otvorenog ključa. Gornja slika prikazuje optimalni oblik i mrežu kontrolnih točaka koja definira konačni oblik, a donja slika prikazuje deformirani oblik ključa uslijed opterećenja [12]

## 4.4. Optimizacija topologije

Optimizacija topologije podrazumijeva pronalazak optimalne distribucije materijala na određenoj domeni, uz zadovoljavanje određenih ograničenja. U mehanici čvrstih tijela optimiranje topologije podrazumijeva određivanje dva nepoznata spregnuta polja; polja pomaka i oblika, odnosno distribucije materijala. Za razliku od optimizacije oblika, topološka optimizacija ne zahtijeva poznavanje početnog rješenja koje je blizu optimalnog.

Najčešći pristupi topološkom optimiranju su tzv. metode koje se temelje na gustoći (eng. *density-based methods*) kao što su homogenizacijske metode i SIMP metode. Kod ovih metoda geometrija je definirana distribucijom materijala u više faza, od kojih jedna predstavlja područja domene u kojima materijal postoji, a druga područja domene gdje materijal ne postoji. Drugačiji pristup temelji se na parametriziranju geometrije preko implicitnih zapisa rubova. Jedna od takvih metoda su level-set metode koje će biti detaljnije opisane u [?]. Prvi rad u kojem se izogeometrijska metoda koristi umjesto klasične FEM analize napisali su Seo i suradnici [53]. Autori u svom radu koriste odrezane (eng. *trimmed*) plohe (kakve se i koriste u CAD alatima) za točan zapis topologije strukture koja se optimira spregnute sa izogeometrijskom analizom. Ovakav pristup se pokazao kompliciranim zbog stvaranja unutrašnjih fronti i znatnog povećanja potrebnog računalnog vremena s porastom broja odrezanih ploha i krivulja, unatoč tome što ujedinjuje dizajn i analizu. Kumar i autori [54] koriste konačne elemente s B-Spline baznim funkcijama kod optimiranja topologije metodom koja se temelji na funkciji gustoće kako bi uklonili tzv. efekt šahovske ploče (eng. *checkerboard effect*), te na gradijent funkcije gustoće dodaju kazneni dodatak u svrhu postizanja glatkoće iste i dobivanja rješenja koje je neovisno o mreži. Za varijable optimiranja uzimaju vrijednosti gustoće u kontrolnim točkama B-Splinea. Sličan rad iz područja metoda temeljenih na gustoći s izogeometrijskom analizom objavili su Qian i suradnici [55], koji su drugačije formulirali funkciju gustoće te postigli optimalan dizajn bez umjetnog stvaranja efekta šahovske ploče bez potrebe uvođenja dodatnih filtera i penalizacija. Još jedan od značajnijih radova koji se bavi topološkom optimizacijom i izogeometrijskom analizom (a ne spada u level-set metode

koje će biti opisane posebno) je rad autora Dedé i suradnika [56]. Oni koriste tzv. *phase-field* model za formulaciju i rješavanje topološkog optimizacijskog problema. Kod njihovog pristupa optimalna topologija se postiže kad jednadžba koja opisuje prijelaz faza (koji definira materijalnu gustoću) između faze 'ima materijala' i faze 'nema materijala' (određene ograničenjem volumena), a koja je opisana poopćenom Cahn-Hillardovom jednadžbom postigne stacionarno stanje, slika 4.4



Slika 4.4: Evolucija fazne varijable za primjer topološke optimizacije ukliještene grede opterećene koncentriranom silom na desnom kraju, [56]

#### 4.4.1. Level set metode

Level-metode uveli su Osher i suradnici 1988. godine za praćenje napredovanja slobodnih površina u računalnoj dinamici fluida [57], i od tada metode su zbog jednostavnog i efikasnog načina opisivanja kompliciranih rubova primjenjivane u raznim područjima, od računalnog vida do optimizacije struktura. U kontekstu optimiranja struktura, level-set metode granice između 'ima materijala' i 'nema materijala' definiraju implicitno, preko izo-kontura level set funkcije. U literaturi postoji mnogo radova na temu level-set metoda, koje se mogu kategori-

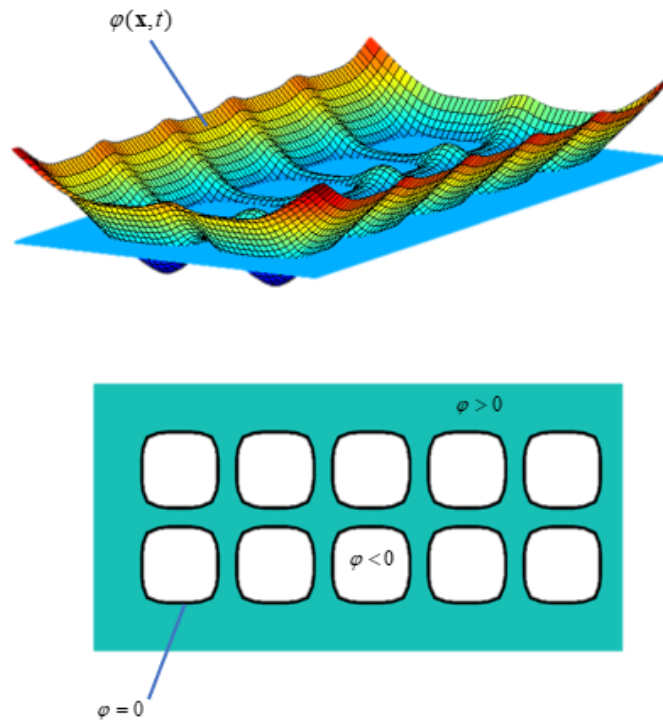
zirati s obzirom na parametrizaciju level-set funkcije, preslikavanja geometrije (projiciranja geometrije opisane diskretiziranom level set funkcijom na strukturalni model koji predviđa strukturalno ponašanje trenutnog dizajna), korištenog numeričkog modela, metoda ažuriranja dizajna te primjenjene regularizacije. Van Dijk u preglednom radu [58] daje detaljan pregled razvoja level set metoda s obzirom na spomenute kategorije.

U daljnjem tekstu dat će se osnovna teoretska podloga level set metoda, dok će se u 4.4.2 dati šira slika kroz pregled literature o level set metodama koje se temelje na izogeometrijskoj analizi.

U level set metodi, rub strukture  $\partial\Omega$  implicitno je ugrađen kao nulta izolinija level set funkcije  $\phi(\mathbf{x}, t)$  definirane nad referentnom domenom  $D \subset R^d (d = 2, 3)$ , dimenzije  $d + 1$ , kako slijedi:

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) > 0, \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \delta\Omega \\ \phi(\mathbf{x}, t) < 0, \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

gdje su  $\mathbf{x}$  koordinate točke u referentnoj domeni  $D$ ,  $\Omega$  dio domene  $D$  gdje materijal postoji a  $t$  je pseudo-vrijeme. Ideja iza level-set koncepta prikazana je na slici 4.5 Promjenom



Slika 4.5: Gornja slika prikazuje level set funkciju čija nulta izo-linija daje strukturu prikazanu na slici ispod

level set funkcije u pseudo-vremenu mijenjaju se oblik i topologija domene materijala  $\Omega$ . Diferenciranjem level set funkcije  $\phi(\mathbf{x}, t)$  u odnosu na pseudo-vrijeme dobije se Hamilton-

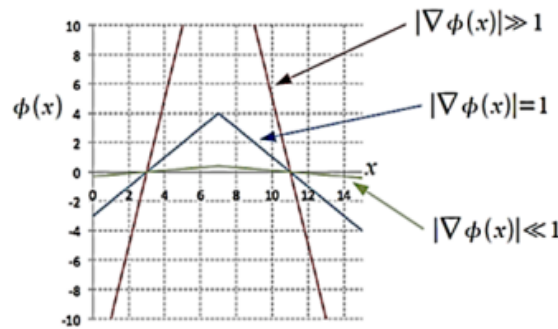
Jacobijeva jednačba:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - v_n |\nabla \phi| = 0, \quad \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

gdje je normalna brzina  $v_n$  :

$$v_n = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \quad (4.11)$$

U optimizacijskom procesu brzinu  $v_n$  određuje funkcija cilja optimizacijskog problema i definira se provođenjem analize osjetljivosti, a optimalna topologija strukture dobije se rješavanjem jednačbe 4.10. Kako jednačba 4.10 vrijedi samo za rub strukture ( $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ ) potrebno je polje brzine  $v_n$  definirati na cijeloj domeni (ili barem u pojasu oko rubova), te se stoga ono proširuje tzv. metodama proširenja brzine (eng. *velocity extension*). Tokom optimizacijskog procesa, rješavanjem jednačbe 4.10, level set funkcija se mijenja i moguće je da postane blaga ili strma (slika 4.6) što može dovesti do konvergencijskih problema, pa se stoga tokom procesa često vrši reinicijalizacija level set funkcije. Tokom reinicijalizacije level set funkcije, ona se prisilno postavlja da bude tzv. *signed-distance* funkcija (tj. takva da u svim točkama funkcije vrijedi  $|\nabla \phi| = 1$ ). Drugi način izbjegavanja konvergencijskih problema i ublažavanja numeričkih artefakata je uvođenje difuzijskog i reakcijskog dodatka na konvektivni izraz Hamilton-Jacobijeve jednačbe 4.10, [58].



Slika 4.6: Tokom procesa optimizacije, ako level set funkcija postane strma ( $|\nabla \phi(x)| \gg 1$ ) ili blaga ( $|\nabla \phi(x)| \ll 1$ ) može doći do konvergencijskih problema, te se stoga u svakoj ili svako nekoliko iteracija provodi proces reinicijalizacije u kojem se level set funkcija uvjetuje da bude tzv. *signed distance* funkcija ( $|\nabla \phi(x)| = 1$ ), [59]

Matematička definicija level-set topološke optimizacije za problem minimalne podatljivosti može se definirati kako slijedi [60]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimiziraj : } J(\mathbf{u}, \phi) = \int_{\Omega} \varepsilon^T(\mathbf{u}) E \varepsilon(\mathbf{u}) H(\phi) d\Omega \\ \text{s.t. : } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}, \phi) \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \\ V(\Omega) = \int_{\Omega} H(\phi) d\Omega \leq V_{max} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

gdje je  $H(\phi)$  Heavisideova funkcija definirana sljedećim izrazom:

$$H(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \phi \geq 0 \\ 0, & \text{ako je } \phi < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

$J(\mathbf{u}, \phi)$  je podatljivost,  $E$  matrica elastičnosti a  $\varepsilon$  naprezanje. Nejednadža  $V(\Omega) \leq V_{max}$  predstavlja ograničenje volumena. Bilinearna forma energije deformacije  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  i linearna forma opterećenja  $l(\mathbf{v}, \phi)$  definirane su u prethodnom poglavlju izrazima 2.19 i 2.20.

Da bi se spriječile numeričke nestabilnosti i izbjegao singularitet u matrici krutosti, Heavisideova funkcija (4.13) se praktično definira sljedećim izrazom:

$$H(\phi) = \begin{cases} \alpha, & \text{ako je } \phi \leq -\Delta \\ \frac{1}{2}(1 + \sin(\pi\phi/(2\Delta))), & \text{ako je } -\Delta < \phi < \Delta \\ 1, & \text{ako je } \phi \geq \Delta \end{cases} \quad (4.14)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\Delta$  male skalarne vrijednosti koje određuju aproksimaciju Heavisideove funkcije.

Hamilton-Jacobijeva jednadžba tipično se rješava eksplicitno u diskretnom ili semi-diskretnom obliku. U literaturi najčešće korištena metoda rješavanja je Eulerova eksplicitna metoda konačnih razlika. Kod eksplicitnih metoda rješavanja Hamilton-Jacobijeve jednadžbe potrebno je za vremenski korak postaviti dovoljno malu vrijednost koja osigurava numeričku stabilnost. Kao drugačiji pristup rješavanju razvile su se tzv. parametrizirane level set metode, kod kojih se parametrizacijom level set funkcije prostorna diskretizacija razdvaja od vremenske, te se tako Hamilton-Jacobi parcijalna diferencijalna jednadžba svodi na jednostavniji niz običnih diferencijalnih jednadžbi. Tako npr. autori u radovima [61, 62] za parametrizaciju level set funkcije koriste B-Splineove, [63] i [64] RBF-ove (*radial basis functions*), a [65] CS-RBF-ove (*compactly supported radial basis functions*). Svi navedeni radovi za strukturnu analizu koriste metodu konačnih elemenata.

U daljnjem tekstu obradit će se pregled dostupne literature koja rješava topološki optimizacijski problem (4.12) level set metodama, koristeći izogeometrijsku analizu umjesto klasične FEM analize za računanje pomaka  $\mathbf{u}$ .

#### 4.4.2. Pregled literature

Wang i suradnici u radu [60] prvi istražuju izogeometrijske level-set topološke optimizacijske metode. Autori u svom pristupu koriste NURBS bazne funkcije za parametrizaciju level set funkcije (izraz 4.15) kao i za evaluaciju funkcije cilja, tj. za minimizaciju podatljivosti (eng. *compliance*). Za varijable optimiranja uzimaju kontrolne točke parametrizacije.



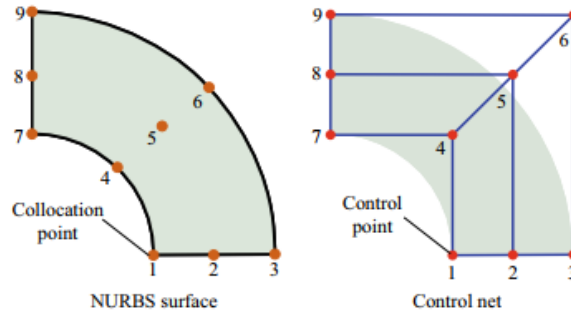
Parametrizacija level set funkcije  $\Phi$  definirana je sljedećim izrazom:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\phi(t) = \sum_i N_i(\mathbf{x})\phi_i(t) \quad (4.15)$$

gdje je  $\phi_i(t)$  koeficijent  $i$ -te kontrolne točke parametrizacije (a ne vrijednost level set funkcije), a  $N_i(\mathbf{x})$  odgovarajuća NURBS bazna funkcija. Hamilton-Jacobijeva parcijalna diferencijalna jednačnja sada je definirana kako slijedi:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x})^T \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} - v_n |(\nabla \mathbf{N}(\mathbf{x}))^T \phi(t)| = 0 \quad (4.16)$$

Za određivanje koeficijenata  $\phi_i(0)$  iz jednačnje 4.16, za  $m$  kontrolnih točaka potrebno je definirati  $m$  kolokacijskih točaka. U tu svrhu autori koriste Grevilleove apscise, slika 4.7. Kako



Slika 4.7: Schema Grevillovih apscisa za određivanje kolokacijskih točaka NURBS plohe, [60].

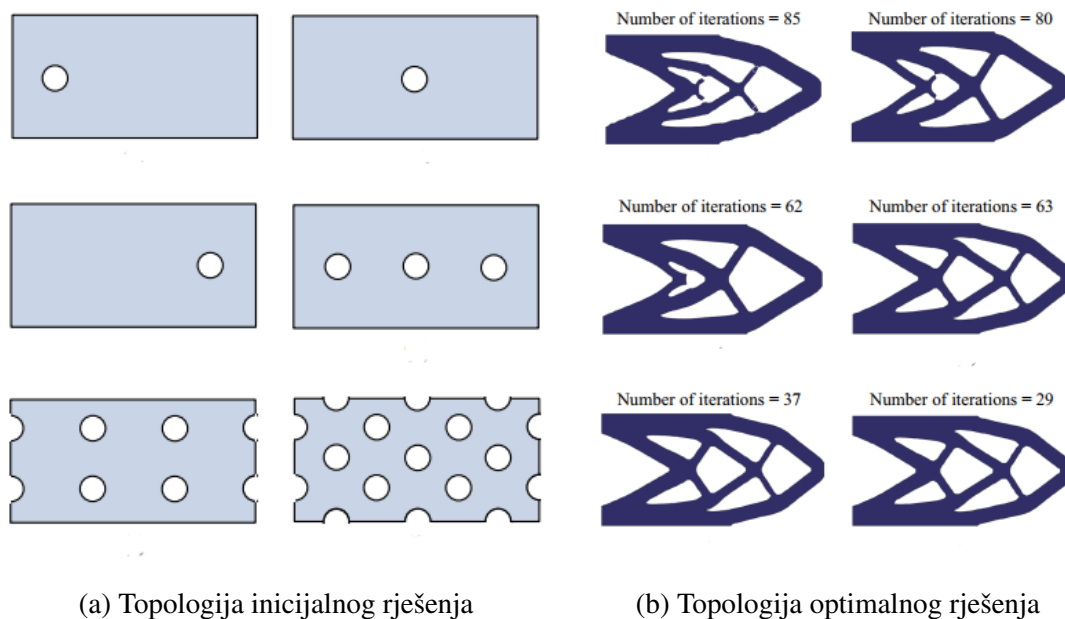
su kolokacijske točke definirane u parametarskim koordinatama, potrebno je odrediti njihove fizikalne vrijednosti (u Kartezijevom koordinatnom sustavu) uvrštavanjem u jednačnju parametrizacije (npr. za B-Spline plohu to je jednačnja 2.4). Zatim je potrebno iz inicijalne level set plohe odrediti vrijednosti level set funkcije u kolokacijskim točkama. Poznavanjem tih vrijednosti, iz jednačnje 4.15 sada se konačno određuju inicijalne vrijednosti varijabli optimiranja  $\phi_i(0)$  (tj. kontrolnih točaka parametrizacije inicijalne level set funkcije). Autori rješavaju problem minimiziranja podatljivosti 4.12 transformacijom problema s ograničenjima u problem bez ograničenja formuliranjem Lagrangeove funkcije:

$$L(\mathbf{u}, \Phi) = J(\mathbf{u}, \Phi) + \lambda \left[ \int_{\Omega} H(\Phi) d\Omega - V_{max} \right] \quad (4.17)$$

Da bi rješenje bilo optimalno mora biti zadovoljen sljedeći uvjet:

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}, \Phi)}{\partial t} = \frac{\partial J(\mathbf{u}, \Phi)}{\partial \phi_i} + \lambda \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_i} = 0 \quad (4.18)$$

gdje su  $\partial J(\mathbf{u}, \Phi)/\partial \phi_i$  i  $\partial V(\Phi)/\partial \phi_i$  osjetljivosti funkcije cilja i ograničenja dobiveni analizom osjetljivosti (izrazi 26 i 27 u literaturi [60]). Za ažuriranje varijabli optimiranja koriste metodu kriterija optimalnosti koja se temelji na zadovoljavanju niza ograničenja koji de-



Slika 4.8: Utjecaj početnog rješenja na ishod optimizacije. Jedna inicijalna rupa nije dovoljna za postizanje optimalne topologije (optimizacijski postupak je zaustavljen jer je kriterij maksimalnog broja iteracija bio dostignut) [60]

finiraju odziv strukture. Metoda je efikasna za optimizacijske probleme s velikim brojem varijabli optimiranja i malim brojem ograničenja, što je slučaj kod topološke optimizacije sa globalnim ograničenjem volumena. Ažuriranje Lagrangeovog množitelja temelje na Ridde-rovoj metodi.

Kod rješavanja diskretizirane jednadžbe ravnoteže, neki elementi se nalaze u područjima gdje ima materijala, neki u prazninama ili kombinirano. Kako bi se osiguralo da sustav nije singularan autori koriste *ersatz* pristup. Kod ovog pristupa mreža elemenata nad kojim se vrši integracija se ne mijenja tokom optimizacijskog procesa, a na mjestima gdje materijala nema materijala zadaje se mala, zanemariva krutost. Wang i suradnici to postižu definiranjem gustoće materijala kako slijedi:

$$\rho(\Phi) = \frac{(E_s - E_w)H(\Phi) + E_w}{E_s} \quad (4.19)$$

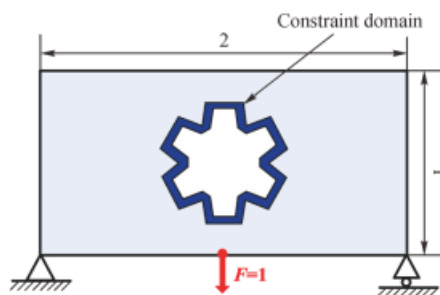
gdje je  $E_s$  Youngov modul elastičnosti materijala, a  $E_w$  mala vrijednost koja definira slabu fazu materijala (odnosno da sustav nije singularan), općenito se uzima  $E_w < 0.001E_s$ . Krutost elementa  $e$  je tada definirana kao  $\mathbf{K}'_e = \mathbf{K}_e \cdot \rho_e$ , gdje je  $\mathbf{K}_e$  krutost punog izogeometrijskog elementa, a  $\rho_e$  gustoća materijala elementa. Autori predloženi postupak topološke optimizacije level-set metodom i izogeometrijskom analizom prezentiraju na primjerima minimuma podatljivosti nekoliko numeričkih problema, te analiziraju utjecaj početnog rješenja na rezultat optimizacije (slika 4.8). U usporedbi s konvencionalnom metodom konačnih elemenata, autori su pokazali da je izogeometrijska level set topološka optimizacija efikasnija: za isti broj integracijskih elemenata (istu mrežu) ukupan broj stupnjeva slobode je manji kod izo-

geometrijske analize nego kod metode konačnih elemenata, te je posljedično i broj iteracija potrebnih za postizanje optimalne topologije manji. Računalno vrijeme potrebno za jednu iteraciju, za 5 različitih konfiguracija (istog stupnja polinoma,  $p = 2$ ) sažeti su u tablici 4.1. Vidljivo je da korištenje izogeometrijske analize umjesto metode konačnih elemenata u konačnici ubrzava optimizacijski proces više od 3 puta.

Diskretizacija	$N_{FEM}$	$N_{IGA}$	$t_{FEM}(s)$	$t_{IGA}(s)$	$\frac{t_{FEM}}{t_{IGA}}$
$16 \times 8$	1122	360	0.62	0.20	3.10
$32 \times 16$	4290	1224	2.62	0.83	3.16
$64 \times 32$	18354	4488	13.30	4.11	3.23
$128 \times 64$	69426	17160	101.88	33.50	3.04
$256 \times 128$	269874	67080	1489.36	360.22	4.13

Tablica 4.1: Usporedba efikasnosti izogeometrijske analize i metode konačnih elemenata na temelju potrebnog računalnog vremena za jednu iteraciju.  $N_{IGA}$  i  $N_{FEM}$  su brojevi ukupnih stupnjeva slobode za datu konfiguraciju elemenata, za izogeometriju i metodu konačnih elemenata.

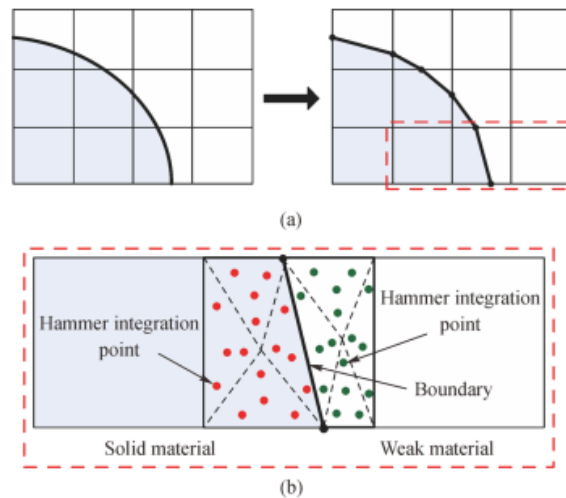
Isti autori proširuju svoje istraživanje u radu [66]: uvode proizvoljna geometrijska ograničenja (primjerice kao na slici 4.9) kojima definiraju dijelove domene u kojima materijal mora postojati (kao što uglavnom i je slučaj u praksi), te koriste različitu integracijsku shemu za odrezane (eng. *trimmed*) elemente. Ključan problem kod uvođenja geometrijskih ograni-



Slika 4.9: Primjer geometrijskog ograničenja u topološkim optimizacijskim problemima, [66].

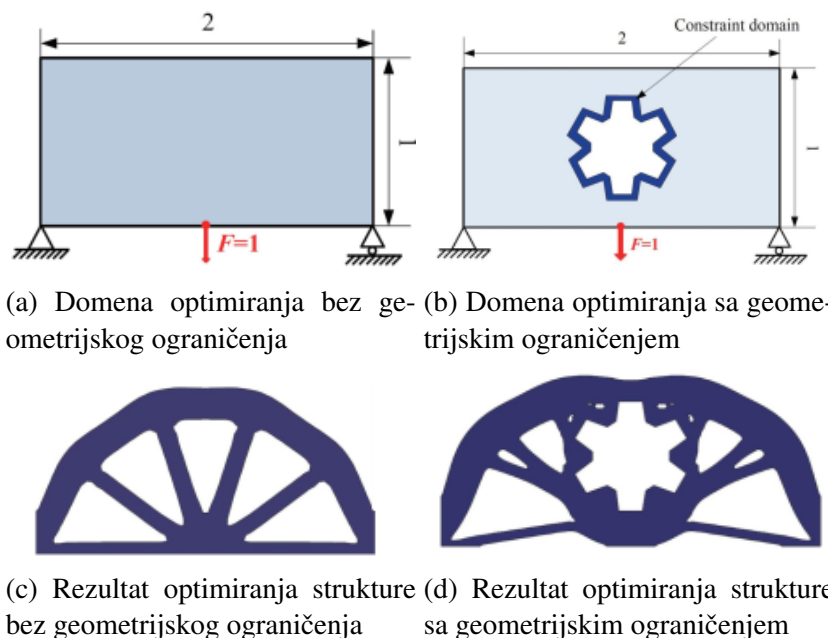
čenja u topološku optimizaciju predstavlja određivanje pripada li specifična točka u područje domene ograničenja. U tu svrhu autori koriste implementaciju MacMartinove modifikacije algoritma točka-u-poligonu (eng. *point-in-polygon algorithm*). Kao rezultat tog algoritma dobije se podjela domene, u kojoj se mogu klasificirati tri tipa elementa: regularani element koji se u potpunosti nalazi unutar domene, prazni element koji se u potpunosti nalazi iza domene (te se izuzima iz daljnjeg proračuna) te odrezani element koji se djelomično nalazi unutar (koji se zadržava) i djelomično izvan domene (koji se izuzima). Za slučaj odrezanih elemenata, njihova domena se definira oduzimanjem kontrolnog poligona koji reže izvorni element od samog punog elementa. Prije svega autori rade *h-refinement* na krivulju koja definira granicu materijala kako bi kontrolni poligoni što bolje aproksimirali stvarnu krivulju. Na odrezanim elementima autori koriste posebnu integracijsku metodu [67]. U suštini, ovom

procedurom od početne pravokutne domene izuzet je dio domene koji je geometrijskim ograničenjem definiran kao područje gdje nema materijala, i taj dio nije dio proračunske domene. Na proračunskoj domeni, kao i u prethodnom radu [60], kad je riječ o punim elementima



Slika 4.10: Hammerovo integracijsko pravilo za odrezane elemente, [66].

autori koriste klasično Gaussovo integracijsko pravilo, dok nad elementima koji sadrže obje faze materijala (jednadžba 4.19), autori primjenjuju Hammerovo integracijsko pravilo, slika 4.10. Slika XX prikazuje usporedan prikaz rezultata topološke optimizacije na primjeru tzv. Mitchellovog tipa strukture, sa i bez geometrijskog ograničenja.



(a) Domena optimiranja bez geometrijskog ograničenja (b) Domena optimiranja sa geometrijskim ograničenjem

(c) Rezultat optimiranja strukture bez geometrijskog ograničenja (d) Rezultat optimiranja strukture sa geometrijskim ograničenjem

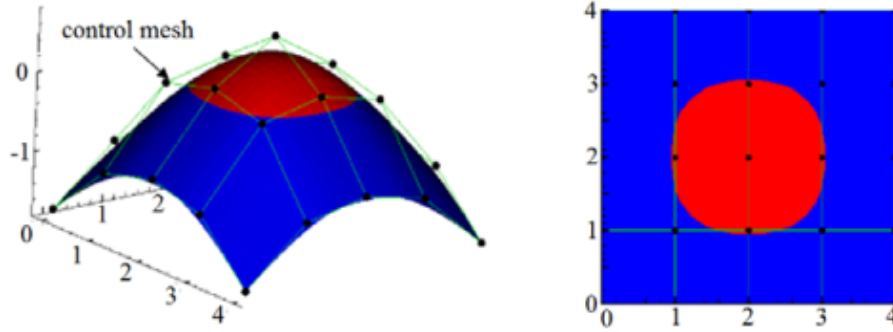
Slika 4.11: Topološka optimizacija level set metodom Mitchellovog tipa strukture, [60, 66]

Za napredovanje postupka optimizacije autori koriste metodu kriterija optimalnosti, kao i u prethodnom radu [60].

Jahangiry i suradnici predlažu sličan level-set pristup topološkoj optimizaciji kao u prethodnim radovima. Oni parametriziraju level set funkciju koristeći NURBS bazne funkcije (slika 4.12:

$$\Phi(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) \phi_{i,j}(t) \quad (4.20)$$

gdje su  $\phi_{i,j}$  kontrolne točke te parametrizacije i ujedno varijable optimiranja. Za rješavanje



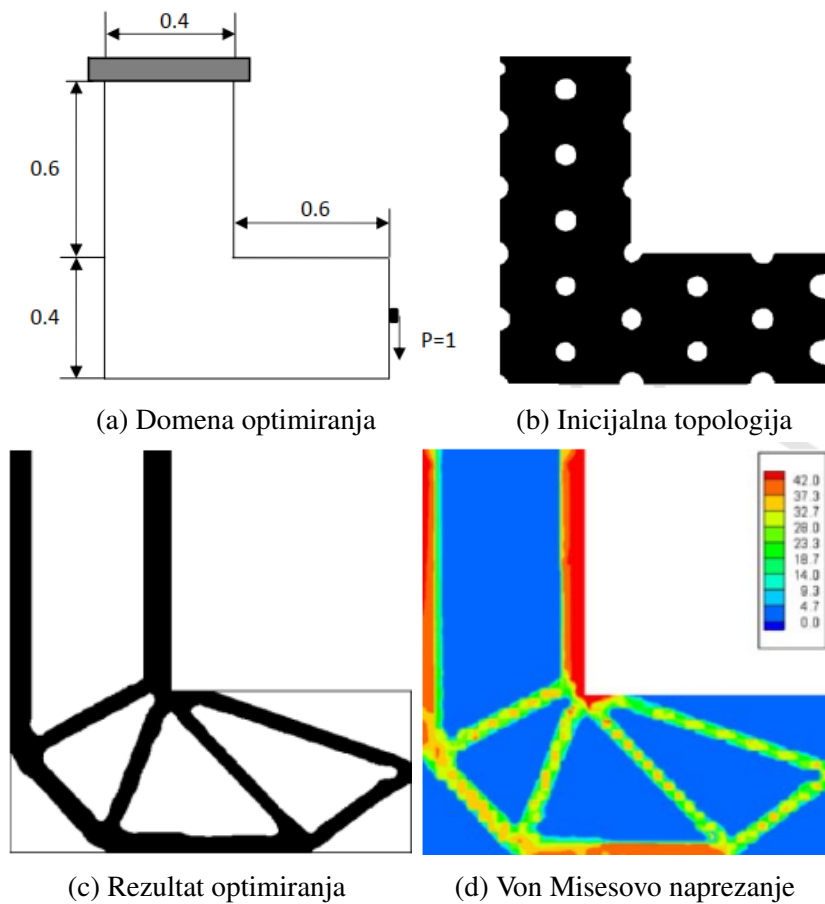
Slika 4.12: NURBS parametrizacija level set funkcije, [59].

optimizacijskog problema autori koriste metodu najbržeg spusta te na u skladu s tim provode analizu osjetljivosti. Kako bi ažurirali level set funkciju tokom optimizacijskog procesa, autori Hamilton-Jacobijevu jednadžbu (4.10) diskretiziraju Eulerovom metodom konačnih razlika i istu rješavaju diferenciranjem unaprijed:

$$\frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{\Delta t} + v_{i,j}^k |\nabla \phi^k|_{i,j} = 0 \quad (4.21)$$

gdje je  $k$  broj iteracije,  $(i, j)$  indeksacija kontrolne točke level set funkcije,  $\Delta t$  vremenski korak a  $v_{i,j}$  vrijednost brzine u toj točki. Da bi rješenje bilo stabilno, vremenski korak mora biti izabran takav da je zadovoljen CFL uvjet stabilnosti:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max\{|v_{i,j}|\}} \quad (4.22)$$



Slika 4.13: Level-set topološka optimizacija strukture L-oblika, [59]

Za razliku od prethodna dva rada, Jahangiry i suradnici osim problema minimiziranja podatljivosti rješavaju i problem minimizacije težine uz smanjivanje lokalnih koncentracija naprezanja te problem istovremenog minimiziranja težine i energije deformiranja uz ograničenja lokalnih koncentracija naprezanja. Slika 4.13c prikazuje rješenje predloženom metodom, na strukturi L-oblika sa ograničenjem naprezanja.

## 5. Izazovi u istraživanju i smjernice za budući rad

U ovom kvalifikacijskom radu dat je kratak teorijski uvod, kao i izvod jednadžbi izogeometrijske metode za problem linearne elastičnosti. Pregledani su i obrađeni najrelevantniji radovi vezani uz dvije teme:

1. adaptivno profinjavanje izogeometrijske mreže
2. strukturalna optimizacija kod koje se rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe problema temelji na izogeometrijskoj metodi.

Pregledom literature utvrđeno je da su se metode izogeometrijske analize pokazale superiornijima naspram metode konačnih elemenata, kako za rješavanje problema linearne elastičnosti tako i za probleme računalne mehanike fluida, kontaktne probleme i druge nelinearne probleme. Uz činjenicu da se koristi isti matematički zapis za definiranje geometrije i polja od interesa, izogeometrijski koncept pokazao se efikasnijim i robusnijim iz više razloga. Izogeometrijska mreža je izravno ugrađena u B-Spline ili NURBS zapis koji egzaktno opisuje geometriju modela, dok s druge strane u metodi konačnih elemenata diskretizacijska mreža istu aproksimira, čime je već u startu uvedena greška aproksimacije u rezultat. Nadalje, za istu mrežu i isti stupanj polinoma baznih funkcija, broj stupnjeva slobode kod izogeometrijske analize je manji nego u metodi konačnih elemenata. B-Spline parametrizacija posjeduje mnoga za analizu pogodna matematička svojstva kao što su pozitivnost na cijelom području definiranja, svojstvo dijeljenja jedinice,  $C^{p-1}$  kontinuitet i na rubovima elemenata a ne samo u unutrašnjosti itd.

Glavni nedostatak ovog pristupa je nemogućnost lokalnog profinjavanja mreže, što je posljedica tenzor produkt prirode B-Spline parametrizacija. Upravo tema adaptivnog profinjavanja izogeometrijske mreže je jedno od najaktivnijih područja istraživanja kad je riječ o izogeometrijskim postupcima. Pregledom literature mogu se izdvojiti dva smjera istraživanja. Prvi je vezan uz modificiranje postojećih parametrizacija i razvijanje novih, a koje nadilaze tenzor-produkt prirodu B-Splinea. Drugi pristup se temelji na definiranju hijerarhije prostora B-Spline funkcija i selektiranja aktivnih elemenata i aktivnih baznih funkcija po levelima. Hijerarhijski pristup se pokazao intuitivnijim i jednostavnijim za implementiranje. Nedostatak klasičnog pristupa hijerarhijskih splineova u kontekstu analize je u tome što dolazi do preklapanja suporta baznih funkcija iz različitih razina te shodno s tim nije zadovoljeno svojstvo dijeljenja jedinice. Ovaj nedostatak može se premostiti računanjem koeficijenata koji

će zatim linearnom kombinacijom s baznim funkcijama zadovoljavati to svojstvo. Grupa autora predložila je drugačiji pristup koji se zasniva na skraćivanju suporta onih aktivnih baznih funkcija iz nižih razina čiji se suport nalazi u domeni više razine. Ovim pristupom ne samo da je zadovoljeno svojstvo dijeljenja jedinice, nego su i smanjena preklapanja baznih funkcija što u numeričkoj analizi implicira rjeđe matrice.

U ovom kvalifikacijskom radu daje se također i pregled istraživanja izogeometrijske analize u kontekstu strukturalne optimizacije. Budući da se u svakoj iteraciji optimizacijskog postupka provodi numerička analiza odziva strukture koja se optimira, unifikacija parametризacije i simulacije igra značajnu ulogu u smanjenju potrebnog računalnog vremena. Korištenjem izogeometrijske analize i odabirom kontrolnih točaka 'grube' mreže značajno se smanjuje i potreban broj varijabli optimiranja.

Poseban naglasak u ovom radu stavljen je na topološku optimizaciju level-set metodama. Kad je riječ o topološkoj optimizaciji level-set metodom gdje se numeričko rješavanje jednadžbi ravnoteže vrši izogeometrijskom analizom, u literaturi postoji tek nekolicina radova. U tim radovima implicitna level-set funkcija parametrizira se B-Spline baznim funkcijama. Jednadžba evolucije level-set plohe (Hamilton-Jacobijevu jednadžbu) ovakvim pristupom tipično se rješava eksplicitnom Eulerovom metodom diferenciranja unaprijed. Drugačiji pristup je svođenje Hamilton-Jacobijeve parcijalne diferencijalne jednadžbe na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, što je moguće postići ako se uzme u obzir da se parametrizacijom level-set funkcije razdvaja vremenska diskretizacija od prostorne. U obrađenim radovima, optimizacijski postupak (analiza osjetljivosti) se temelji na metodi kriterija optimalnosti ili gradijentnoj metodi najbžeg spusta.

Navedene teme istraživanja još uvijek su nedovoljno obrađene u literaturi. S obzirom da je riječ o multidisciplinarnim postupcima, prostora za doprinos ima u više smjerova. Adaptivne metode profinjavanja izogeometrijske mreže same po sebi su zanimljiva i jedna od aktivnijih tema u istraživačkim krugovima - od pronalaska što efikasnije metode implementacije, do definiranja stabilnih, pouzdanih i efikasnih *a posteriori* procjenitelja i indikatora pogreške koji su u suštini pogonski kotačić samih metoda. Također, ove metode imaju potencijala i za primjenu u opisanim level-set metodama, što do sada još nije istraženo.



## LITERATURA

- [1] T. Hughes, J. Cottrell i Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 39-41, 4135–4195, oct 2005.
- [2] J. A. Cottrell, T. J. Hughes i Y. Bazilevs, *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, aug 2009.
- [3] H. Y. Roh i M. Cho, The application of geometrically exact shell elements to b-spline surfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 23, 2261 – 2299, 2004.
- [4] M. Cho i H. Roh, Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 81 – 115, 01 2003.
- [5] J. Cottrell, T. Hughes i A. Reali, Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 41, 4160 – 4183, 2007.
- [6] J. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs i T. Hughes, Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 41, 5257 – 5296, 2006, John H. Argyris Memorial Issue. Part II.
- [7] S. Lipton, J. Evans, Y. Bazilevs, T. Elguedj i T. Hughes, Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 5, 357 – 373, 2010, computational Geometry and Analysis.
- [8] Y. Bazilevs, V. Calo, J. Cottrell, T. Hughes, A. Reali i G. Scovazzi, Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 1, 173 – 201, 2007.
- [9] Y. Bazilevs i I. Akkerman, Large eddy simulation of turbulent Taylor-Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method, *Journal of Computational Physics*, 229, 9, 3402 – 3414, 2010.
- [10] Y. Bazilevs, V. M. Calo, Y. Zhang i T. J. R. Hughes, Isogeometric Fluid-structure Interaction Analysis with Applications to Arterial Blood Flow, *Computational Mechanics*, 38, 4-5, 310–322, sep 2006.
- [11] Y. Bazilevs, V. Calo, T. Hughes i Y. Zhang, Isogeometric fluid-structure interaction: Theory, algorithms, and computations, *Computational Mechanics*, 43, 3–37, 12 2008.

- [12] W. A. Wall, M. A. Frenzel i C. Cyron, Isogeometric structural shape optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 33, 2976 – 2988, 2008.
- [13] B. Hassani, S. Tavakkoli i N. Moghadam, Application of isogeometric analysis in structural shape optimization, *Scientia Iranica*, 18, 4, 846 – 852, 2011.
- [14] Y. Zhang, Y. Bazilevs, S. Goswami, C. L. Bajaj i T. J. Hughes, Patient-specific vascular nurbs modeling for isogeometric analysis of blood flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 29, 2943 – 2959, 2007.
- [15] M. G. Cox, The Numerical Evaluation of B-Splines, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 10, 2, 134–149, 10 1972.
- [16] C. de Boor, On calculating with b-splines, *Journal of Approximation Theory*, 6, 1, 50 – 62, 1972.
- [17] E. M. Garau i R. Vázquez, Algorithms for the implementation of adaptive isogeometric methods using hierarchical b-splines, *Applied Numerical Mathematics*, 123, 58 – 87, 2018.
- [18] Y. Bazilevs, V. Calo, J. Cottrell, J. Evans, T. Hughes, S. Lipton, M. Scott i T. Sederberg, Isogeometric analysis using t-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 5, 229 – 263, 2010, computational Geometry and Analysis.
- [19] T. Sederberg, J. Zheng, A. Bakenov i A. Nasri, T-splines and t-nurccs, *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 22, 477–484, 07 2003.
- [20] M. Dörfel, B. Jüttler i B. Simeon, Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with t-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 12 2010.
- [21] X. Li i M. Scott, On the nesting behavior of t-splines, 22, 05 2011.
- [22] X. Li, J. Zheng, T. W. Sederberg, T. J. Hughes i M. A. Scott, On linear independence of t-spline blending functions, *Computer Aided Geometric Design*, 29, 1, 63 – 76, 2012, geometric Constraints and Reasoning.
- [23] A.-V. Vuong, C. Giannelli, B. Jüttler i B. Simeon, A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, 49, 3554 – 3567, 2011.
- [24] D. R. Forsey i R. H. Bartels, Hierarchical b-spline refinement, *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 22, 4, 205 – 212, 1988.
- [25] C. Giannelli, B. Jüttler, S. Kleiss, A. Mantzaflaris, B. Simeon i J. Špěh, Thb-splines: An effective mathematical technology for adaptive refinement in geometric design and isogeometric analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 299, 11 2015.
- [26] D. Schillinger, L. Dedé, M. A. Scott, J. A. Evans, M. J. Borden, E. Rank i T. J. Hughes, An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of nurbs, immersed boundary methods, and t-spline cad surfaces, *Computer*

*Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 249-252, 116 – 150, 2012, higher Order Finite Element and Isogeometric Methods.

- [27] C. Giannelli, B. Jüttler i H. Speleers, Strongly stable bases for adaptively refined multilevel spline spaces, *Advances in Computational Mathematics*, 40, 459–490, 04 2014.
- [28] C. Giannelli, B. Jüttler i H. Speleers, Thb-splines: The truncated basis for hierarchical splines, *Computer Aided Geometric Design*, 29, 485–498, 10 2012.
- [29] T. Grätsch i K.-J. Bathe, A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis, *Computers & Structures*, 83, 4, 235 – 265, 2005.
- [30] A. Buffa i C. Giannelli, Adaptive isogeometric methods with hierarchical splines: Error estimator and convergence, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 26, 01, 1–25, 2016.
- [31] A. Buffa i E. M. Garau, A posteriori error estimators for hierarchical b-spline discretizations, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28, 08, 1453–1480, 2018.
- [32] W. Dörfler, A convergent adaptive algorithm for poisson’s equation, *Siam Journal on Numerical Analysis - SIAM J NUMER ANAL*, 33, 06 1996.
- [33] V. M. Babuska, I., Feedback and adaptive finite element solution of one-dimensional boundary value problems., *Numerische Mathematik*, 44, 75–102, 1984.
- [34] D. Schillinger i E. Rank, An unfitted hp-adaptive finite element method based on hierarchical b-splines for interface problems of complex geometry, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, 47, 3358 – 3380, 2011.
- [35] C. de Falco, A. Reali i R. Vázquez, Geopdes: A research tool for isogeometric analysis of pdes, *Advances in Engineering Software*, 42, 12, 1020 – 1034, 2011.
- [36] R. Vázquez, A new design for the implementation of isogeometric analysis in octave and matlab: Geopdes 3.0, *Computers & Mathematics with Applications*, 72, 3, 523 – 554, 2016.
- [37] A. Buffa i E. M. Garau, Refinable spaces and local approximation estimates for hierarchical splines, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 37, 3, 1125–1149, 07 2016.
- [38] P. Bornemann i F. Cirak, A subdivision-based implementation of the hierarchical b-spline finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253, 584 – 598, 2013.
- [39] D. D’Angella, S. Kollmannsberger, E. Rank i A. Reali, Multi-level bézier extraction for hierarchical local refinement of isogeometric analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 328, 147 – 174, 2018.
- [40] M. A. Scott, M. J. Borden, C. V. Verhoosel, T. W. Sederberg i T. J. R. Hughes, Isogeometric finite element data structures based on bézier extraction of t-splines, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88, 2, 126–156, 2011.

- [41] P. Hennig, S. Müller i M. Kästner, Bézier extraction and adaptive refinement of truncated hierarchical nurbs, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 305, 316 – 339, 2016.
- [42] Y. Wang, Z. Wang, Z. Xia i L. H. Poh, Structural design optimization using isogeometric analysis: A comprehensive review, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 117, 455–507, 12 2018.
- [43] P. Christensen i A. Klarbring, *An Introduction to Structural Optimization*, 153, 01 2008.
- [44] D. A. Tortorelli i P. Michaleris, Design sensitivity analysis: Overview and review, *Inverse Problems in Engineering*, 1, 1, 71–105, 1994.
- [45] A. Ravindran, G. Reklaitis i K. Ragsdell, *ENGINEERING OPTIMIZATION: METHODS AND APPLICATIONS*, Wiley India Pvt. Limited, 2006.
- [46] D. Bertsekas i W. Rheinboldt, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Computer science and applied mathematics, Elsevier Science, 2014.
- [47] M. R. Hestenes, Multiplier and gradient methods, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4, 5, 303–320, nov 1969.
- [48] M. POWELL, A new algorithm for unconstrained optimization, J. Rosen, O. Mangasarian i K. Ritter, editori, *Nonlinear Programming*, 31 – 65, Academic Press, 1970.
- [49] S. Cho i S.-H. Ha, Isogeometric shape design optimization: Exact geometry and enhanced sensitivity, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38, 53–70, 03 2009.
- [50] X. Qian, Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral, *Computer-Aided Design*, 43, 1427–1437, 11 2011.
- [51] D. Fuřžeder i B. Simeon, Algorithmic aspects of isogeometric shape optimization, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 107, 183–207, 12 2015.
- [52] A. Herrema, N. Wiese, C. Darling, B. Ganapathysubramanian, A. Krishnamurthy i M.-C. Hsu, A framework for parametric design optimization using isogeometric analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 316, 11 2016.
- [53] Y.-D. Seo, H.-J. Kim i S.-K. Youn, Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 49, 3270 – 3296, 2010.
- [54] A. Kumar i A. Parthasarathy, Topology optimization using b-spline finite elements, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44, 471–481, 10 2011.
- [55] X. Qian, Topology optimization in b-spline space, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 265, 15 – 35, 2013.
- [56] L. Dede, M. Borden i T. Hughes, Isogeometric analysis for topology optimization with a phase field model, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 19, 09 2012.
- [57] S. Osher i J. A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations, *J. Comput. Phys.*, 79, 1, 12–49, studeni 1988.

- [58] N. van Dijk, K. Maute, M. Langelaar i F. Keulen, Level-set methods for structural topology optimization: A review, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48, 09 2013.
- [59] H. A. Jahangiry i S. M. Tavakkoli, An isogeometrical approach to structural level set topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 319, 240 – 257, 2017.
- [60] Y. Wang i D. Benson, Isogeometric analysis for parameterized lsm-based structural topology optimization, *Computational Mechanics*, 57, 11 2015.
- [61] J. Chen, M. Freytag i V. Shapiro, Shape sensitivity of constructively represented geometric models, *Computer Aided Geometric Design*, 25, 7, 470 – 488, 2008, solid and Physical Modeling.
- [62] J. Chen, V. Shapiro, K. Suresh i I. Tsukanov, Shape optimization with topological changes and parametric control, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71, 3, 313–346, 2007.
- [63] S. Wang i M. Y. Wang, Radial basis functions and level set method for structural topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, 12, 2060–2090, 2006.
- [64] S. Wang, K. Lim, B. Khoo i M. Wang, An extended level set method for shape and topology optimization, *Journal of Computational Physics*, 221, 1, 395 – 421, 2007.
- [65] Z. Luo, L. Tong i Z. Kang, A level set method for structural shape and topology optimization using radial basis functions, *Computers & Structures*, 87, 7, 425 – 434, 2009.
- [66] Y. Wang i D. Benson, Geometrically constrained isogeometric parameterized level-set based topology optimization via trimmed elements, *Frontiers of Mechanical Engineering*, 1–16, 10 2016.
- [67] A. P. Nagy i D. J. Benson, On the numerical integration of trimmed isogeometric elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284, 165 – 185, 2015, isogeometric Analysis Special Issue.

## SAŽETAK

U ovom kvalifikacijskom radu dat je pregled strategija adaptivnog profinjavanja izogeometrijske mreže te pregled metoda strukturalne optimizacije koje rješavanje jednadžbi stanja temelje na izogeometrijskim postupcima. U poglavlju 2 opisana je B-Spline parametrizacija, kao i njeno racionalno proširenje, NURBS. Također je opisana primjena ovih parametrizacija kod rješavanja problema linearne elastičnosti. Sljedeće, 3. poglavlje daje pregled strategija adaptivnog profinjavanja izogeometrijske mreže gdje su metode zasnovane na hijerarhijskim splineovima detaljnije istražene. Poglavlje 4 obrađuje primjenu izogeometrijskih metoda kod rješavanja problema strukturalne optimizacije. Poseban naglasak se stavlja na topološku optimizaciju level-set metodama. Na samom kraju rada izneseni su izazovi i smjernice za daljnje istraživanje.